Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2022; Vol. 9(1): 91-101.

Existence of solution of a distributional problem for a generalized Schrödinger equation

Existencia de solución de un problema distribucional para una ecuación de Schrödinger generalizada

Yolanda Santiago Ayala

Received, Apr. 18, 2022 *Accepted, Jul. 09, 2022*

How to cite this article:
Santiago Y. *Existencia de solución de un problema distribucional para una ecuación de Schrödinger generalizada.* Selecciones Matemáticas. 2022;9(1):91–101. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2022.01.07

Abstract

In this article, we prove the existence and uniqueness of the solution of the homogeneous generalized Schrödinger equation of order m in the periodic distributional space P', where m is an even number not a multiple of four. Furthermore, we prove that the solution depends continuously respect to the initial data in P'. Introducing a family of weakly continuous operators, we prove that this family is a group in P'. Then, with this family of operators, we get a fine version of the existence and dependency continuous theorem obtained.
Finally, we give the conclusions and remarks derived from this study.

Keywords . Groups theory, existence of solution, Schrödinger equation of order m, distributional problem, weakly continuous operators.

Resumen

En este artículo probamos la existencia y unicidad de solución de la ecuación de Schrödinger generalizada homogénea de orden m en el espacio distribucional periódico P', siendo m un número par no múltiplo de cuatro. Además, probamos que la solución depende continuamente respecto al dato inicial en P'. Introduciendo una familia de operadores débilmente continuos, probamos que esta familia es un grupo en P'. Luego, con esta familia de operadores, conseguimos una versión fina del Teorema de existencia y dependencia continua obtenido.
Finalmente, damos las conclusiones y observaciones derivados de este estudio.

Palabras clave. Teoría de grupos, existencia de solución, ecuación de Schrödinger de orden m, problema distribucional, operadores débilmente continuos.

1. Introducción. Primero empezamos comentando que de [3] se tiene probado la existencia de solución de la ecuación de Schrödinger en el espacio de Hilbert H^s_{per}. También en [3] se introduce una familia de operadores acotados en el espacio de Hilbert H^s_{per} y se prueba que forma un grupo unitario. Así, motivados por esas ideas resolveremos el problema (P_m) en el dual topológico de P: P', que no es un espacio de Banach, siendo m un número par no múltiplo de cuatro.

En este artículo, probaremos la existencia y unicidad de solución de (P_m), y además la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial en P', considerando la convergencia débil en P'. Y probaremos que las familias de operadores introducidas forman grupos de operadores débilmente continuos.

Nuestro artículo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, indicamos la metodología usada y citamos las referencias usadas. En la sección 3, colocamos los resultados obtenidos de nuestro estudio. Esta sección la dividimos en tres subsecciones. Así, en 3.1 probamos que el problema (P_m) posee una

*Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. Venezuela S/N Lima 01, Lima, Perú. (*ysantiagoa@unmsm.edu.pe*).

única solución y además demostramos que la solución depende continuamente respecto al dato inicial. En la subsección 3.2, introducimos familias de operadores lineales débilmente continuos en P' que logran formar un grupo. En la subsección 3.3 mejoramos el Teorema 3.1.
Finalmente, en la sección 4 damos las conclusiones y observaciones de este estudio.

2. Metodología. Como marco teórico en este artículo usamos las referencias [1], [2], [3] y [4] para la Teoría de Fourier en el espacio distribucional periódico, espacios de Sobolev periódico, espacios vectoriales topológicos, operadores débilmente continuos y existencia de solución de una ecuación diferencial distribucional.

3. Principales Resultados . La presentación de los resultados obtenidos lo hemos organizado en subsecciones y es del siguiente modo.

3.1. Solución de la Ecuación de Schrödinger (P_m). En esta subsección estudiaremos la existencia de solución del problema (P_m) y la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial en P'.

Teorema 3.1. *Sea $\mu > 0$, m un número par no múltiplo de cuatro y el problema distribucional homogéneo*

$$(P_m) \quad \left| \begin{array}{l} u \in C(\mathbb{R}, P'), \\ \partial_t u - i\mu \partial_x^m u = 0 \ \in P', \\ u(0) = f \in P'. \end{array} \right.$$

Entonces (P_m) posee una única solución $u \in C^1(\mathbb{R}, P')$. Además, la solución depende continuamente del dato inicial. Esto es, dados $f_n, f \in P'$ tal que $f_n \xrightarrow{P'} f$ implica $u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, donde u_n es solución de (P_m) con dato inicial f_n y u es solución de (P_m) con dato inicial f.

Demostración: La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma:
1. Supongamos que existe $u \in C(\mathbb{R}, P')$ satisfaciendo (P_m), entonces tomando la transformada de Fourier a la ecuación

$$\partial_t u - i\mu \partial_x^m u = 0,$$

conseguimos

$$0 = \partial_t \hat{u} - i\mu (ik)^m \hat{u} \ = \ \partial_t \hat{u} + i\mu k^m \hat{u},$$

que para cada $k \in \mathbb{Z}$ es una EDO con dato inicial $\hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k)$.
Así, planteamos un sistema no acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden homogéneo

$$(\Omega_k) \quad \left| \begin{array}{l} \hat{u} \in C(\mathbb{R}, S'(\mathbb{Z})) \\ \partial_t \hat{u}(k, t) + i\mu k^m \hat{u}(k, t) = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \text{ con } \widehat{f} \in S'(\mathbb{Z}), \end{array} \right.$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ y conseguimos

$$\hat{u}(k, t) = e^{-i\mu k^m t} \hat{f}(k),$$

de donde obtenemos la expresión explícita de u, candidato a solución:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k, t) \phi_k \ = \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu k^m t} \hat{f}(k) \phi_k, \tag{3.1}$$

$$= \left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^m t} \right)_{k \in \mathbb{Z}} \right]^{\vee}. \tag{3.2}$$

Como $f \in P'$ entonces $\hat{f} \in S'(\mathbb{Z})$, afirmamos que

$$\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^m t} \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in S'(\mathbb{Z}), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

En efecto, sea $t \in \mathbb{R}$, como $\widehat{f} \in S'(\mathbb{Z})$ entonces satisface: $\exists C > 0$, $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\widehat{f}(k)| \leq C|k|^N$, $\forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, usando esto obtenemos

$$|\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^m t}| = |\widehat{f}(k)||e^{-i\mu k^m t}| = |\widehat{f}(k)| \leq C|k|^N.$$

Luego,

$$\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in S'(\mathbb{Z})\,.$$

Si definimos

$$u(t) := \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee}\,, \quad \text{para todo } t\in\mathbb{R}\,, \tag{3.4}$$

vemos que $u(t)\in P'$, $\forall t\in\mathbb{R}$, pues aplicamos la transformada inversa de Fourier a $\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in S'(\mathbb{Z})$.
2. Probaremos que u definido en (3.4) es solución de (P_m).
Evaluando (3.2) en $t=0$, obtenemos

$$u(0) = \left[\left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee} = \left[\widehat{f}\right]^{\vee} = f\,.$$

Además, se verifican
a) $\partial_t\, u(t) = i\mu\,\partial_x^m\, u(t)$ en P', $\forall t\in\mathbb{R}$. Esto es, probaremos que se satisface:

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} < \frac{u(t+h)-u(t)}{h}, \varphi >}_{<\partial_t u(t),\varphi>:=} = i\mu < \partial_x^m u(t),\varphi >\,,\ \forall\varphi\in P\,, \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

En efecto, sea $t\in\mathbb{R}$, $\varphi\in P$ y $h\in\mathbb{R}-\{0\}$, denotamos

$$I_{h,t} :=< \frac{u(t+h)-u(t)}{h}, \varphi > \;.$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned}
I_{h,t} &= \frac{1}{h}\{< u(t+h),\varphi > - < u(t),\varphi >\} \\
&= \frac{1}{h}\Bigg\{\lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m(t+h)}\phi_k,\varphi > \\
&\qquad - \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\phi_k,\varphi >\Bigg\} \\
&= \frac{1}{h}\left\{\lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\left(e^{-i\mu k^m h}-1\right)\phi_k,\varphi >\right\} \\
&= \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\left(\frac{e^{-i\mu k^m h}-1}{h}\right)\phi_k,\varphi > \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\left(\frac{e^{-i\mu k^m h}-1}{h}\right)\underbrace{< \phi_k,\varphi >}_{=2\pi\widehat{\varphi}(-k)}\right\} \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2\pi\left\{\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\left(\frac{e^{-i\mu k^m h}-1}{h}\right)\widehat{\varphi}(-k)\right\} \\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\left(\frac{e^{-i\mu k^m h}-1}{h}\right)\widehat{\varphi}(-k)\,.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Sea $h>0$, tenemos

$$\begin{aligned}
e^{-i\mu k^m h}-1 &= \int_0^h [e^{-i\mu k^m s}]'\,ds \\
&= \int_0^h (-i\mu k^m)e^{-i\mu k^m s}\,ds\,.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Tomando norma a la igualdad (3.6) obtenemos

$$\begin{aligned}|e^{-i\mu k^m h}-1| &\leq \int_0^h \mu k^m \underbrace{|e^{-i\mu k^m s}|}_{=1}\, ds \\ &= \mu k^m \underbrace{\int_0^h ds}_{=h} \;=\; \mu k^m h\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Esto es, de (3.7) conseguimos

$$\left|\frac{e^{-i\mu k^m h}-1}{h}\right| \leq \mu k^m\,. \tag{3.8}$$

Si $h<0$, procedemos análogamente al caso h positivo, obteniendo:

$$\begin{aligned}|1-e^{-i\mu k^m h}| &\leq \int_h^0 \mu k^m \underbrace{|e^{-i\mu k^m s}|}_{=1}\, ds \\ &= \mu k^m \underbrace{\int_h^0 ds}_{=-h} \;=\; \mu k^m (\underbrace{-h}_{=|h|})\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Esto es,

$$\left|\frac{e^{-i\mu k^m h}-1}{h}\right| \leq \mu k^m\,. \tag{3.10}$$

Sea $h\in\mathbb{R}-\{0\}$, de (3.8) y (3.10) tenemos

$$\left|\frac{e^{-i\mu k^m h}-1}{h}\right| \leq \mu k^m\,. \tag{3.11}$$

Usando la desigualdad (3.11) y que $\widehat{f}\in S'(\mathbb{Z})$ obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|\underbrace{|e^{-i\mu k^m t}|}_{=1}|\widehat{\varphi}(-k)|\left|\frac{e^{-i\mu k^m h}-1}{h}\right| &\leq \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)||\widehat{\varphi}(-k)|k^m \\ &\leq C\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+m}|\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| \\ &= C\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+m}|\widehat{\varphi}(J)| < \infty \end{aligned}$$

pues $\widehat{\varphi}\in S(\mathbb{Z})$.
Usando el M-Test de Weierstrass, la serie $I_{h,t}$ es convergente absoluta y uniformemente. Luego, podemos tomar límite y obtener

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} I_{h,t} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\widehat{\varphi}(-k)\underbrace{\lim_{h\to 0}\left\{\frac{e^{-i\mu k^m h}-1}{h}\right\}}_{=-i\mu k^m} \\ &= (-i\mu)2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\widehat{\varphi}(-k)k^m\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Usando (3.12) tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} I_{h,t} &= (-i\mu)2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t} \underbrace{\widehat{\varphi}(-k)}_{=\frac{1}{2\pi}<\varphi,\phi_k>} k^m \\
&= i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t} < \varphi, \underbrace{-k^m\phi_k}_{=(ik)^m\phi_k} > \\
&= i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t} \underbrace{< \varphi, {\phi_k}^{(m)} >}_{=<\varphi^{(m)},\phi_k>} \\
&= i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t} < \phi_k, \varphi^{(m)} > \\
&= i\mu \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t} < \phi_k, \varphi^{(m)} > \\
&= i\mu \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\phi_k, \varphi^{(m)} > \\
&= i\mu < u(t), \varphi^{(m)} > \qquad (3.13)\\
&= i\mu < \partial_x^m u(t), \varphi > \ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$< \partial_t u(t), \varphi > = i\mu < \partial_x^m u(t), \varphi > , \quad \forall \varphi \in P , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

i.e.

$$\partial_t\, u(t) \;=\; i\mu\, \partial_x^m\, u(t) \qquad \text{en } P' , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

b) $u \in C(\mathbb{R}, P')$. Esto es, probaremos que

$$u(t+h) \xrightarrow{P'} u(t) \ \text{ cuando } \ h \to 0 \, , \ \forall t \in \mathbb{R} .$$

En efecto, sea $t \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in P$, probaremos que

$$H_{t,h} := < u(t+h) - u(t), \varphi > \longrightarrow 0 \, , \qquad \text{cuando } \ h \to 0 \, .$$

Sabemos que si $\varphi \in P$ entonces $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{Z})$. Usando (3.5) tenemos

$$H_{t,h} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t} \left(e^{-i\mu k^m h} - 1\right) \widehat{\varphi}(-k) \, .$$

Sea $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $|h| < 1$, de (3.11) conseguimos

$$\left| e^{-i\mu k^m h} - 1 \right| \le \mu k^m |h| < \mu k^m \, . \qquad (3.14)$$

Usando (3.14) y que $\widehat{f} \in S'(\mathbb{Z})$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \underbrace{|e^{-i\mu k^m t}|}_{=1} \left| e^{-i\mu k^m h} - 1 \right| |\widehat{\varphi}(-k)| \\
&\le C\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+m} |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| \\
&= C\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+m} |\widehat{\varphi}(J)| \, < \, \infty \, ,
\end{aligned}$$

pues $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{Z})$.
Usando el M-Test de Weierstrass concluimos que la serie $H_{t,h}$ converge absoluta y uniformemente. Luego es posible tomar límite y obtener

$$\lim_{h\to 0} H_{t,h} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^m t} \widehat{\varphi}(-k) \underbrace{\lim_{h\to 0} \left\{ e^{-i\mu k^m h} - 1 \right\}}_{=0} = 0\,.$$

Como $t \in \mathbb{R}$ fue tomado arbitrariamente, entonces podemos concluir que

$$u \in C(\mathbb{R}, P')\,.$$

c) $\partial_t u \in C(\mathbb{R}, P')$. Esto es, probaremos que

$$\partial_t u(t+h) \xrightarrow{P'} \partial_t u(t) \;\text{ cuando }\; h \to 0\,,\; \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

En efecto, sea $t \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in P$, usando el item a) tenemos

$$\begin{aligned} &< \partial_t u(t+h), \varphi > - < \partial_t u(t), \varphi > \\ &\qquad = i\mu\{< \partial_x^m u(t+h), \varphi > - < \partial_x^m u(t), \varphi >\} \\ &\qquad = i\mu \underbrace{\{< u(t+h), \varphi^{(m)} > - < u(t), \varphi^{(m)} >\}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

cuando $h \to 0$, desde que vale el item b) con $\varphi^{(m)} \in P$.
De b) y c) tenemos que $u \in C^1(\mathbb{R}, P')$.
d) Ahora, para $t \in \mathbb{R}$ fijo y arbitrario, si $f_n \xrightarrow{P'} f$ probaremos que:

$$u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t)\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Sabemos que si $f_n \xrightarrow{P'} f$ entonces $\widehat{f_n} \xrightarrow{S'(\mathbb{Z})} \widehat{f}$, i.e.

$$< \widehat{f_n} - \widehat{f}, \beta > \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } n \to +\infty\,, \quad \forall \beta \in S(\mathbb{Z})\,. \tag{3.16}$$

Queremos probar que:

$$< u_n(t), \psi > \longrightarrow < u(t), \psi > \quad \text{cuando } n \to +\infty\,, \quad \forall \psi \in P\,.$$

Así, sea $t \in \mathbb{R}$ fijo y $\psi \in P$, usando la identidad de Parseval generalizada, obtenemos las siguientes igualdades:

$$< u_n(t), \psi > = 2\pi < \left(\widehat{f_n}(k) e^{-i\mu k^m t} \right)_{k\in\mathbb{Z}}, \widetilde{\widehat{\psi}} > \tag{3.17}$$

$$< u(t), \psi > = 2\pi < \left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^m t} \right)_{k\in\mathbb{Z}}, \widetilde{\widehat{\psi}} > \,. \tag{3.18}$$

De (3.17) y (3.18) obtenemos:

$$\begin{aligned} &< u_n(t), \psi > - < u(t), \psi > \\ &\qquad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)\} \underbrace{e^{-i\mu k^m t} \widetilde{\widehat{\psi}}(k)}_{\beta_k :=} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$, desde que $\beta := (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in S(\mathbb{Z})$ puesto que vale (3.16).

$\square$

Corolario 3.1. *Sean $\mu > 0$ y m un número par no múltiplo de cuatro, entonces la única solución de (P_m) es*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^m t} \phi_k = \left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^m t} \right)_{k\in\mathbb{Z}} \right]^{\vee} ,$$

donde $\phi_k(x) = e^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}$.

3.2. Grupo de Operadores en P'. Recordemos que P' es el dual topológico de P, donde P es un espacio métrico completo.
En esta subsección introduciremos familias de operadores $\{T_m(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ en P', con $m \in \mathbb{N}$; y probaremos que los operadores son continuos en el sentido débil y satisfacen las propiedades de grupo.
Por simplicidad a esta familia de operadores la denotaremos por $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Teorema 3.2. *Sea $t \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$, definimos:*

$$\begin{aligned} T(t):\ P' &\longrightarrow P' \\ f &\longrightarrow T(t)f := \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee} \in P', \end{aligned}$$

entonces se satisfacen los siguientes enunciados:

1. $T(0) = I$.
2. $T(t)$ *es* $\mathbb{C}$ *- lineal y continua* $\forall t \in \mathbb{R}$. *Esto es, para cada* $t \in \mathbb{R}$, *si* $f_n \stackrel{P'}{\longrightarrow} f$ *entonces* $T(t)f_n \stackrel{P'}{\longrightarrow} T(t)f$.
3. $T(t + r) = T(t) \circ T(r)$, $\forall t, r \in \mathbb{R}$.
4. $T(t)f \stackrel{P'}{\longrightarrow} f$ *cuando* $t \to 0$, $\forall f \in P'$.
   Esto es, para todo $f \in P'$ *fijado, se cumple:*

$$< T(t)f, \psi > \longrightarrow < f, \psi >, \quad cuando\ \ t \to 0\,,\ \forall\, \psi \in P\,.$$

Demostración: Sea $f \in P'$ entonces $\widehat{f} \in S'(\mathbb{Z})$. Luego, de (3.3) tenemos

$$\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in S'(\mathbb{Z})\,;$$

tomando la transformada inversa de Fourier, obtenemos

$$\underbrace{\left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee}}_{=T(t)f} \in P', \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Esto es, $T(t)$ está bien definida para todo $t \in \mathbb{R}$.
1. Fácilmente obtenemos:

$$T(0)f = \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m 0}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee} = \left[\left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee} = \left[\widehat{f}\right]^{\vee} = f\,, \quad \forall f \in P'\,.$$

2. Sea $t \in \mathbb{R}$, probaremos que $T(t) : P' \to P'$ es $\mathbb{C}$-lineal. En efecto, sean $a \in \mathbb{C}$, $(\phi, \psi) \in P' \times P'$, tenemos

$$\begin{aligned} T(t)(a\phi + \psi) &= \left[\left(e^{-i\mu k^m t}[a\phi + \psi]^{\wedge}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee} \\ &= \left[\left(e^{-i\mu k^m t}[a\widehat{\phi}(k) + \widehat{\psi}(k)]\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee} \\ &= \left[a\left(e^{-i\mu k^m t}\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}} + \left(e^{-i\mu k^m t}\widehat{\psi}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee} \\ &= a\left[\left(e^{-i\mu k^m t}\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee} + \left[\left(e^{-i\mu k^m t}\widehat{\psi}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee} \\ &= a\,T(t)\phi + T(t)\psi\,. \end{aligned}$$

Ahora, para $t \in \mathbb{R}$ probaremos que $T(t) : P' \to P'$ es continua. Esto es, si $f_n \stackrel{P'}{\to} f$ probaremos que $T(t)f_n \stackrel{P'}{\to} T(t)f$.
Sabemos que si $f_n \stackrel{P'}{\to} f$ entonces $\widehat{f_n} \stackrel{S'}{\to} \widehat{f}$, i.e.

$$< \widehat{f_n}, \beta > \to < \widehat{f}, \beta >, \quad \text{cuando } n \to +\infty\,, \quad \forall \beta \in S(\mathbb{Z})\,.$$

i.e.

$$< \widehat{f_n} - \widehat{f}, \beta > \to 0\,, \quad \text{cuando } n \to +\infty\,, \quad \forall \beta \in S(\mathbb{Z})\,. \tag{3.19}$$

Queremos probar que:

$$< T(t)f_n, \psi > \to < T(t)f, \psi > \text{ cuando } n \to +\infty\,, \quad \forall \psi \in P\,.$$

Así, sea $t \in \mathbb{R}$ fijo y $\psi \in P$, usando la identidad de Parseval generalizada, obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} < T(t)f_n, \psi > &= < \left[\left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee}, \psi > \\ &= 2\pi < \left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in\mathbb{Z}}, \widetilde{\widehat{\psi}} > \,. \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} < T(t)f, \psi > &= < \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee}, \psi > \\ &= 2\pi < \left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in\mathbb{Z}}, \widetilde{\widehat{\psi}} > \,. \end{aligned} \tag{3.21}$$

De (3.20) y (3.21) obtenemos

$$\begin{aligned} &< T(t)f_n, \psi > - < T(t)f, \psi > \\ &\quad = 2\pi \left\{ < \left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in\mathbb{Z}}, \widetilde{\widehat{\psi}} > - < \left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in\mathbb{Z}}, \widetilde{\widehat{\psi}} > \right\} \\ &\quad = 2\pi \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^m t}\widetilde{\widehat{\psi}}(k) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\widetilde{\widehat{\psi}}(k) \right\} \\ &\quad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)\} \underbrace{e^{-i\mu k^m t}\widetilde{\widehat{\psi}}(k)}_{\beta_k :=} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$, desde que $\beta := (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in S(\mathbb{Z})$ y puesto que vale (3.19), esto es $< \widehat{f_n} - \widehat{f}, \beta > \longrightarrow 0$ cuando $n \to +\infty$.

3. Sean $t, r \in \mathbb{R} - \{0\}$, probaremos que $T(t) \circ T(r) = T(t+r)$. En efecto, sea $\phi \in P'$,

$$\begin{aligned} T(t+r)\phi &= \left[\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^m (t+r)}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee} \\ &= \left[\left(\underbrace{\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^m r}} \cdot e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee} \,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Como $\phi \in P'$, usando (3.3) tenemos que

$$\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^m r}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in S'(\mathbb{Z})\,, \quad \forall r \in \mathbb{R}\,. \tag{3.23}$$

Luego, tomando la transformada inversa de Fourier obtenemos:

$$\left[\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^m r}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee} \in P'\,, \quad \forall r \in \mathbb{R}\,.$$

Así, definimos:

$$g_r := \left[\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^m r}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee} \in P'\,.$$

Esto es,

$$g_r := T(r)\phi\,. \tag{3.24}$$

Tomando la transformada de Fourier a g_r conseguimos:

$$\widehat{g_r} = \left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^m r}\right)_{k\in\mathbb{Z}}\,,$$

esto es

$$\widehat{g_r}(k) = \widehat{\phi}(k) e^{-i\mu k^m r}\,, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\,. \tag{3.25}$$

Usando (3.25) en (3.22) y de (3.24) tenemos:

$$\begin{aligned} T(t+r)\phi &= \left[\left(\widehat{g_r}(k) e^{-i\mu k^m r} \right)_{k\in\mathbb{Z}} \right]^{\vee} \in P' \\ &= T(t) g_r \\ &= T(t)(T(r)\phi) \\ &= [T(t) \circ T(r)](\phi)\,, \quad \forall t, r \in \mathbb{R} - \{0\}\,. \end{aligned}$$

Así,

$$T(t+r) = T(t) \circ T(r)\,,\ \forall t, r \in \mathbb{R} - \{0\}\,. \tag{3.26}$$

Si $t = 0$ o $r = 0$ entonces la igualdad (3.26) también es verdadera, con esto concluimos la prueba de

$$T(t+r) = T(t) \circ T(r)\,, \quad \forall t, r \in \mathbb{R}\,. \tag{3.27}$$

4. Sea $f \in P'$, probaremos que:

$$T(t) f \xrightarrow{P'} f \text{ cuando } t \to 0\,.$$

Esto es, probaremos que:

$$< T(t) f, \varphi > \longrightarrow < f, \varphi > \text{ cuando } t \to 0\,, \quad \forall \varphi \in P\,.$$

En efecto, sea $\varphi \in P$, tenemos

$$\begin{aligned} H_t &:= < T(t) f, \varphi > - < f, \varphi > \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left\{ < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^m t} \phi_k, \varphi > - < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \phi_k, \varphi > \right\} \\ &= \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^m t} - 1 \right) \phi_k, \varphi > \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^m t} - 1 \right) < \phi_k, \varphi > \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2\pi \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^m t} - 1 \right) \widehat{\varphi}(-k) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^m t} - 1 \right) \widehat{\varphi}(-k)\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Sea $t > 0$, de (3.7) obtenemos

$$\left| e^{-i\mu k^m t} - 1 \right| \le \mu k^m t\,. \tag{3.29}$$

Sea $t < 0$, de (3.9) tenemos

$$\left| e^{-i\mu k^m t} - 1 \right| \le \mu k^m |t|\,. \tag{3.30}$$

De (3.29) y (3.30) conseguimos

$$\left| e^{-i\mu k^m t} - 1 \right| \le \mu k^m |t|\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{3.31}$$

De (3.31) con $|t| < 1$, tenemos

$$\left| e^{-i\mu k^m t} - 1 \right| \le \mu k^m\,. \tag{3.32}$$

Luego, usando (3.32) y que $f \in P'$, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \left|e^{-i\mu k^m t} - 1\right| |\widehat{\varphi}(-k)| &\leq C\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+m} |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| \\ &= C\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+m} |\widehat{\varphi}(J)| \ < \ \infty\end{aligned}$$

pues $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{Z})$.
Usando el M-Test de Weierstrass concluimos que la serie H_t converge absoluta y uniformemente. Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} H_t &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k) \underbrace{\lim_{t\to 0}\{e^{-i\mu k^m t} - 1\}}_{=0} \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Así, hemos probado

$$\lim_{t\to 0} < T(t)f, \varphi > = < f, \varphi > \ .$$

□

Teorema 3.3. *Para todo $f \in P'$ fijado y la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ del Teorema 3.2, tenemos que la aplicación*

$$\begin{aligned}\xi \,:\, \mathbb{R} &\longrightarrow P' \\ t &\longrightarrow T(t)f,\end{aligned}$$

es continua en $\mathbb{R}$. Esto es,

$$T(t+h)f \xrightarrow{P'} T(t)f \text{ cuando } h \to 0\,, \ \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{3.33}$$

(es la continuidad en t).
Es decir, (3.33) nos dice que para cada $t \in \mathbb{R}$ fijado, vale

$$< T(t+h)f, \psi > \longrightarrow < T(t)f, \psi >\,, \quad \text{cuando } \ h \to 0\,, \ \forall\, \psi \in P\,.$$

Si $t = 0$, se tiene la continuidad de ξ en 0, que es el item 4) del Teorema 3.2.

Demostración: Sea $t_o \in R - \{0\}$, fijo arbitrario, entonces $g := T(t_0)f \in P'$, usando el item 4) del Teorema 3.2, tenemos que $T(h)g \xrightarrow{P'} g$ cuando $h \to 0$. Esto es,

$$\begin{aligned}&\underbrace{T(h)(T(t_0)f)} \xrightarrow{P'} T(t_0)f \text{ cuando } h \to 0\,, \\ =&\underbrace{[T(h) \circ T(t_0)]f}_{=T(h+t_0)f}\end{aligned}$$

donde usamos el item 3) del Teorema 3.2. □

Observación 3.1. *Los resultados obtenidos en los Teoremas 3.2 y 3.3 también son válidos para la familia de operadores $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, donde para $t \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}S(t) : P' &\longrightarrow P' \\ f \ &\rightarrow \ S(t)f := \left[\left(e^{i\mu k^m t}\widehat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\vee}\,,\end{aligned}$$

y su prueba es similar.

3.3. Versión del Teorema 3.1 usando la Familia $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Mejoramos el enunciado del Teorema 3.1, usando una familia de Operadores débilmente continuos $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ con m un número par no múltiplo de cuatro.

Teorema 3.4. *Sea $f \in P'$ y la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ (considerando m un número par no múltiplo de cuatro) del Teorema 3.2, definiendo $u(t) := T(t)f \in P'$, $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces $u \in C(\mathbb{R}, P')$ es la única solución de (P_m). Además, u depende continuamente de f. Esto es, dados $f_n, f \in P'$ tal que*

$f_n \xrightarrow{P'} f$ implica $u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, donde $u_n(t) := T(t)f_n$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (i.e. u_n es solución de (P_m) con dato inicial f_n).

Demostración: La prueba es análoga a la prueba del Teorema 3.1. □

Corolario 3.2. *Sea $f \in P'$ fijado y la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ del Teorema 3.4, entonces $\exists\, \partial_t T(t)f$, $\forall t \in \mathbb{R}$ y la aplicación*

$$\begin{aligned} :\ & \mathbb{R} \to P' \\ & t \to \partial_t T(t)f = i\mu\partial_x^m T(t)f \end{aligned}$$

es continua en $\mathbb{R}$. Esto es,

$$\partial_t T(t+h)f \xrightarrow{P'} \partial_t T(t)f \ \ \textit{cuando}\ h \to 0\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{3.34}$$

(3.34) nos dice que para cada $t \in \mathbb{R}$ fijado, vale:

$$< \partial_t T(t+h)f, \varphi > \longrightarrow < \partial_t T(t)f, \varphi > \quad \textit{cuando}\ h \to 0\,, \quad \forall \varphi \in P\,.$$

Demostración: En efecto,

$$\begin{aligned} & < \partial_t T(t+h)f, \varphi > - < \partial_t T(t)f, \varphi > \\ & \quad = i\mu\{< \partial_x^m T(t+h)f, \varphi > - < \partial_x^m T(t)f, \varphi >\} \\ & \quad = i\mu\{\underbrace{< T(t+h)f, \varphi^{(m)} > - < T(t)f, \varphi^{(m)} >}_{\longrightarrow 0}\} \ \longrightarrow\ 0 \end{aligned}$$

cuando $h \to 0$, debido al Teorema 3.3 con $\psi := \varphi^{(m)}$. □

Corolario 3.3. *Sea $f \in P'$ fijado y la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ del Teorema 3.4, entonces la solución de (P_m): $u(t) := T(t)f$, $\forall t \in \mathbb{R}$, satisface $u \in C^1(\mathbb{R}, P')$.*

Demostración: Sale como consecuencia del Corolario 3.2. □

Observación 3.2. *Si $m = 2$ entonces el problema (P_2)(conocida ecuación de Schrödinger estudiada en [3], en H^s_{per}) posee existencia y unicidad de solución en P'. Así, también la solución depende continuamente respecto al dato inicial en P'.*

4. Conclusiones. En nuestro estudio de la ecuación de Schrödinger de orden m, en el espacio distribucional periódico P', para el caso homogéneo (P_m) hemos obtenido los siguientes resultados:

1. Probamos la existencia, unicidad y regularidad de solución del problema (P_m) siendo m un número par no múltiplo de cuatro. Así también probamos la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial.
2. Introducimos familias de operadores en P': $\{T_m(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ y probamos que estas son lineales y débilmente continuos en P', siendo $m \in \mathbb{N}$. Además demostramos que forman un grupo de operadores débilmente continuos en P'.
3. Con la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, considerando m un número par no múltiplo de cuatro, mejoramos el Teorema 3.1.
4. Finalmente, debemos indicar que este estudio o técnica introducida puede ser aplicada a otras ecuaciones de evolución en P'.

ORCID and License

Yolanda Santiago Ayala https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

Referencias

[1] Iorio R, Iorio V. Fourier Analysis and partial differential equation. Cambridge University; 2001.

[2] Santiago Y, Rojas S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(2):207-230.

[3] Santiago Y, Rojas S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación de Schrödinger no homogénea en espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(01):37-51.

[4] Santiago Ayala Y. Results on the well posedness of a distributional differential problem. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(02):348-359.