



The Fourier transform in Schwartz space

La transformada de Fourier en el espacio de Schwartz

Carlos Alberto Peña Miranda  and Elizabeth Cosi Cruz 

Received, Aug. 05, 2021

Accepted, Dec. 03, 2021



How to cite this article:

Peña Miranda CA, Cosi Cruz E. *The Fourier transform in Schwartz space*. *Selecciones Matemáticas*. 2021;8(2):423-436. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2021.02.19>

Abstract

The objective of this work is to study some properties and applications of the Schwartz space. Initially, the Fourier transform is used to demonstrate the transform of the derivative and derivative of the transform. Then the completeness of the Schwartz space is studied and some properties are demonstrated. Finally the Fourier inversion formula and Plancherel's theorem are proved.

Keywords . Fubini's theorem, Banach space, Lebesgue integral.

Resumen

El objetivo del presente trabajo es estudiar algunas propiedades y aplicaciones del espacio de Schwartz. Inicialmente, se utiliza la transformada de Fourier para demostrar la transformada de la derivada y derivada de la transformada. Después se estudia la completitud del espacio de Schwartz y se demuestra algunas propiedades. Finalmente se demuestra la Fórmula de inversión de Fourier y el teorema de Plancherel.

Palabras clave. Teorema de Fubini, espacio de Banach, integral de Lebesgue.

1. Introducción. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función dada. Para cada $L > 0$, la serie de Fourier tiene la forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad (1.1)$$

donde $\omega_0 = \frac{\pi}{L}$ y el n -ésimo coeficiente de Fourier c_n está dado por

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Considerando

$$\frac{1}{2L} = \frac{\omega_0}{2\pi} \text{ y } \Delta\omega = n\omega_0 - (n-1)\omega_0 = \omega_0,$$

la expresion (1.1) resulta

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-L}^L f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right\} e^{in\omega_0 t} \Delta\omega.$$

*Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Calle Germán Amézaga N° 375 - Edificio Jorge Basadre, Lima, Perú. (cpenam@unmsm.edu.pe).

†Estudios Generales, Universidad Norbert Wiener, Av. Petit Thouars 2021, Lince, Lima, Perú. (elizabeth.cosi@uwiner.edu.pe).

Reemplazamos $n\omega_0$ por una frecuencia general ω y en el límite $L \rightarrow \infty$, la función no periódica $f(t)$ se convierte en:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right\} e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.2)$$

Para todo t , la integral dentro de las llaves es una función que depende solo de ω que denotamos como $F(\omega)$. Luego, la ecuación (1.2) se puede escribir

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.3)$$

donde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.4)$$

La función $F(\omega)$ se llama *transformada de Fourier* de la función $f(t)$. Simbólicamente podemos escribir

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f)(t).$$

Por otro lado, la ecuación (1.3) permite escribir $f(t)$ en términos de $F(\omega)$, a menudo $f(t)$ se llama *transformada de Fourier inversa* de $F(\omega)$ y lo denotamos escribiendo

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F)(\omega).$$

Al observar la ecuación (1.2), queda claro que el factor $\frac{1}{2\pi}$ es arbitrario en (1.3) y (1.4). Si en lugar de (1.4) definimos

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

entonces (1.3) debe estar escrito

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Una tercera alternativa, más simétrica, es escribir

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

y consecuentemente

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Por último, considerando en (1.4) el cambio de variable $\omega = 2\pi\xi$ obtenemos

$$\mathcal{F}(f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \xi t} f(t) dt.$$

Ésta es la forma que estudiaremos en las siguientes secciones. A diferencia de las series de Fourier, que son principalmente útiles para el estudio de señales periódicas, la transformada de Fourier es una técnica matemática que transforma una función de tiempo, $f(t)$, en una función de frecuencia, $F(\omega)$. Hoy en día, se utilizan en el procesamiento de muchas de las señales que encontramos en nuestra vida cotidiana, como procesamiento digital de imágenes, procesamiento de señales de audio y en particular es una herramienta útil en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales.

Por todo ello, el objetivo del presente artículo es presentar en forma clara y sencilla, algunas propiedades de la transformada de la Fourier en el espacio de Schwartz.

2. La transformada de Fourier. En esta sección definimos la transformada de Fourier en el espacio de funciones integrables y estudiamos sus propiedades básicas.

Definición 2.1. Sea $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformada de Fourier de u , denotada por $\mathcal{F}(u)$ o \hat{u} , es la función

$$\mathcal{F}(u): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C},$$

definida por,

$$\mathcal{F}(u)(x) =: \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(\xi) d\xi, \quad (2.1)$$

donde i es la unidad imaginaria y $x \cdot \xi$ es el producto interno, en \mathbb{R}^n , entre x y ξ .

Observación 2.1. \mathcal{F} está bien definida.

En efecto, Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$|\mathcal{F}(u)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i x \cdot \xi}| |u(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\xi)| d\xi = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Luego, \mathcal{F} está bien definida.

Ejemplo 2.1. Si $u(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, entonces $u \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u)(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x \xi} e^{-|\xi|} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-(2i\pi x - 1)\xi} d\xi + \int_0^{+\infty} e^{-(2i\pi x + 1)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{1 - 2i\pi x} + \frac{1}{1 + 2i\pi x} = \frac{2}{1 + 4\pi^2 x^2}. \end{aligned}$$

Lo cual se puede resumir en la fórmula

$$\mathcal{F}(e^{-|\cdot|})(x) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 x^2} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

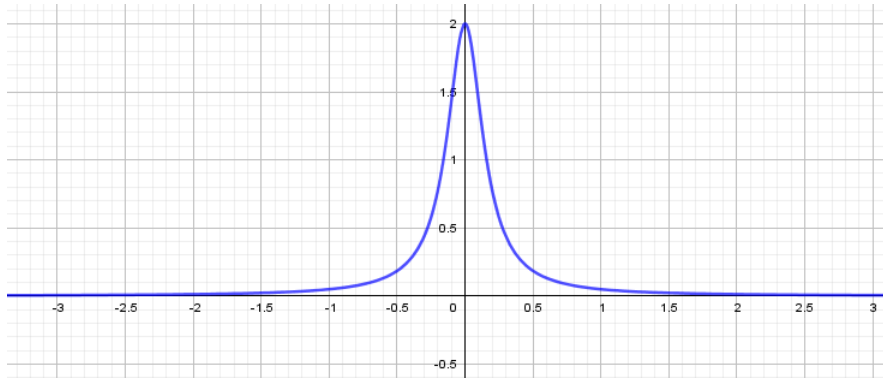


Figura 2.1: Gráfica de la función $\mathcal{F}(e^{-|\cdot|})(x)$.

Ejemplo 2.2. Consideremos la función característica

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1, 1], \\ 0 & \text{si } t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Para $x \neq 0$, la transformada de Fourier de u es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u)(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} u(\xi) d\xi \\ &= \int_{-1}^1 e^{-2\pi i x \xi} d\xi = \left. \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i x} \right]_{\xi=-1}^{\xi=1} \\ &= \frac{e^{2\pi i x} - e^{-2\pi i x}}{2\pi i x}, \end{aligned}$$

usando la fórmula de Euler se obtiene

$$\mathcal{F}(u)(x) = \frac{\text{sen}(2\pi x)}{\pi x} \text{ para todo } x \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}(u)(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(2\pi x)}{\pi x} & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

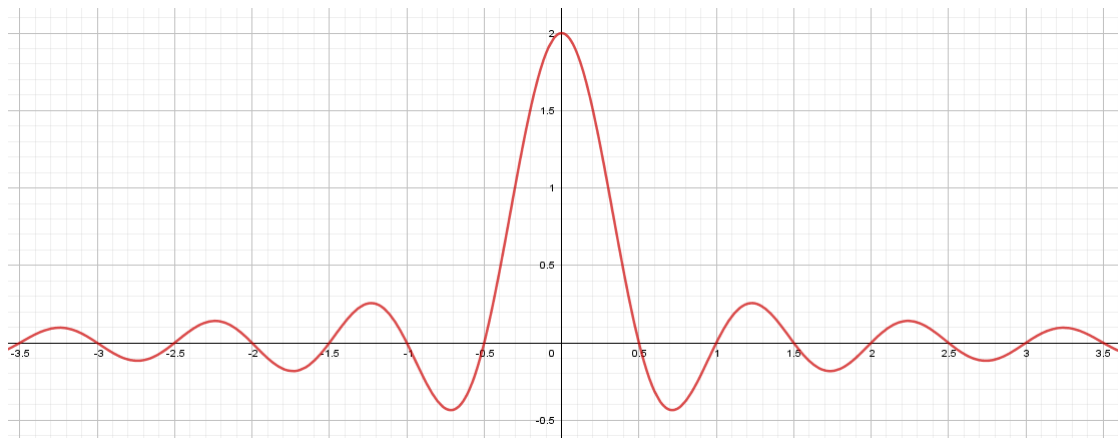


Figura 2.2: Gráfica de la función $\mathcal{F}(u)(x)$.

Proposición 2.1. *La aplicación*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto \mathcal{F}(u), \end{aligned}$$

es una transformación lineal acotada y cumple

$$|\mathcal{F}(u)|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq |u|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Demostración:

a) \mathcal{F} es lineal. Sean $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u + \alpha v)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} (u + \alpha v)(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(\xi) d\xi + \alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} v(\xi) d\xi \\ &= \mathcal{F}(u)(x) + \alpha \mathcal{F}(v)(x) \\ &= (\mathcal{F}(u) + \alpha \mathcal{F}(v))(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}(u + \alpha v) = \mathcal{F}(u) + \alpha \mathcal{F}(v).$$

b) Del la observación 2.1 se tiene que \mathcal{F} es acotado y

$$|\mathcal{F}(u)(x)| \leq |u|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto,

$$|\mathcal{F}(u)|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq |\hat{u}|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Ejemplo 2.3. Dado $a \in \mathbb{R}^+$ se define

$$\delta_a(u)(x) = u(ax).$$

Se cumple

$$\widehat{\delta_a(u)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \delta_a(u)(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(a\xi) d\xi$$

realizando el cambio de variable $s = a\xi$; $d\xi = a^{-n} ds$

$$\begin{aligned} \widehat{\delta_a(u)}(x) &= a^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \left(\frac{s}{a}\right)} u(s) ds \\ &= a^{-n} \delta_{1/a}(\widehat{u})(x). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Proposición 2.2. La transformada de Fourier, \widehat{u} , es continua en \mathbb{R}^n .

Demostración: Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y consideremos una sucesión $(x_\nu)_{\nu \geq 1} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $x_\nu \rightarrow x$. Luego

$$e^{-2\pi i x_\nu \cdot \xi} u(\xi) \rightarrow e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(\xi).$$

Como $|e^{-2\pi i x_\nu \cdot \xi} u(\xi)| = |u(\xi)|$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$ y $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, por el teorema de la convergencia dominada, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x_\nu \cdot \xi} u(\xi) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(\xi) dx,$$

es decir,

$$\widehat{u}(x_\nu) \rightarrow \widehat{u}(x).$$

Por lo tanto, \widehat{u} es continua en \mathbb{R}^n .

La relación entre la transformada de Fourier y la diferenciación se describe en el siguiente resultado.

Proposición 2.3 (Transformada de la derivada). Si u , $\frac{\partial u}{\partial \xi_k} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \xi_k}(x) = 2\pi i x_k \widehat{u}(x).$$

Demostración: Como $\frac{\partial u}{\partial \xi_k} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}(\xi) d\xi \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi_k}(\xi) \right| d\xi < \infty.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \xi_k}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{k-1} d\xi_{k+1} \dots d\xi_n. \end{aligned}$$

Usando el Teorema de Fubini, obtenemos

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \xi_k}(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}(\xi) d\xi_k d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{k-1} d\xi_{k+1} \dots d\xi_n. \quad (2.3)$$

De la última integral resulta

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}(\xi) d\xi_k = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}(\xi) d\xi_k.$$

Por la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}(\xi) dx_k &= 2\pi i x_k \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(\xi) d\xi_k \\ &= 2\pi i x_k \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(\xi) d\xi_k. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Remplazando (2.4) en (2.3) se obtiene

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial u}{\partial \xi_k}}(x) &= 2\pi i x_k \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n \\ &= 2\pi i x_k \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(\xi) d\xi \\ &= 2\pi i x_k \widehat{u}(x). \end{aligned}$$

Proposición 2.4 (Derivada de la transformada). Sea $u, \xi_k u(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ donde ξ_k denota la k -ésima coordenada de ξ . Entonces \widehat{u} es diferenciable con respecto a x_k y

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_k}(x) = -2\pi i \widehat{\xi_k u}(x).$$

Demostración: Consideremos la función

$$g(x, \xi) = e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(\xi),$$

se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(x, \xi) = -2\pi i \xi_k e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(\xi),$$

de donde

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \xi_k} g(x, \xi) \right| \leq 2\pi |\xi_k u(\xi)| \tag{2.5}$$

De (2.5) y hipótesis $\xi_k u(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_k}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(\xi) d\xi \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_k} (e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(\xi)) d\xi \\ &= -2\pi i \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \xi_k u(\xi) d\xi \\ &= -2\pi i \widehat{\xi_k u}(x). \end{aligned}$$

Observación 2.2. Para $n = 1$, de las proposiciones 2.3 y 2.4, resulta

$$\frac{d\widehat{u}}{dt}(x) = 2\pi i x \widehat{u}(x).$$

y

$$\frac{d\widehat{u}}{dx}(x) = -2\pi i t \widehat{u}(x).$$

Una de las funciones más importantes en la teoría de Fourier es la función gaussiana. El siguiente ejemplo demuestra que esta función interactúa muy bien con la transformada de Fourier.

Ejemplo 2.4. Para todo $t \in \mathbb{R}$, la función gaussiana $u(t) = e^{-at^2}$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dt} + 2atu = 0. \tag{2.6}$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación diferencial (2.6), se obtiene

$$2\pi i x \widehat{u}(x) - \frac{2a}{2\pi i} \frac{d\widehat{u}}{dx} = 0.$$

Simplificando

$$\frac{d\widehat{u}}{dx} + \frac{2\pi^2 x}{a} \widehat{u} = 0. \quad (2.7)$$

Las soluciones de la ecuación diferencial (2.7) son

$$\widehat{u}(x) = C e^{-\pi^2 x^2/a}.$$

Para $x = 0$ se tiene

$$C = \widehat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x 0} u(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{-a\xi^2} d\xi.$$

Usando el teorema de Tonelli, podemos escribir

$$C^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2} dy \right) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy.$$

Realizando el cambio de variable $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$

$$C^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^s e^{-ar^2} r dr d\theta = -\frac{\pi}{a} \lim_{s \rightarrow +\infty} (e^{-as^2} - 1) = \frac{\pi}{a}.$$

Por lo tanto,

$$\widehat{u}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 x^2/a} \text{ para todo } a > 0.$$

La siguiente proposición es muy importante. Demuestra que la transformada de Fourier interactúa muy bien con el producto interno L^2 .

Proposición 2.5. Si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \mathcal{F}(v)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(u)(\xi) v(\xi) d\xi.$$

Demostración: Por la proposición 2.1 sabemos que $\mathcal{F}(u), \mathcal{F}(v) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y por la desigualdad de Hölder resulta que $v\mathcal{F}(u), u\mathcal{F}(v) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Luego, usando la expresión (2.1) y el teorema de Fubini podemos escribir directamente

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \mathcal{F}(v)(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} v(\xi) d\xi \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot x} u(x) dx \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(u)(\xi) v(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

3. El espacio de Schwartz. En esta sección estudiamos las propiedades de la transformada de Fourier en el espacio de Schwartz, tal espacio recibió su nombre del matemático Laurent Schwartz, creador de la teoría de distribuciones. Además demostramos la fórmula de inversión de Fourier y el teorema Plancherel.

Por $S(\mathbb{R}^n)$, representamos el espacio de Schwartz o espacio de funciones rápidamente decrecientes, definido por

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha \varphi(x)| < \infty \text{ para todo } \beta, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \right\}.$$

Observación 3.1. El espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, dotado de las operaciones usuales, es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} y tiene una topología natural inducida por la familia de seminormas

$$|\varphi|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha \varphi(x)| \text{ para todo } \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \tag{3.1}$$

Proposición 3.1. La aplicación $d: S(\mathbb{R}^n) \times S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por,

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|\varphi - \psi|_{\alpha,\beta}}{1 + |\varphi - \psi|_{\alpha,\beta}}, \tag{3.2}$$

es una métrica en $S(\mathbb{R}^n)$.

Demostración: Es suficiente verificar la desigualdad triangular (las otras condiciones de métricas son inmediatas). Consideremos la función $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \frac{t}{t+1},$$

se tiene

$$f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0 \text{ para todo } t \geq 0,$$

es decir, f es creciente en el intervalo $[0, +\infty[$.

Por otro lado, para $\varphi, \phi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$|\varphi - \psi|_{\alpha,\beta} \leq |\varphi - \phi|_{\alpha,\beta} + |\psi - \phi|_{\alpha,\beta}.$$

De la monotonía de f , resulta

$$\begin{aligned} \frac{|\varphi - \psi|_{\alpha,\beta}}{1 + |\varphi - \psi|_{\alpha,\beta}} &\leq \frac{|\varphi - \phi|_{\alpha,\beta} + |\psi - \phi|_{\alpha,\beta}}{1 + |\varphi - \phi|_{\alpha,\beta} + |\psi - \phi|_{\alpha,\beta}} \\ &\leq \frac{|\varphi - \phi|_{\alpha,\beta}}{1 + |\varphi - \phi|_{\alpha,\beta}} + \frac{|\psi - \phi|_{\alpha,\beta}}{1 + |\psi - \phi|_{\alpha,\beta}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Usando (3.2) y (3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} d(\varphi, \psi) &= \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|\varphi - \psi|_{\alpha,\beta}}{1 + |\varphi - \psi|_{\alpha,\beta}} \\ &\leq \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \left(\frac{|\varphi - \phi|_{\alpha,\beta}}{1 + |\varphi - \phi|_{\alpha,\beta}} + \frac{|\psi - \phi|_{\alpha,\beta}}{1 + |\psi - \phi|_{\alpha,\beta}} \right) \\ &= \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|\varphi - \phi|_{\alpha,\beta}}{1 + |\varphi - \phi|_{\alpha,\beta}} + \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{|\psi - \phi|_{\alpha,\beta}}{1 + |\psi - \phi|_{\alpha,\beta}} \\ &= d(\varphi, \phi) + d(\phi, \psi), \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración.

Definición 3.1. Una sucesión $(\varphi_k)_{k \geq 1} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ converge a $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_k - \varphi|_{\alpha,\beta} = 0 \text{ para todo } \beta, \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

donde la familia de seminormas $|\cdot|_{\alpha,\beta}$ es definida en (3.1). En este caso, denotamos $\varphi_k \rightarrow \varphi$ en $S(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 3.2. El espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, con la métrica definida en (3.2), es un espacio métrico completo.

Demostración: Sea $(\varphi_k)_{k \geq 1} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ una sucesión de Cauchy, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\varphi_k, \varphi_m) < \varepsilon, \text{ para todo } m, n \geq n_0.$$

De la ecuación (3.2) resulta

$$\sup_{x \in K} |D^\beta(\varphi_k - \varphi_m)| < \varepsilon$$

para todo $\beta \geq 0$ y para todo conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Luego, $(\varphi_k)_{k \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $C^{|\beta|}(K)$. Por lo tanto, existe una función $\varphi \in C^{|\beta|}(K)$ tal que

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ en } C^{|\beta|}(K).$$

Por ello, concluimos que la función $\varphi \in C^\infty(K)$. Solo queda por demostrar que $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Está claro que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} x^\alpha |D^\beta \varphi| &\leq \sup_{x \in K} x^\alpha |D^\beta (\varphi_k - \varphi)| + \sup_{x \in K} x^\alpha |D^\beta \varphi_k| \\ &\leq C_\alpha(K) \sup_{x \in K} |D^\beta (\varphi_k - \varphi)| + \sup_{x \in K} x^\alpha |D^\beta \varphi_k| \end{aligned}$$

tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\sup_{x \in K} x^\alpha |D^\beta \varphi| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} x^\alpha |D^\beta \varphi_k| < \infty$$

La última desigualdad es válida debido a que $(\varphi_k)_{k \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, es decir, $|\varphi_k|_{\alpha, \beta}$ es acotada. Además la última desigualdad tampoco depende de K . Por eso podemos concluir que $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 3.3. Una función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pertenece a $S(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} x^\beta D^\alpha \varphi(x) = 0 \text{ para todo } \beta, \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Demostración: Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, para todo $\beta, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene

$$|x^\beta D^\alpha \varphi(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha \varphi(x)|.$$

Luego

$$|(1 + \|x\|^2)x^\beta D^\alpha \varphi(x)| \leq |x^\beta D^\alpha \varphi(x)| + \sum_{j=1}^n |x^\lambda D^\alpha \varphi(x)| \leq C$$

donde $\lambda = (\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, 2 + \beta_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n)$.

Por lo tanto,

$$|x^\beta D^\alpha \varphi(x)| \leq \frac{C}{1 + \|x\|^2} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

Tomando límite cuando $\|x\| \rightarrow +\infty$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} x^\beta D^\alpha \varphi(x) = 0 \text{ para todo } \beta, \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Recíprocamente, dado $\beta, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$, para $\varepsilon = 1$ por hipótesis existe $M > 0$ tal que

$$|x^\beta D^\alpha \varphi(x)| < 1 \text{ para todo } \|x\| > M. \quad (3.5)$$

Además, la función $f(x) = x^\beta D^\alpha \varphi(x)$ es continua en $[-M, M]$, es decir, existe $C > 0$ tal que

$$|x^\beta D^\alpha \varphi(x)| < C \text{ para todo } \|x\| \leq M. \quad (3.6)$$

De las desigualdades (3.5) y (3.6) se obtiene

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha \varphi(x)| < \max\{1, C\} < \infty.$$

Por lo tanto, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Observación 3.2. La demostración de la proposición 3.3, confirma que si $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces para todo polinomio p se cumple

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} p(x) D^\alpha \varphi(x) = 0 \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Ejemplo 3.1. La función gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$ pertenece a $S(\mathbb{R})$ pues $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ y $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

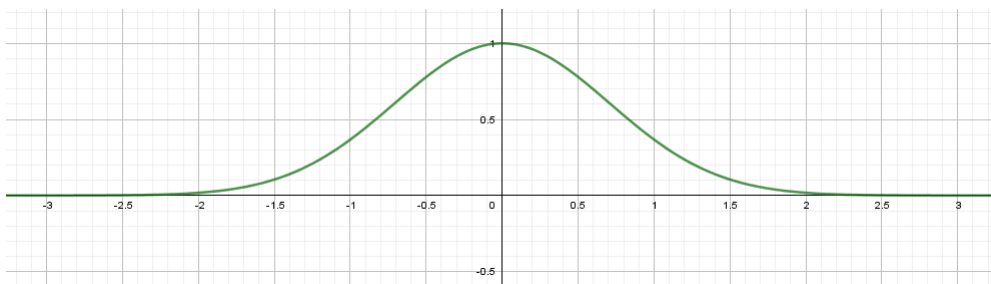


Figura 3.1: Gráfica de la función gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$

Observación 3.3. Se cumple

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq S(\mathbb{R}^n).$$

En efecto, sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto tal que $\text{Sop}(\varphi) \subseteq K$. Consideremos $\rho > 0$ tal que $K \subseteq B(0, \rho)$, luego si $x \in B(0, \rho)$ se tiene

$$D^\alpha \varphi(x) = 0 \text{ para todo } \|x\| > \rho.$$

Luego

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} x^\beta D^\alpha \varphi(x) = 0,$$

por la proposición 3.3 se tiene $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Además $\psi(x) = e^{-|x|/2} \in S(\mathbb{R}^n)$ pues $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$ pero no tiene soporte compacto.

Por lo tanto,

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \neq S(\mathbb{R}^n).$$

Lema 3.1. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$, se cumple

$$(1 + \|x\|^2)^{-m} \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ para todo } mp > \frac{n}{2}.$$

Demostración: Se cumple

$$\int_{\|x\| \leq 1} \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^{mp}} dx < \infty, \tag{3.7}$$

pues el integrando es continuo, luego acotado en la bola cerrada $B[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$ que tiene medida de Lebesgue finita. Ahora

$$\int_{\|x\| > 1} \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^{mp}} dx \leq \int_{\|x\| > 1} \frac{1}{\|x\|^{2mp}} dx.$$

Considerando coordenadas esfericas, en \mathbb{R}^n ,

$$x = r\omega, dx = r^{n-1}d\omega \text{ donde } r \in [0, +\infty[\text{ y } \omega \in S^{n-1} \text{ (esfera unitaria en } \mathbb{R}^n)$$

resulta

$$\begin{aligned} \int_{\|x\| > 1} \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^{mp}} dx &= \int_{S^{n-1}} d\omega \int_1^{+\infty} \frac{1}{\|x\|^{2mp}} dx \\ &\leq c \int_1^{+\infty} r^{n-1} \frac{1}{r^{2mp}} dx, \end{aligned}$$

donde c es la medida de Lebesgue de la esfera unitaria S^{n-1} .

Luego, si $2mp > n$ se obtiene

$$\int_{\|x\| > 1} \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^{mp}} dx < \infty. \tag{3.8}$$

Por lo tanto, de (3.7) y (3.8) se concluye

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^{mp}} dx < \infty,$$

es decir,

$$(1 + \|x\|^2)^{-m} \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ para todo } mp > \frac{n}{2}.$$

Proposición 3.4. Para todo $1 \leq p \leq \infty$ se cumple

$$S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demostración: Sea $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$c_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^k |\varphi(x)| < \infty \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Consideremos un $k > \frac{n}{2p}$, por el lema 3.1

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{-kp} (1 + \|x\|^2)^{kp} |\varphi(x)|^p dx \\ &= c_0^p \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{-kp} dx < \infty. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ahora, considerando $\beta = \alpha = 0$ en la inecuación (3.4) obtenemos

$$|\varphi(x)| \leq \frac{C}{1 + \|x\|^2} < \infty \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.10)$$

De (3.9) y (3.10) concluimos que $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Corolario 3.1. Para todo $1 \leq p \leq \infty$ se cumple

$$S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demostración: Consideremos una sucesión $(\varphi_\nu)_{\nu \geq 1}$ tal que

$$\varphi_\nu \rightarrow 0 \text{ en } S(\mathbb{R}^n). \quad (3.11)$$

De (3.9), se obtiene la desigualdad

$$|\varphi_\nu|_{L^p(\Omega)} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^k |\varphi_\nu(x)| (1 + \|\cdot\|^2)^{-k}|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.12)$$

De (3.11) y (3.12) obtenemos

$$\varphi_\nu \rightarrow 0 \text{ en } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Lo cual concluye la demostración.

Proposición 3.5. Para todo $1 \leq p < \infty$, se cumple

$$S(\mathbb{R}^n) \text{ es denso en } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demostración: De la observación 3.3 y la proposición 3.4 se tiene las inclusiones

$$D(\mathbb{R}^n) \subseteq S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n),$$

entonces

$$\overline{D(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}} \subseteq \overline{S(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}} \subseteq \overline{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}.$$

Por densidad de $D(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ resulta

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq \overline{S(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}} \subseteq L^p(\mathbb{R}^n),$$

luego $\overline{S(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}} = L^p(\mathbb{R}^n)$, es decir, $S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Definición 3.2. La transformada de Fourier de la función $u \in S(\mathbb{R}^n)$, denotada por $\mathcal{F}(u)$ o \widehat{u} , es la función

$$\widehat{u}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(\xi) d\xi.$$

Proposición 3.6 (Relación débil de Parseval). Sea $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{F}(g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(\xi)g(\xi)d\xi. \tag{3.13}$$

Demostración: Sea $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, por el corolario 3.1 se tiene que $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Finalmente por la proposición 2.5 se concluye que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{F}(g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(\xi)g(\xi)d\xi.$$

El siguiente teorema es fundamental para el análisis de Fourier. Permite recuperar la función original a partir de su transformada de Fourier.

Teorema 3.1 (Fórmula de inversión de Fourier). Si $g \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \mathcal{F}(g)(\xi) d\xi. \tag{3.14}$$

Demostración: Para $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$ se define las funciones

$$f_\lambda(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \text{ y } g_\lambda(x) = g\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

De la ecuación (3.13) se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f_\lambda)(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(g)(x)f_\lambda(x)dx,$$

considerando $a = \frac{1}{\lambda}$ en la ecuación (2.2) resulta

$$\lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(\lambda\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(g)(x)f_\lambda(x)dx,$$

En la primera integral, realizando el cambio de variable $y = \lambda\xi$, $dy = \lambda^n D\xi$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(y)g_\lambda(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(g)(x)f_\lambda(x)dx, \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Ahora, como

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g_\lambda(x) = g(0), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(x) = f(0),$$

y $\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \in S(\mathbb{R}^n)$, por el teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(\xi)d\xi = f(0) \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(g)(\xi)d\xi.$$

Por lo tanto,

$$g(0)\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(0) = f(0)\mathcal{F}(\mathcal{F}(g))(0). \tag{3.15}$$

En la ecuación (3.15), considerando la función gaussiana $f(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ resulta

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(g))(0) = g(0) \text{ para todo } g \in S(\mathbb{R}^n).$$

Para recuperar la fórmula de inversión, haremos una traslación en x

$$g(x) = \tau_{-x}(g)(0) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\tau_{-x}(g)))(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\tau_{-x}(g))(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \mathcal{F}(g)(\xi)d\xi.$$

Observación 3.4. La ecuación (3.14) nos da la transformada inversa, \mathcal{F}^{-1} , definida por

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi x \cdot \xi} g(\xi) d\xi.$$

Proposición 3.7 (Relación fuerte de Parseval). Sea $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(\xi) \overline{\mathcal{F}(g)(\xi)} d\xi.$$

Demostración: Como la aplicación $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$ es biyectiva, para $\bar{g} \in S(\mathbb{R}^n)$ existe $h \in S(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{F}(h) = \bar{g}$. De la ecuación (3.13) resulta

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathcal{F}(h)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(\xi) h(\xi) d\xi. \quad (3.16)$$

De la fórmula de inversión de Fourier se obtiene

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi x \cdot \xi} \bar{g}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi x \cdot \xi} g(\xi) d\xi = \overline{\mathcal{F}(g)(x)}. \quad (3.17)$$

De las ecuaciones (3.16) y (3.17) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(\xi) \overline{\mathcal{F}(g)(\xi)} d\xi.$$

Considerando en la proposición 3.7, $f = g \in S(\mathbb{R}^n)$, se obtiene el siguiente corolario

Corolario 3.2. Sea $f \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$|f|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = |\mathcal{F}(f)|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

El siguiente teorema juega un papel central en muchas áreas de EDP y análisis. Demuestra que la transformada de Fourier conserva la norma de funciones L^2 .

Teorema 3.2 (Plancherel). Existe una única biyección isométrica

$$P: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

tal que $P(u) = \widehat{u}$ para todo $u \in S(\mathbb{R}^n)$.

Demostración: Por el corolario 3.2 se tiene que

$$\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n),$$

es continua en la norma $L^2(\mathbb{R}^n)$ y siendo la inclusión

$$S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

continua y densa, entonces, existe un único operador $P: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ que extiende $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$ y está definido por

$$P(f) := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_k) \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n),$$

donde

$$f_k \rightarrow f \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Por el corolario 3.2

$$|P(f)|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\mathcal{F}(f_k)|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = |f|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

lo que demuestra que P es una isometría, por lo tanto es inyectiva.

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, por la proposición 3.5, existe una sucesión $(\varphi_k)_{k \geq 1} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\varphi_k \rightarrow f \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n). \quad (3.18)$$

Siendo la aplicación

$$\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n),$$

un isomorfismo topológico, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un único $\psi_m \in S(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{F}(\psi_m) = \varphi_m$. Por el corolario 3.2 y (3.18) resulta que $(\psi_m)_{m \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Luego, existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\psi_m \rightarrow g \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n).$$

De la continuidad de P resulta

$$P(\psi_m) \rightarrow P(g) \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n),$$

es decir,

$$\varphi_m \rightarrow P(g) \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n). \quad (3.19)$$

De (3.18), (3.19) y unicidad de límite resulta que existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $P(g) = f$, es decir, P es sobreyectiva. Por lo tanto, P es una biyección.

4. Conclusions. Los resultados que involucran la transformada de Fourier en $S(\mathbb{R}^n)$ son validos en $L^2(\mathbb{R}^n)$ ya que $S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ es un operador continuo.

ORCID and License

Carlos Alberto Peña Miranda <https://orcid.org/0000-0002-4339-4615>

Elizabeth Cosi Cruz <https://orcid.org/0000-0002-0255-7705>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Referencias

- [1] Adams RA. Sobolev Spaces. New York: Academic Press; 1975.
- [2] Brezis H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York: Springer; 2011.
- [3] Cavalcanti MM. y Domingos Cavalcanti, V. N. Introdução à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev. Maringá: Departamento de Matemática; 2009.
- [4] Kesavan S. Topics in Functional Analysis and Applications. New Delhi: Willey Easten Limited; 1990.
- [5] Medeiros LA, Milla MH. Espaços de Sobolev. Rio de Janeiro: UFRJ, IM; 2000.