Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2022; Vol. 9(1): 145-149.

Remark on Transitivity for piecewise increassing maps on $\mathbb{R}$

Una nota sobre transitividad de transformaciones crecientes a trozos sobre $\mathbb{R}$

Bladismir Ruiz Leal*, Ambrosio Tineo† and Abdul Lugo‡

Received, May. 08, 2021 *Accepted, Mar. 26, 2022*

How to cite this article:
Ruiz B, Tineo A, Lugo A. *Una nota sobre transitividad de transformaciones crecientes a trozos sobre* $\mathbb{R}$. Selecciones Matemáticas. 2022;9(1):145–149. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2022.01.11

Abstract

In this work a sufficient condition is shown to obtain transitivity in families of piecewise increassing maps with an inevitable discontinuity in $x = 0$. Specifically, it is shown that the characteristics of a large class of transformations of the real line with a discontinuity in $x = 0$ to be transitive (exhibits a dense orbit), they are the following: f has no fixed points, f has a vertical asymptote at $x = 0$ and the preimage of zero is different from empty. In particular, the famous Boole transformation together with some of its parameterizations they exhibit these characteristics. As a particular case, for the family to a parameter of hyperbolas its dynamic behavior is explicitly determined according to the values of the parameter $p > 0$.

Keywords . Transitivity maps, piecewise increassing maps, vertical asymptote.

Resumen

En este trabajo se demuestra una condición suficiente para obtener transitividad en las familias funciones crecientes por partes con una discontinuidad inevitable en $x = 0$. Concretamente, se demuestra que las características de una clase amplia de transformaciones de la recta real con una discontinuidad en $x = 0$, crecientes y continuas para que sean transitivas (poseer una órbita densa), son las siguientes: f no posee puntos fijos, f tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y la preimagen de cero es distinta de vacío. En particular, la famosa transformación de Boole junto a algunas de sus parametrizaciones poseen estas características. Como caso particular, para la familia a un parámetro de hipérbolas, se determina explícitamente su comportamiento dinámico según los valores del parámetro.

Palabras clave. Funciones transitivas, funciones crecientes por partes, asíntota vertical.

1. Introducción. En la década de los ’70s Adler y Weiss [3] demostraron que la transformación de Boole $B(x) = x - \frac{1}{x}$ es ergódica respecto a la medida de Lebesgue. Esto motivó una serie de trabajos relacionados con teoría ergódica infinita, ver [1, 2, 8, 9, 12] y recientemente [4, 5, 6, 13, 14]. Algunos de estos trabajos inclusive consideran parametrizaciones de la transformación de Boole de la siguiente forma:

$$B(x) = \epsilon x - \frac{\beta}{x} \quad \text{y} \qquad B(x) = \epsilon x + a - \frac{\beta}{x-b}.$$

Para algunos valores puntuales de los parámetros se mostró que estas transformaciones preservan una medida absolutamente continua respecto a la de Lebesgue pero, ninguno de esos trabajos describe el comportamiento dinámico topológico, justo en esta dirección, los trabajos de Muñoz [10, 11], considera una teoría sobre sistemas alternantes crecientes que incluye esas parametrizaciones de la transformación de Boole

*Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Técnica de Manabí, Av. Urbina y Che Guevara, Portoviejo - Ecuador. (*luis.ruiz@utm.edu.ec*).
†Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Técnica de Manabí, Av. Urbina y Che Guevara, Portoviejo - Ecuador. (*ambrosiotineo@gmail.com*).
‡Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, Recinto Félix Evaristo Mejía. Santo Domingo - República Dominicana. (*abdul.lugo@isfodosu.edu.do*).

como caso particular y muestra condiciones necesarias y suficientes para obtener transitividad. Específicamente considera funciones $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, satisfaciendo:

(1a) f es creciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

(1b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

(1c) $f(x) - x \neq 0, \qquad \forall x \neq 0$.

llamados *sistemas alternante creciente*. Para esta clase de familias de funciones con un punto de discontinuidad no evitable en $x = 0$ demuestra:

Teorema 1.1 ([10, 11]). *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un sistema alternante creciente. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(0)$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces f es transitiva.*

En una dirección parecida a esta, en [7] demuestran que la condición $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, no es necesaria para obtener transitividad. Esa condición puede ser reemplazada por otra. Concretamente demostraron:

Teorema 1.2 ([7]). *Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ un sistema alternante creciente. Además, suponga que existen $x_0 < 0$ y $x_1 > 0$ talque $f^{-1}(0) = \{x_0, x_1\}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = x_0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = x_1$. Entonces f es transitiva si, y sólo si, $\bigcup\limits_{n\geq 0} f^{-n}(0)$ es denso en $\mathbb{R}$.*

Observe que las condiciones 1a), 1b) y 1c) de sistema alternante creciente impuesta para f en este resultado son las misma para el Teorema 1 pero, las condiciones para $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ son muy diferentes. Ambas condiciones son suficientes pero no necesarias para obtener transitividad. Por tanto, una pregunta natural es: ¿Cuál es el conjunto de las transformaciones $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y crecientes donde viven las transitivas? En este trabajo se da una respuesta positiva a esta interrogante,

Teorema 1.3 (Principal). Considere $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y creciente. Si f es transitiva entonces, f es un sistema alternante creciente y $f^{-1}(0) \neq \emptyset$.

Además, del resultado principal también se demuestra en este trabajo como es exactamente el comportamiento asintótico de las órbitas para el caso en que $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ satisface las condiciones 1a) y 1b). Finalmente, se da un ejemplo de aplicación para una familia de hipérbolas a un parámetro $p > 0$, de la forma:

$$f_p(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^p} & \text{si,} \quad x > 0 \\ \\ \dfrac{1}{(-x)^p} & \text{si,} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Observe que las condiciones del Teorema 1.1 o del Teorema 1.2 hacen que $f^{-1}(0) \neq \emptyset$. Note que el resultado no indica que el conjunto de transformaciones $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ crecientes y transitivas es mucho más amplio del estudiado hasta el momento, por ejemplo, puede haber transformaciones transitivas para aplicaciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen las condiciones 1a), 1b), 1c), $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe.

Es importante hacer notar que, identificar el espacio de transformaciones donde se puede obtener transitividad es valioso ya que esta propiedad es un ingrediente fundamental en el estudio de transformaciones caóticas.

2. Prueba de los resultados. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ un sistema alternante creciente. Notación $A_f = \bigcup\limits_{n\geq 0} f^{-n}(0) \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_f = \mathbb{R} \setminus A_f$. f es transitiva si existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}_f$ tal que su órbita $O^+(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \cdots\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Lema 2.1. *Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua satisfaciendo condiciones 1a), 1b) y 1c). Si $f^{-1}(0) = \emptyset$ entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$, sucede una de las siguiente condiciones*

(a) $\omega(x)$ es una órbita periódica de período dos

(b) $\omega(x) = \{0\}$.

Demostración: Sea $x \in \mathbb{R}$, consideremos $x > 0$. El caso $x < 0$ es completamente análogo. Ahora, por 1.a, 1.b y el hecho que $f^{-1}(0) = \emptyset$ se tiene que, $f^n(x) \cdot f^{n+1}(x) < 0$ para todo $n \geq 1$ y para todo $x \in \mathbb{R}_f$, para una idea geométrica ver figura 2.1.

Caso 1: Supongamos que $f^2(x) > x > 0$ como f es creciente, $f^3(x) > f(x)$ y $f^3(x) < 0$ luego $f^4(x) > f^2(x) > x > 0$, nuevamente aplicando f sucesivamente tenemos que $f^{2n+2}(x) > f^{2n}(x) > 0$ y $f^{2n+1}(x) < f^{2n+3} < 0$ son sucesiones crecientes y $\{f^{2n+1}(x)\}$ está acotada superiormente por 0 entonces, existe $y_0 \leq 0$ tal que $f^{2n+1}(x) \longrightarrow y_0$ cuando $n \to +\infty$. Si $y_0 < 0$, como f es continua y por unicidad del límite entonces, $f^2(y_0) = y_0$. Así, $f^n(x)$ converge a una órbita periódica de período 2, es decir, $\omega(x) = \{y_0,\ f(y_0)\}$. Ahora, supongamos que $y_0 = 0,\ f^{2n+1}(x) \to 0$ entonces, $f^{2n}(x) \to +\infty$, cuando $n \to +\infty$, ya que $f^{2n}(x)$ es una sucesión creciente por lo tanto si $f^{2n}(x) \to y_1$, cuando $n \to +\infty$ para algún $y_1 > 0$, igual que antes $f^{2n+1}(x) \longrightarrow f(y_1) < 0$ y por unicidad del límite $f(y_1) = 0$ contradicción. Por lo tanto concluimos que $f^{2n+1} \to 0$ si, y sólo si, $f^{2n}(x) \to +\infty$. De esto, $\omega(x) = \{0\}$.

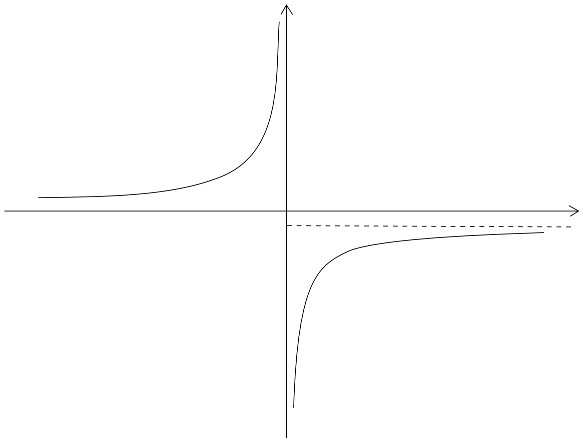

Figura 2.1: caso $f^{-1}(0) = \emptyset$.

Caso 2: Supongamos que $f^2(x) < x$, como $f^2(x) > 0$, aplicamos f y tenemos que $f^3(x) < f(x) < 0$, aplicando f nuevamente, $f^4(x) < f^2(x)$ y $f^4(x) > 0$. Así sucesivamente $0 < f^{2n+1}(x) < f^{2n+3}(x)$ y $x > f^{2n}(x) > f^{2n+2}(x) > 0$ para todo $n \geq 0$, son sucesiones decrecientes y $\{f^{2n}(x)\}$ es una sucesión acotada inferiormente por 0. En consecuencia, existe $y_0 \geq 0$ tal que $f^{2n}(x) \to y_0$, cuando $n \to +\infty$. Si $y_0 > 0$, $f^n(x)$ converge a la órbita periódica $\{y_0,\ f(y_0)\}$ de periodo 2, es decir, $\omega(x) = \{y_0,\ f(y_0)\}$. Si $y_0 = 0$, tenemos que $f^{2n+1}(x) \to -\infty$ y $f^{2n} \to 0$, cuando $n \to +\infty$. Por lo tanto $\omega(x) = \{0\}$. □

De la demostración del lema se puede determinar exactamente el comportamiento de la órbita cuando $\omega(x) = \{0\}$.

Corolario 2.1. *Sea $f : \mathbb{R}\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua satisfaciendo condiciones 1a), 1b) y 1c). Si $f^{-1}(0) = \emptyset$ y $\omega(x) = 0$ para algún $x \neq 0$ entonces, sucede una de los dos casos:*

1. *$f^{2n}(x) \longrightarrow 0$ y $|f^{2n+1}(x)| \longrightarrow +\infty$, cuando $n \to +\infty$;*
2. *$f^{2n+1}(x) \longrightarrow 0$ y $|f^{2n}(x)| \longrightarrow +\infty$, cuando $n \to +\infty$.*

Demostración: (Teorema Principal.) Para ver que f es un sistema alternante creciente debemos ver 1b) y 1c). Note que 1a) se tiene por hipótesis.

Veamos 1c): Para ello supongamos que existe $x \neq 0$ tal que $f(x) = x$ entonces, como f es creciente se tiene que, $f((-\infty,\ x]) \subset (-\infty,\ x]$ si $x < 0$ ó $f([x,\ +\infty)) \subset [x,\ +\infty)$ si $x > 0$; en cualquiera de los dos casos, tenemos que f no puede ser transitiva, contradicción. Así, 1c) es válido.

Veamos 1b): supongamos que no es válido. Entonces existen $y_+ > 0$ o $y_- < 0$ tal que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = y_-$ o $lim_{x\to 0^-} f(x) = y_+$, en cualquiera de los 2 casos tendremos que $f((-\infty,\ y_+)) \subset (-\infty,\ y_+)$ o $f((y_-,\ +\infty)) \subset (y_-,\ +\infty)$. Lo que muestra que, en cualquier caso, f no es transitiva.

Ya se demostró que f es un sistema alternante creciente. Ahora, por el lema 2.1 se tiene que $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ con lo que se prueba el teorema principal. □

Ejemplo 2.1. *Considere la familia de difeomorfismos de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a un parámetro*

$$f_p(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^p} & \textit{si}, \quad x > 0 \\ \\ \dfrac{1}{(-x)^p} & \textit{si}, \quad x < 0 \end{cases},$$

para $p > 0$. Ver figura 2.2. Observe que, el punto $x = 1$ es un punto periódico de periodo 2.

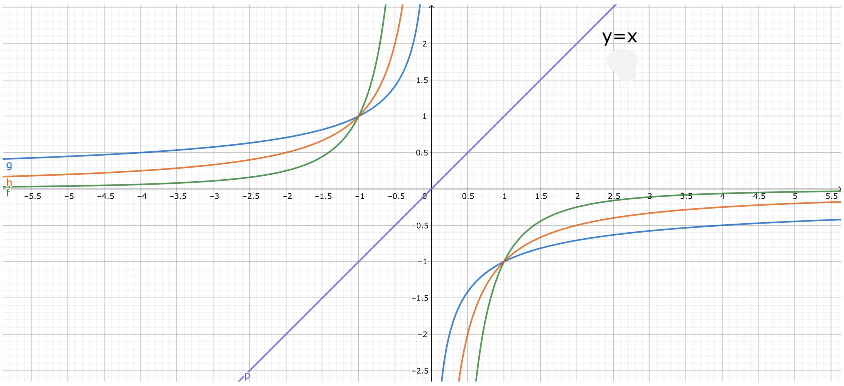

Figura 2.2: Gráfica de f_p. Azul: $p = \dfrac{1}{2}$; rojo: $p = 1$ y verde: $p = 2$.

Caso 1, $0 < p < 1$. El punto $x = 1$ es un periódico atractor global para f_p. Veamos esto en las siguientes afirmaciones:

1. *si $x > 0$ se tiene que, $f_p^{2n}(x) = x^{p^{2n}} \to 1$ y $f_p^{2n+1}(x) = -\dfrac{1}{x^{p^{2n+1}}} \to -1$, cuando $n \to +\infty$;*
2. *si $x < 0$ se tiene que, $f_p^{2n}(x) = -(-x)^{p^{2n}} \to -1$ y $f_p^{2n+1}(x) = \dfrac{1}{(-x)^{p^{2n+1}}} \to 1$, cuando $n \to +\infty$.*

Caso 2, $p > 1$. En este caso $\omega(x) = \{0\}$ si $x \neq 0$ y $x \neq 1$. En efecto,

1. *si $0 < x < 1$ se tiene que, $f_p^{2n}(x) = x^{p^{2n}} \to 0$ y $f_p^{2n+1}(x) = -\dfrac{1}{x^{p^{2n+1}}} \to -\infty$, cuando $n \to +\infty$;*
2. *si $x > 1$ se tiene que, $f_p^{2n}(x) = x^{p^{2n}} \to +\infty$ y $f_p^{2n+1}(x) = -\dfrac{1}{x^{p^{2n+1}}} \to 0$, cuando $n \to +\infty$;*
3. *si $-1 < x < 0$ se tiene que, $f_p^{2n}(x) = -(-x)^{p^{2n}} \to 0$ y $f_p^{2n+1}(x) = \dfrac{1}{(-x)^{p^{2n+1}}} \to +\infty$, cuando $n \to +\infty$;*
4. *si $x < -1$ se tiene que, $f_p^{2n}(x) = -(-x)^{p^{2n}} \to -\infty$ y $f_p^{2n+1}(x) = \dfrac{1}{(-x)^{p^{2n+1}}} \to 0$, cuando $n \to +\infty$.*

Caso 3, $p = 1$. Todos los puntos $x \neq 0$ son puntos periódicos de periodo dos.

3. Conclusiones.

1. Podemos observar que las diferentes hipótesis impuestas a los sistemas alternantes crecientes en los artículos [10, 11] correspondiente al Teorema 1.1 y al artículo[7] correspondiente al Teorema 1.2 implican la condición $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ ya que, en el caso del Teorema 1, el hecho que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ implica que $f_+^{-n}(0)$ existen para todo $n \geq 1$ y en el caso del Teorema 2, $f_+^{-2}(0) = \emptyset$ y $f_+^{-1}(0) \neq \emptyset$, donde $f_+ = f|_{(0,+\infty)}$.

2. En el caso del lema 2.1 se tiene una descripción de la dinámica en términos de ω-límite para transformaciones $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen de sistema alternante creciente y $f^{-1}(0) = \emptyset$. La descripción inclusive incluye el caso en que $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un homeomorfismo creciente.

3. En el lema 2.1, el hecho que $\omega(x) = \{0\}$ para un conjunto abierto de puntos $x \neq 0$, no significa que dicho punto es atractor. Ver también el Ejemplo 2.1. Recuerde que esto es posible por el hecho que f tiene una discontinuidad inevitable en $x = 0$.

ORCID and License

Bladismir Ruiz Leal https://orcid.org/0000-0002-7737-3847

Ambrosio Tineo https://orcid.org/0000-0002-2060-8860
Abdul Lugo https://orcid.org/0000-0002-7667-1260

Referencias

[1] Aaronson J. The eigenvalues of non-singular transformations, Israel J. Math. 1983; 45:297-312. https://doi.org/10.1007/BF02804014

[2] Aaronson J. An Introduction to Infinite Ergodic Theory. Mathematical Surveys and Monographs of the Amer. Math. Soc., Vol 50. 1997.

[3] Adler R, Weiss B. The ergodic infinite measure preserving transformation of Boole, Israel J. Math. 1973; 16:263-278. https://link.springer.com/article/10.1007/BF02756706

[4] Bayless RL. Ergodic Properties of Rational Functions that Preserve Lebesgue Measure on $\mathbb{R}$. Real Analysis Exchange. 2018; Vol. 43(1):137-153. https://doi.org/10.14321/realanalexch.43.1.0137.

[5] Blackmore D, Golenia J, Prykarpatsky AK, et al. Invariant measures for discrete dynamical systems and ergodic properties of generalized Boole-type transformations. Ukr Math J. 2013; 65:47. https://doi.org/10.1007/s11253-013-0764-z

[6] Bonanno C, Giulietti P, Lenci M. Global-local mixing for the Boole map, Chaos, Solitons & Fractals. 2018; 111:55-61. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.03.020

[7] Leal B, Mata G, Muñoz S. Families of Transitive Maps on $\mathbb{R}$ With Horizontal Asymptotes. Rev. de la Unión Matemática Argentina (REVUMA). 2018; 58(2):375-387. http://www.inmabb.criba.edu.ar/revuma/pdf/v59n2/v59n2a08.pdf

[8] Letac G. Which Functions Preserve Cauchy Laws?. Proc. Amer. Math. Soc.1977; 67(2):277–286. https://www.jstor.org/stable/2041287

[9] Li T, Schweiger F. The Generalized Boole's Transformation is ergodic, Manuscripta Math. 1971; 25:161-167. https://doi.org/10.1007/BF01168607

[10] Muñoz S. Robust transitivity and ergodicity of transformations of the real line and the real plane[PhD Thesis], IMPA; 2006. Available at https://preprint.impa.br/visualizar?id=5651

[11] Muñoz S. Robust transitivity of maps of the real line. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A. 2015; 35(3):1163-1177. avilable at http://aimsciences.org//article/id/807e52c6-a741-470c-b708-1cd668ecc7cb

[12] Neuwirth JH. Ergodicity of some mapping of the circle and the line. Israel J. Math. 1978; 31:359-367.

[13] Prykarpatsky AK, Feldman J. On the ergodic and spectral properties of generalied Boole transformations. I. Miskolc Math. Notes. 2006; 7(1):91-99. http://real.mtak.hu/87439/1/128.pdf

[14] Umento K, Okubo K. Exact Lyapunov exponents of the generalized Boole transformations. Prog. Theor. Exp. Phys. 2016; 021A01. https://doi.org/10.1093/ptep/ptv195