



## Una revisión a las propiedades y familia de expansores en grafos de Cayley

### A review of Cayley graph properties and expander family

Christian Cortes G. 

Received, Oct. 13, 2020

Accepted, Dec. 07, 2020



#### How to cite this article:

Cortes GC. Una revisión a las propiedades y familia de expansores en grafos de Cayley. *Selecciones Matemáticas*. 2020;7(2):323–339. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.02.14>

#### Resumen

*En este trabajo se introducen algunos conceptos usados en teoría de grafos, tales como grafos dirigidos, no dirigidos, conexos, arboles, regulares u operadores gradientes, divergentes o laplacianos, y relaciones existentes entre el diámetro del grafo, o el valor segundo propio más grande de su matriz de adyacencia, respecto a la constante de Cheeger para identificar grafos expansores  $k$ -regulares. Con esos lineamientos definidos, se introducen algunas propiedades en grafos de Cayley, con ejemplos ilustrativos, y metodologías para identificar si el grafo correspondiente es  $k$ -regular o un árbol dirigido. Finalmente, se relacionan grafos expansores de Cayley con su diámetro o el segundo valor propio más grande.*

**Palabras clave.** Conjunto generador, constante isoperimétrica, grafo vértice transitivo, grupo, grupo libre.

#### Abstract

*In this paper some concepts used in graph theory are introduced, such as directed, undirected, connected, tree, regular or gradient, divergent or Laplacian graphs, and relationships between the diameter of the graph, or the largest second proper value of its adjacency matrix, with respect to the Cheeger constant to identify expander graphs  $k$ -regular. With these guidelines defined, some properties are introduced in Cayley graphs, with illustrative examples, and methodologies to identify if the corresponding graph is  $k$ -regular or a directed tree. Finally, Cayley expander graphs are related to their diameter or the second largest eigenvalue.*

**Keywords .** Generator set, isoperimetric constant, transitive vertex graph, group, free group.

**1. Introducción.** Uno de los objetivos importantes de la matemática es representar, con un lenguaje formal, diversos fenómenos que afectan el diario vivir. En este caso, la teoría de grafos es usada como base para representar diversos problemas sociales, biológicos y científicos. La teoría de grafos estudia las propiedades de los grafos. Un grafo es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices y una selección de pares de vértices, llamadas aristas, que pueden ser orientados o no. Típicamente, un grafo es representado mediante una serie de puntos conectados por líneas.

Una fuente natural de grafos viene dada por los grafos de Cayley. Los grafos de Cayley pueden ser contruidos a partir de un grupo  $(G, \circ)$  y de un subconjunto  $\Gamma \subset G$  con ciertas propiedades [1]. El uso de tales grafos para el análisis y representación gráfica de grupos finitos fue popularizado por Cayley a finales del siglo XIX.

Por otro lado, un expansor es una familia de grafos con vértices muy bien conectados pero poco denso, es decir con pocas aristas, y que han sido una gran importancia en Teoría de la Computación, ya que minimiza el tiempo de transmisión de un nodo a otro [2]. El estudio de grafos con buenas propiedades de conexión ha sido motivados, por ejemplo, como el diseño de redes que puedan conectar muchos conjuntos

\*Departamento de matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid - España. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Surcolombiana, Neiva, Colombia (chcortes@math.uc3m.es; christian.cortes@usco.edu.co).

diferentes de usuarios con un número pequeño de conexiones. En particular, su estudio es centrado a los grafos regulares, ya que un grafo muy grande con bajo grado y sus aristas son muy escasas.

Por consiguiente, en este trabajo se presentan varias metodologías para determinar si una familia de grafos de Cayley son expansores, además de introducir algunas propiedades para determinar la representación gráfica de dicho grafo. Para ello, en la segunda sección se introducen algunas nociones básicas de teoría de grafos y resultados importantes para grafos  $k$ -regulares. En la tercera sección se muestran varias metodologías para identificar familia expansoras en grafos  $k$ -regulares. En la cuarta sección se muestra la construcción de grafos de Cayley y propiedades básicas para identificar su forma. En la quinta sección, se presentan una continuación a las metodologías presentadas en la tercera sección aplicado la familia expansoras en grafos de Cayley.

**2. Elementos de un grafo.** Un **grafo** es un par  $X = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto llamado vértices y  $E$  es un conjunto de aristas que relacionan dos elementos de  $V$ . Los elementos de  $E$  son de la forma  $(x, y)$ , donde  $x, y \in V$  con  $x \neq y$ , lo cual forman una arista con  $x$  su vértice inicial e  $y$  su vértice final. Una arista de la forma  $(x, x)$ , denotado por  $(x)$ , se llama **bucle**.

Si  $E$  es un conjunto de pares no ordenados de elementos de  $V$ , esto es, de la forma  $(x, y)$  tal que  $(x, y) = (y, x)$ , se dice que  $X = (V, E)$  es un **grafo no dirigido**. Caso contrario, se dice que  $X = (V, E)$  es un **grafo dirigido** o **digrafo**. En la Figura 2.1 se observan algunos ejemplos de grafos no dirigidos, donde  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $E_1 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 5)\}$  para el grafo  $X_1$ ,  $E_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5)\}$  para el grafo  $X_2$  y,  $E_3 = \{(1, 5), (5, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$  para el grafo  $X_3$ .

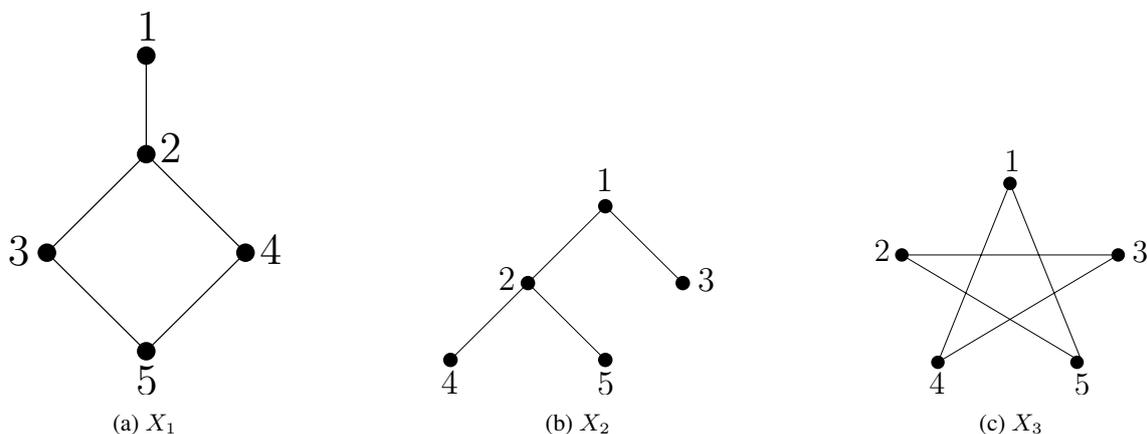


Figura 2.1: Ejemplos de grafos no dirigidos.

El **orden del grafo**  $|X|$  es el número  $|V|$  de sus vértices. Si  $\alpha = (x, y) \in E$ , entonces  $\alpha$  une los vértices  $x$  e  $y$ . En la Figura 2.1 se observa que el orden de  $X_1, X_2$  y  $X_3$  es cinco ya que  $|V| = 5$ .

Por otro lado, un **camino** en  $X = (V, E)$  es una sucesión  $P$  de vértices  $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$  tal que  $(x_i, x_{i+1}) \in E$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n - 1, n$ . Si  $x = y$ ,  $P$  es un camino cerrado de  $X = (V, E)$ . Si  $x = y$  y  $x_i \neq x_{i+1}$ , entonces  $P$  es un **ciclo**. El grafo  $X$  es **conexo** si para cada par de vértices arbitrarios  $x, y \in V$  existe un camino  $P$  que une a  $x$  e  $y$ . Por ejemplo, el grafo de la Figura 2.1c,  $P_1 = (1, 4, 3)$  y  $P_2 = (1, 5, 2, 3)$  son caminos que unen a los vértices 1 y 3 de longitudes 2 y 3 respectivamente. El conjunto  $P_3 = (1, 4, 3, 2, 5, 1)$  es un camino cerrado, más aún, es un ciclo. Un **árbol** es un grafo conexo que no tiene ciclos como lo observado en la Figura 2.1b.

El **grado de un vértice**  $x \in V$  es el número de aristas que contienen a  $x$ . Un grafo es **regular** si cada vértice tiene el mismo grado. Si  $k$  es el grado común, entonces el grafo es  $k$ -regular.

Dado  $x, y \in V$ , la **distancia entre  $x$  e  $y$** , denotada por  $\text{dist}(x, y)$ , es la longitud mínima de cualquier camino entre  $x$  e  $y$ . El **diámetro** de  $X$  viene dado por  $\text{diam}(X) = \max_{x, y \in V} \text{dist}(x, y)$ .

A continuación se define la **matriz de adyacencia** de un grafo.

**Definición 2.1.** Sea  $X$  un grafo con un orden de sus vértices dado por  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Entonces la matriz de adyacencia para  $X$  es la matriz  $A$ , donde  $A_{i,j}$  es el número de aristas que inciden tanto en  $x_i$  como en  $x_j$ . Si  $x$  e  $y$  son vértices de  $X$ ,  $A_{x,y}$  es el número de aristas que inciden en  $x$  e  $y$ .

Por ejemplo, la matriz de adyacencia del grafo  $X_1$  dado en la Figura 2.1a es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De igual forma, una **función propia** para una matriz de adyacencia  $A$  definida en algún espacio funcional es cualquier función  $f$  distinta de cero en ese espacio que, cuando actúa sobre  $A$ , solo se multiplica por algún factor escalar  $\lambda$  llamado **valor propio**, esto es,  $Af = \lambda f$ .

Al definir  $L^2(V) = \{f : V \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{x \in V} |f(x)|^2 < \infty\}$ , o  $L^2(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{e \in E} |f(e)|^2 < \infty\}$ , la matriz de adyacencia  $A$  para un grafo  $k$ -regular, con  $|V| = n$ , cumple que  $\sum_{y \in V} A_{x,y} = k$  para todo  $x \in V$ . Luego, para un función propia  $f_0(x) = 1 \in L^2(V)$  es valido que

$$(Af_0)(x) = \sum_{y \in V} A_{x,y} f_0(y) = \sum_{y \in V} A_{x,y} = k = k f_0(x),$$

así  $k$  es un valor propio de  $A$ .

Además, si  $\lambda$  es cualquier otro valor propio de  $A$  y  $f \in L^2(V)$  una función propia de valor real de  $A$  asociada con  $\lambda$ , con  $0 \neq |f(x)| = \max_{y \in V} |f(y)|$  para algún  $x \in V$ , entonces

$$|\lambda| |f(x)| = |(Af)(x)| = \left| \sum_{y \in V} A_{x,y} f(y) \right| \leq |f(x)| \sum_{y \in V} |A_{x,y}| = k |f(x)|,$$

esto es,  $|\lambda| \leq k$ . Por tanto se ha verificado el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.** Si  $X = (V, E)$  es un grafo  $k$ -regular con  $n$  vértices, entonces  $k$  es el valor propio mas grande asociado a la matriz de adyacencia de  $X$ .

Por otro lado, para cada arista  $e \in E$  en un grafo  $X = (V, E)$ , considere  $e^+$  como el vértice final de  $e$  y  $e^-$  como su vértice inicial. Luego, el **operador gradiente**  $d : L^2(V) \rightarrow L^2(E)$  se define como

$$(df)(e) = f(e^+) - f(e^-),$$

y su **operador divergente**  $d^* = L^2(E) \rightarrow L^2(V)$  es dado por

$$(d^* f)(x) = \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^+}} f(e) - \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^-}} f(e).$$

De esta forma, se define el **operador laplaciano**  $\Delta : L^2(V) \rightarrow L^2(V)$  como  $\Delta = d^* d$ .

El siguiente resultado establece una manera de calcular el laplaciano en un grafo  $k$ -regular.

**Lema 2.1 (Lema 1.58, [3]).** Si  $X = (V, E)$  es un grafo  $k$ -regular, entonces  $\Delta = kI - A$ .

*Demostración:* Sea  $f \in L^2(V)$  y  $x \in V$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 (\Delta f)(x) &= (d^* df)(x) = \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^+}} (df)(e) - \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^-}} (df)(e) \\
 &= \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^+}} [f(e^+) - f(e^-)] - \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^-}} [f(e^+) - f(e^-)] \\
 &= \left( \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^+}} f(x) - \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^+ \\ y = e^-}} f(y) \right) - \left( \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^-}} f(y) - \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^+}} f(x) \right) \\
 &= \left( \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^+}} f(x) + \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^-}} f(x) \right) - \left( \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^+ \\ y = e^-}} f(y) + \sum_{\substack{e \in E \\ x = e^- \\ y = e^+}} f(y) \right) \\
 &= kf(x) - \sum_{y \in V} A_{x,y} f(y) = ((dI - A)f)(x),
 \end{aligned}$$

y así  $\Delta = kI - A$ .

Por otro lado, un **automorfismo de un grafo**  $X = (V, E)$ , denotado por  $\text{Aut}(X)$ , es cualquier isomorfismo de  $X$  con  $X$ , es decir, cualquier biyección  $f : V \rightarrow V$  tal que  $(x, y) \in E$  si, y solo si,  $(f(x), f(y)) \in E$ .

Se dice que un grafo  $X = (V, E)$  es **vértice transitivo** si para cualquier par de vértices  $x, y \in V$ , existe un automorfismo  $f : V \rightarrow V$  de  $X$  con  $f(x) = y$ . De forma similar,  $X$  es **rama transitivo** si para cualquier par de ramas  $a, b \in E$ , existe un automorfismo  $f : V \rightarrow V$  de  $X$  con  $f(a) = b$ .

**3. Grafos expansores  $k$ -regulares.** Considere un grafo  $X = (V, E)$  con  $|V| = n$ . Se definen los valores propios de su matriz de adyacencia como  $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$ .

Dado que el primer valor propio de un grafo  $k$ -regular es  $\lambda_1(X) = k$ , como lo observado en la Proposición 2.1, una sucesión  $(X_n)$  de grafos  $k$ -regulares conforman una familia expansora si la sucesión  $(k - \lambda_2(X_n))$  está limitada por una constante diferente cero.

**Definición 3.1.** Sea  $X$  un conjunto finito y  $f_0(x) = 1$  para todo  $x \in X$ . Defina

$$L^2(X, \mathbb{C}) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{x \in X} |f(x)|^2 < \infty \right\},$$

y

$$L_0^2(X, \mathbb{C}) = \{ f \in L^2(X, \mathbb{C}) : \langle f, f_0 \rangle_2 = 0 \} = \left\{ f \in L^2(X, \mathbb{C}) : \sum_{x \in X} f(x) = 0 \right\},$$

donde

$$\langle f, g \rangle_2 = \sum_{x \in X} f(x) \overline{g(x)},$$

para todo  $f, g \in L^2(X, \mathbb{C})$ .

El siguiente resultado determina una forma de calcular el segundo valor propio  $\lambda_2(X)$  para un grafo  $k$ -regular.

**Proposición 3.1 (Proposición 1.82, [3]).** Sea  $X = (V, E)$  un grafo  $k$ -regular. Entonces

$$\lambda_2(X) = \max_{f \in L_0^2(V, \mathbb{R})} \frac{\langle Af, f \rangle_2}{\|f\|_2^2} = \max_{\substack{f \in L_0^2(V, \mathbb{R}) \\ \|f\|_2 = 1}} \langle Af, f \rangle_2.$$

Equivalente,

$$k - \lambda_2(X) = \min_{f \in L_0^2(V, \mathbb{R})} \frac{\langle \Delta f, f \rangle_2}{\|f\|_2^2} = \min_{\substack{f \in L_0^2(V, \mathbb{R}) \\ \|f\|_2 = 1}} \langle \Delta f, f \rangle_2.$$

*Demostración:* Considere una base ortonormal  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  para  $L^2(V, \mathbb{R})$ , de modo que cada  $f_i$  es una función propia de valor real de  $A$  asociada con el valor propio  $\lambda_i = \lambda_i(X)$ , con  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , esto es,  $Af_i = \lambda_i f_i$ .

Sea  $f \in L_0^2(V, \mathbb{R})$  arbitraria con  $\|f\|_2 = 1$ . Entonces

$$f = \sum_{i=1}^n c_i f_i,$$

para constantes  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Note que

$$0 = \langle f, f_1 \rangle_2 = c_1 \langle f_1, f_1 \rangle_2 + c_2 \langle f_2, f_1 \rangle_2 + \dots + c_n \langle f_n, f_1 \rangle_2 = c_1,$$

así

$$f = \sum_{i=2}^n c_i f_i,$$

y

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \left\langle \sum_{i=2}^n c_i f_i, \sum_{j=2}^n c_j f_j \right\rangle = \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n c_i c_j \langle f_i, f_j \rangle = \sum_{i=2}^n c_i^2.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle Af, f \rangle_2 &= \left\langle A \sum_{i=2}^n c_i f_i, \sum_{i=2}^n c_i f_i \right\rangle_2 = \left\langle \sum_{i=2}^n c_i A f_i, \sum_{i=2}^n c_i f_i \right\rangle_2 = \left\langle \sum_{i=2}^n c_i \lambda_i f_i, \sum_{i=2}^n c_i f_i \right\rangle_2 \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n c_i c_j \lambda_i \langle f_i, f_j \rangle_2 = \sum_{i=2}^n c_i^2 \lambda_i \leq \lambda_2 \sum_{i=2}^n c_i^2 = \lambda_2 \|f\|_2^2 = \lambda_2, \end{aligned}$$

en particular,

$$\lambda_2(X) \geq \max_{\substack{f \in L_0^2(V, \mathbb{R}) \\ \|f\|_2 = 1}} \langle Af, f \rangle_2.$$

Como  $f_2 \in L_0^2(V, \mathbb{R})$ ,  $\|f_2\|_2 = 1$  y  $\langle Af_2, f_2 \rangle_2 = \langle \lambda_2 f_2, f_2 \rangle_2 = \lambda_2$ , se tiene que

$$(3.1) \quad \lambda_2(X) = \max_{\substack{f \in L_0^2(V, \mathbb{R}) \\ \|f\|_2 = 1}} \langle Af, f \rangle_2.$$

Por otro lado, dado que  $X = (X, E)$  es un grafo  $k$ -regular,  $\Delta = kI - A$ , esto es  $A = kI - \Delta$ , y  $\|f\|_2 = 1$ , de (3.1) se tiene que

$$k - \lambda_2(X) = \min_{f \in L_0^2(V, \mathbb{R})} \frac{\langle \Delta f, f \rangle_2}{\|f\|_2^2} = \min_{\substack{f \in L_0^2(V, \mathbb{R}) \\ \|f\|_2 = 1}} \langle \Delta f, f \rangle_2.$$

Defina la constante isoperimétrica  $h(X)$  como,

**Definición 3.2.** Dado un subconjunto  $S \subset V$ , el borde de  $S$ , denotado por  $\partial S$ , es el conjunto de aristas de  $X$  que van de  $S$  a su complemento. La relación de expansión de  $X$ , denotada  $h(X)$ , se define como

$$h(X) = \min \left\{ \frac{|\partial S|}{|S|} : S \subset X \text{ y } 2|S| \leq |V| \right\}.$$

Por consiguiente, una familia  $(X_n)$  de grafos  $k$ -regulares, con  $|X_n| \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , es una familia de grafos expansores, o una familia de expansores, si existe  $\epsilon > 0$  tal que  $h(X_n) \geq \epsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Para identificar si una familia de grafos  $k$ -regulares  $(X_n)$  son expansores se puede relacionar  $h(X)$  con  $\lambda_2(X_n)$  o  $\text{diam}(X_n)$ .

**3.1. Expansores mediante  $\lambda_2(X)$ .** El siguiente resultado establece una relación entre  $h(X)$  y  $\lambda_2(X)$ .

**Proposición 3.2 (Proposición 1.84, [3]).** Sea  $X = (V, E)$  un grafo  $k$ -regular. Entonces

$$(3.2) \quad \frac{k - \lambda_2(X)}{2} \leq h(X) \leq \sqrt{2k(k - \lambda_2(X))}.$$

*Demostración:* Por definición de  $h(X)$ , considere  $S \subset V$  tal que  $|S| \leq \frac{|V|}{2}$  y

$$h(X) = \frac{|\partial S|}{\min\{|S|, |S^c|\}} = \frac{|\partial S|}{|S|}.$$

Consideren  $a = |S^c|$ ,  $b = |S|$ ,

$$g(x) = \begin{cases} a, & \text{si } x \in S, \\ b, & \text{si } x \in S^c, \end{cases}$$

y  $f = \frac{g}{\|g\|_2}$ .  
Como

$$\sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in S} g(v) + \sum_{v \in S^c} g(v) = \sum_{v \in S} a - \sum_{v \in S^c} b = a|S| - b|S^c| = ab - ba = 0,$$

entonces  $f, g \in L_0^2(V, \mathbb{R})$ .

Además,

$$\begin{aligned} \langle \Delta g, g \rangle_2 &= \langle dd^*g, g \rangle_2 = \langle dg, dg \rangle_2 = \sum_{e \in E} |dg|^2 \\ &= \sum_{e \in \partial S} |g(e^+) - g(e^-)|^2 + \sum_{e \in S} |g(e^+) - g(e^-)|^2 + \sum_{e \in S^c} |g(e^+) - g(e^-)|^2 \\ &= \sum_{e \in \partial S} |g(e^+) - g(e^-)|^2 = \sum_{e \in \partial S} (b + a)^2 = |\partial S|(b + a)^2, \end{aligned}$$

y

$$\|g\|_2^2 = \langle g, g \rangle_2 = \sum_{x \in S} a^2 + \sum_{x \in S^c} b^2 = a^2|S| + b^2|S^c| = a^2b + b^2a = ab(a + b).$$

Luego

$$\langle \Delta f, f \rangle = \frac{\langle \Delta g, g \rangle_2}{\|g\|_2^2} = \frac{|\partial S|(b + a)}{ab} = \frac{bh(X)(b + a)}{ab} = h(X) \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \leq 2h(X),$$

pues  $a \geq b$ , esto es,  $|S| \leq |S^c|$ .

Por la Proposición 3.1 se tiene que  $k - \lambda_2(X) \leq 2h(X)$ , esto es,

$$\frac{k - \lambda_2(X)}{2} \leq h(X).$$

Para probar la otra desigualdad, consideren  $g \in L_0^2(V, \mathbb{R})$  una función propia del segundo valor propio  $\lambda_2$ ,  $V^+ = \{x \in V : g(x) \geq 0\}$ ,  $V^- = \{x \in V : g(x) < 0\}$ . Asume que  $|V^+| \leq \frac{|V|}{2}$ .

Considere  $f \in L_0^2(V, \mathbb{R})$  dado por

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in V^+ \\ 0, & \text{si } x \in V^- \end{cases}.$$

Note que

$$(3.3) \quad \frac{\langle \Delta f, f \rangle_2}{\|f\|_2^2} \leq k - \lambda_2(X).$$

En efecto, si  $x \in V^+$ , por el Lema 2.1 se tiene que,

$$\begin{aligned} (\Delta f)(x) &= kf(x) - (Af)(x) = kf(x) - \sum_{y \in V} A_{x,y}f(y) \\ &= kf(x) - \left( \sum_{y \in V^-} A_{x,y}f(y) + \sum_{y \in V^+} A_{x,y}f(y) \right) = kg(x) - \sum_{y \in V^+} A_{x,y}g(y) \\ &\leq kg(x) - \sum_{y \in V} A_{x,y}g(y) = (\Delta g)(x). \end{aligned}$$

Por la Proposición 3.1 se tiene que,

$$\begin{aligned} \langle \Delta f, f \rangle_2 &= \sum_{v \in V} (\Delta f)(v)f(v) = \sum_{v \in V^+} (\Delta f)(v)f(v) \leq \sum_{v \in V^+} (\Delta g)(v)g(v) \\ &\leq \sum_{v \in V^+} (k - \lambda_2(X))g(v)^2 = (k - \lambda_2(X)) \sum_{v \in V^+} g(v)^2 \\ &= (k - \lambda_2(X)) \sum_{v \in V} f(v)^2 = (k - \lambda_2(X)) \langle f, f \rangle_2, \end{aligned}$$

lo cual verifica (3.3).

Si se cumple que

$$(3.4) \quad \frac{h(X)^2}{2k} \leq \frac{\langle \Delta f, f \rangle_2}{\|f\|_2^2},$$

de (3.3) se tiene que

$$\frac{h(X)^2}{2k} \leq k - \lambda_2(X),$$

esto es,

$$h(X) \leq \sqrt{2k(k - \lambda_2(X))},$$

y por tanto se demuestra (3.2).

Para probar (3.4), oriente las aristas de  $X$  de modo que  $f(e^+) \leq f(e^-)$  y considere

$$B_f = \sum_{e \in E} (f(e^+)^2 - f(e^-)^2).$$

Como

$$\langle \Delta f, f \rangle_2 = \langle df, df \rangle = \sum_{e \in E} |f(e^+) - f(e^-)|^2,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y al considerar  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 B_f &= \sum_{e \in E} (f(e^+)^2 - f(e^-)^2) = \sum_{e \in E} (f(e^+) + f(e^-))(f(e^+) - f(e^-)) \\
 &\leq \sqrt{\sum_{e \in E} (f(e^+) + f(e^-))^2} \sqrt{\sum_{e \in E} (f(e^+) - f(e^-))^2} \\
 (3.5) \quad &\leq \sqrt{2 \sum_{e \in E} (f(e^+)^2 + f(e^-)^2)} \sqrt{\sum_{e \in E} (f(e^+) - f(e^-))^2} \\
 &= \sqrt{2 \sum_{e \in E} (f(e^+)^2 + f(e^-)^2)} \sqrt{\langle \Delta f, f \rangle_2} \\
 &= \sqrt{2k \sum_{v \in V} f(v)^2} \sqrt{\langle \Delta f, f \rangle_2} = \sqrt{2k \langle \Delta f, f \rangle_2 \langle f, f \rangle_2}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, consideren  $0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_r$  los valores de  $f$  en los vértices  $V$ , y  $L_i$  como el conjunto  $L_i = \{x \in V : f(x) \geq \beta_i\}$ .

Por definición de  $L_i$ ,

$$L_r \subset L_{r-1} \subset \dots \subset L_1 \subset L_0 = V,$$

y  $L_i \subset V^+$  para  $0 \leq i \leq r$ .

Suponga que  $e$  es una arista tal que  $f(e^+) - f(e^-) \neq 0$ . Entonces  $f(e^-) = \beta_j$ ,  $f(e^+) = \beta_i$ , con  $j < i$ , así

$$e \in \partial L_{j+1} \cap \partial L_{j+2} \cap \dots \cap \partial L_i$$

y  $e \notin \partial L_0, \partial L_1, \dots, \partial L_j, \partial L_{j+1}, \dots, \partial L_r$ .

Además,

$$f(e^+)^2 - f(e^-)^2 = \beta_i^2 - \beta_j^2 = (\beta_i^2 - \beta_{i+1}^2) - (\beta_{i+1}^2 - \beta_{i+2}^2) + \dots + (\beta_{j+1}^2 - \beta_j^2) = \sum_{k=j+1}^i (\beta_k^2 - \beta_{k-1}^2).$$

Así

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad B_f &= \sum_{e \in E} (f(e^+)^2 - f(e^-)^2) = \sum_{e \in E} \sum_{k=j+1}^i (\beta_k^2 - \beta_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^r |\partial L_k| (\beta_k^2 - \beta_{k-1}^2). \\
 &\quad \begin{matrix} f(e^-) = \beta_j \\ f(e^+) = \beta_i \\ j < i \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Como  $L_i \subset V^+$  y  $|V^+| \leq \frac{|V|}{2}$  entonces  $h(X) \leq \frac{|\partial L_i|}{\min\{|L_i|, |L_i^c|\}} = \frac{|\partial L_i|}{|L_i|}$ , esto es,  $|\partial L_i| \geq h(X)|L_i|$ .

De (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad B_f &\geq h(X) \sum_{k=1}^r |L_k| (\beta_k^2 - \beta_{k-1}^2) \\
 &= h(X) [ |L_1|(\beta_1^2 - \beta_0^2) + |L_2|(\beta_2^2 - \beta_1^2) + \dots + |L_r|(\beta_r^2 - \beta_{r-1}^2) ] \\
 &= h(X) \left[ |L_r| \beta_r^2 + \sum_{k=1}^{r-1} (\beta_k^2 - \beta_{k-1}^2) \right].
 \end{aligned}$$

Dado que  $x \in L_k - L_{k+1}$  si, y solo si,  $f(x) = \beta_i$ , entonces de (3.7) se tiene que

$$(3.8) \quad B_f \geq h(X) \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{x \in V^+ \\ f(x) = \beta_i}} f(x)^2 = h(X) \langle f, f \rangle_2.$$

Por tanto, de (3.5) y (3.8) se concluye (3.4).

De la Proposición 3.2, el siguiente resultado muestra una forma de identificar o no familia de expansores en grafos  $k$ -regulares.

**Corolario 3.1 (Corolario 1.87, [3]).** *Sea  $(X_n)$  una sucesión de grafos  $k$ -regulares con  $|X_n| \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces  $(X_n)$  es una familia expansora si, y solo si, la sucesión  $(k - \lambda_2(X_n))$  es limitada, con constante diferente de cero.*

**Ejemplo 3.1.** *Dado que el segundo autovalor de los grafos cíclicos con  $n$  vértices  $C_n$  es  $\lambda_2(C_n) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ , entonces  $k - \lambda_2(C_n) = 2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por el Corolario 3.1,  $C_n$  no es una familia expansora.*

**3.2. Expansores mediante el diámetro del grafo.** Defina.

**Definición 3.3.** *Sea  $X = (V, E)$  un grafo. Defina  $B_r[v] = \{w \in V : \text{dist}(w, v) \leq r\}$  como la bola cerrada centrada en  $v \in X$  y radio  $r > 0$ . Además,*

$$S_r[v] = \{w \in V : \text{dist}(w, v) = r\}$$

es el conjunto de todos los vértices cuya distancia desde  $v \in V$  es igual a  $r > 0$ .

El siguiente resultado muestra una forma de limitar el diámetro de un grafo  $k$ -regular.

**Lema 3.1 (Lema 4.5, [3]).** *Sea  $X = (V, E)$  un grafo conexo finito y  $a > 1$ . Suponga que para cualquier  $v \in V$ , se tiene que  $|B_r[v]| \geq a^r$  cuando  $|B_{r-1}[v]| \leq \frac{|V|}{2}$ . Entonces*

$$\text{diam}(X) \leq \left(\frac{2}{\log a}\right) \log |X|.$$

*Demostración:* Sean  $v_1$  y  $v_2$  dos vértices arbitrarios de  $X$ . Ya que  $X$  es un grafo conexo, considere  $r_1 \in \mathbb{Z}$  como el radio más pequeño tal que  $|B_{r_1}[v_1]| > \frac{|V|}{2}$ .

Como  $r_1 - 1 < r_1$ ,  $|B_{r_1-1}[v_1]| \leq \frac{|V|}{2}$ , que por hipótesis,  $|B_{r_1}[v_1]| \geq a^{r_1}$ , esto es,  $\frac{\log |B_{r_1}[v_1]|}{\log a} \geq r_1$ .

De forma análoga, considere  $r_2 \in \mathbb{Z}$  el entero más pequeño tal que  $|B_{r_2}[v_2]| > \frac{|V|}{2}$ . Por el razonamiento anterior se tiene que  $|B_{r_2}[v_2]| \geq a^{r_2}$ , esto es,  $\frac{\log |B_{r_2}[v_2]|}{\log a} \geq r_2$ .

Como  $|B_{r_1}[v_1]| + |B_{r_2}[v_2]| > \frac{|V|}{2} + \frac{|V|}{2} = |V|$ , se tiene que  $|B_{r_1}[v_1]| \cap |B_{r_2}[v_2]| \neq \emptyset$  y así, existe  $v_3$  tal que  $v_3 \in |B_{r_1}[v_1]| \cap |B_{r_2}[v_2]|$ .

Luego,  $\text{dist}(v_1, v_3) \leq r_1$ ,  $\text{dist}(v_2, v_3) \leq r_2$  y

$$\begin{aligned} \text{dist}(v_1, v_2) &\leq \text{dist}(v_1, v_3) + \text{dist}(v_2, v_3) \leq r_1 + r_2 \leq \frac{\log |B_{r_1}[v_1]|}{\log a} + \frac{\log |B_{r_2}[v_2]|}{\log a} \\ &\leq \left(\frac{2}{\log a}\right) \log |V|, \end{aligned}$$

ya que  $|B_{r_1,2}[v_{1,2}]| \leq |V|$ .

Por tanto,

$$\text{diam}(X) \leq \left(\frac{2}{\log a}\right) \log |X|.$$

Otra forma de limitar el diámetro de un grafo  $k$ -regular, al usar la constante isoperimétrica, es aplicar el siguiente resultado.

**Proposición 3.3 (Proposición 4.6, [3]).** *Sea  $X$  un grafo conexo  $k$ -regular y  $C = 1 + \frac{h(X)}{k}$ . Entonces*

$$\text{diam}(X) \leq \left(\frac{2}{\log C}\right) \log |X|.$$

*Demostración:* Sea  $v \in X$  arbitrario. Supongamos que existe  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $r > 1$ , tal que  $|B_{r-1}[v]| \leq \frac{|V|}{2}$ . Por definición de  $h(X)$  se tiene que

$$h(X) \leq \frac{|\partial B_{r-1}[v]|}{\min\{|B_{r-1}[v]|, |B_{r-1}^c[v]|\}} = \frac{|\partial B_{r-1}[v]|}{|B_{r-1}[v]|},$$

esto es,

$$(3.9) \quad |\partial B_{r-1}[v]| \geq h(X)|B_{r-1}[v]|.$$

Como  $X$  es conexo, cualquier arista en  $\partial B_{r-1}[v]$  debe ser incidente a un vértice en  $S_r[v]$ . Además, como  $X$  es  $k$ -regular, de (3.9) se tiene que

$$|S_r[v]| \geq \frac{|\partial B_{r-1}[v]|}{d} \geq \frac{h(X)}{d}|B_{r-1}[v]|,$$

y así

$$|B_r[v]| = |B_{r-1}[v]| + |S_r[v]| \geq |B_{r-1}[v]| + \frac{h(X)}{d}|B_{r-1}[v]| = C|B_{r-1}[v]|.$$

Por inducción, se tiene que  $|B_r[v]| \geq C^r$  cuando  $|B_{r-1}[v]| \leq \frac{|V|}{2}$ . Luego, por el Lema 3.1 se tiene que

$$\text{diam}(X) \leq \left(\frac{2}{\log C}\right) \log |X|.$$

Por tanto, el siguiente resultado concluye si una familia de grafos  $k$ -regulares no son expansores.

**Corolario 3.2 (Corolario 4.8, [3]).** Si  $(X_n)$  es una familia expansora de grafos  $k$ -regulares, entonces  $(X_n)$  tiene diámetro logarítmico, esto es,  $\text{diam}(X_n) = O(\log |X_n|)$ .

*Demostración:* Ya que  $(X_n)$  es una familia expansora, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $h(X_n) \geq \epsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $C_n = 1 + \frac{h(X_n)}{k}$  y  $C = 1 + \frac{\epsilon}{k}$ .

Como  $\epsilon \leq h(X_n)$  entonces  $1 + \frac{\epsilon}{k} \leq 1 + \frac{h(X_n)}{k}$ , esto es,  $C \leq C_n$  y así  $\frac{2}{\log C_n} \leq \frac{2}{\log C}$ . Por la Proposición 3.3 se tiene que

$$\text{diam}(X_n) \leq \left(\frac{2}{\log C_n}\right) \log |X_n| \leq \left(\frac{2}{\log C}\right) \log |X_n|,$$

esto es,  $\text{diam}(X_n) = O(\log |X_n|)$ .

El inverso no es necesariamente cierto.

**Ejemplo 3.2.** Considere  $(X_n)_{n=3}^\infty$  un grafo 3-regular construido de la siguiente manera:  $X_n$  tiene un vértice ubicado en la parte superior del grafo. De este vértice tenemos tres subgráficos que son árboles casi binarios, excepto por el hecho de que sus vértices inferiores están conectados por un ciclo.

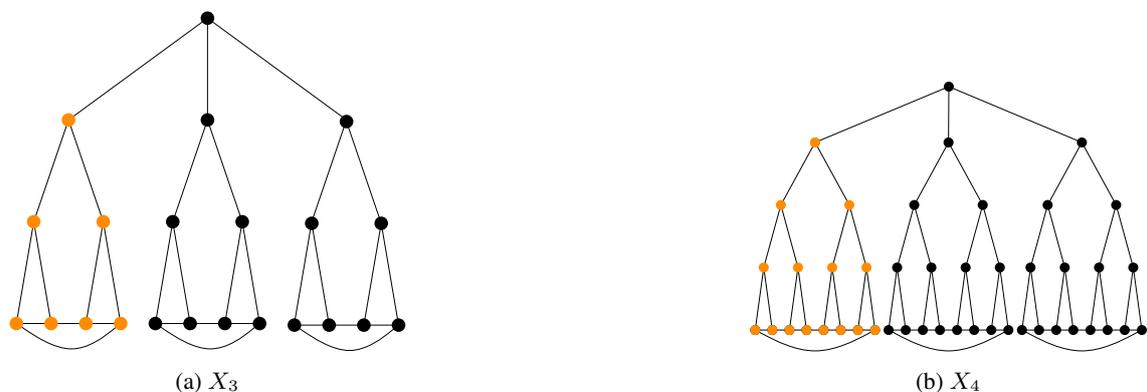


Figura 3.1: Grafos  $X_n$ .

De las ramificaciones en los grafos de la Figura 3.1 se deduce que

$$|X_n| = 1 + 3(2^n - 1) = 3(2^n) - 2 \geq 2^n,$$

y así  $n \leq \log_2 |X_n|$ . Además, de la distancia dado por el ultimo vértice amarillo y el ultimo vértice negro se tiene  $\text{diam}(X_n) = 2n$ . Por consiguiente,  $\text{diam}(X_n) \leq 2 \log_2 |X_n|$ , esto es,  $\text{diam}(X_n) = O(\log |X_n|)$ .

Sin embargo, si  $S_n$  es el subgrafo conformado por los vértices amarillos, se tiene que

$$h(X_n) \leq \frac{|\partial S_n|}{|S_n|} = \frac{1}{2^n - 1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Luego  $(X_n)$  no es una familia expansora.

**4. Propiedades básicas en grafos de Cayley.** Para cada subconjunto  $\Gamma$  de un grupo  $(G, \circ)$ , existe una representación geométrica de  $G$  en términos de  $\Gamma$ , denominado grafo de Cayley. Para su construcción, considere un grafo  $X = (V, E)$  donde  $V = G$  y,  $(x, y) \in E$  si existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $y = x \circ \gamma$ , esto es, si  $x^{-1} \circ y \in \Gamma$ . Un grafo de Cayley no dirigido es denotado por  $X = \text{Cay}(G, \Gamma)$ . Un digrafo de Cayley es representado por  $X = \text{Dicay}(G, \Gamma)$ .

Por ejemplo,

**Ejemplo 4.1.** Consideren  $(\mathbb{Z}_4, +)$ ,  $\Gamma_1 = \{[1], [3]\}$  y  $\Gamma_2 = \{[1]\}$ . Los grafos resultantes son  $X_1 = \text{Cay}(\mathbb{Z}_4, \Gamma_1)$  y  $X_2 = \text{Dicay}(\mathbb{Z}_4, \Gamma_2)$  como lo observados en las Figuras 4.1(a) y 4.1(b), respectivamente.

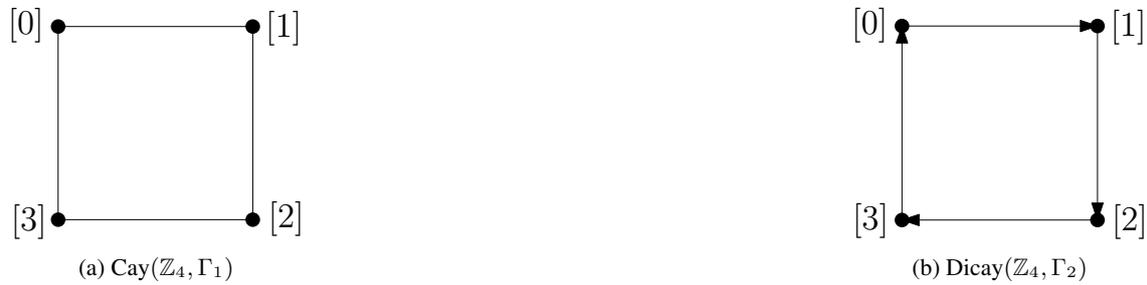


Figura 4.1: Grafos y digrafos de Cayley.

Conforme al Ejemplo 4.1, para construir un grafo de Cayley no dirigido  $X = \text{Cay}(G, \Gamma)$ , se debe construir  $\Gamma \subset G$  tal que  $(x, y) \in E$  satisfice  $x = y \circ \gamma_1$  e  $y = x \circ \gamma_2$  para algunos  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ . Sin embargo,  $x = y \circ \gamma_1 = (x \circ \gamma_2) \circ \gamma_1$  lo que implica que  $\gamma_2 \circ \gamma_1 = e$ , esto es,  $\gamma_2 = \gamma_1^{-1}$ . Por consiguiente, y de manera que no existan bucles en el grafo,  $\Gamma$  debe satisfacer.

**Definición 4.1.** Sea  $(G, \circ)$  un grupo y  $\Gamma \subset G$  tal que el elemento identidad de  $G$  no se encuentra en  $\Gamma$ , esto es,  $e \notin \Gamma$ . Se dice que  $\Gamma$  es simétrico si para todo  $\gamma \in \Gamma$  se tiene que  $\gamma^{-1} \in \Gamma$ .

**Definición 4.2.** Si  $\Gamma$  es un subconjunto simétrico de  $G$ , entonces el grafo de Cayley de  $G$  con respecto a  $\Gamma$  es el grafo  $\text{Cay}(G, \Gamma)$  con conjunto de vértices igual a  $G$  y existe una arista  $(x, y)$  conectando a  $x$  e  $y$  si  $x^{-1} \circ y \in \Gamma$ , o equivalentemente, si  $y^{-1} \circ x \in \Gamma$ .

**Ejemplo 4.2.** Si  $G = (\mathbb{Z}_4, +)$ , todos los posibles grafos de Cayley se pueden ver en la Figura 4.2.

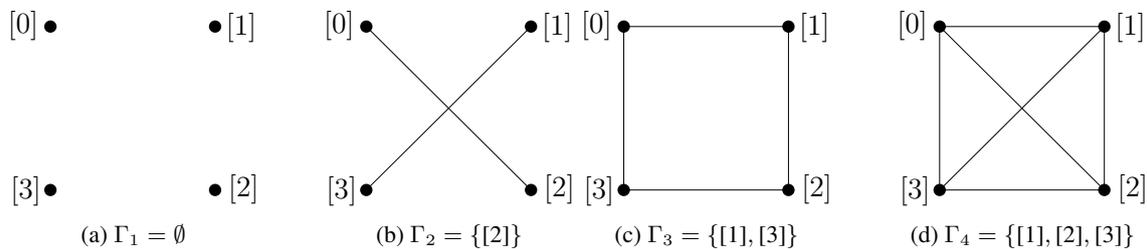


Figura 4.2: Posibles Grafos de Cayley para  $G = (\mathbb{Z}_4, +)$ .

**Ejemplo 4.3.** Si  $G = (\mathbb{Z}_n, +)$  y  $\Gamma = \{[1], [1]^{-1}\}$ , entonces  $C_n = \text{Cay}(G, \Gamma)$  es el ciclo de  $n$  vértices. En la Figura 4.1(a) se observa el grafo para  $n = 4$ .

**Ejemplo 4.4.** Sea  $G = (\mathbb{Z}_2^n, +)$ , con  $n \geq 1$ , y  $\Gamma$  el conjunto de todos los  $x \in \mathbb{Z}_2^n$  con exactamente una coordenada igual a 1. El grafo de Cayley resultante  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_2^n, \Gamma)$  es el llamado hipercubo  $n$ -dimensional. En la Figura 4.3 se muestran los casos  $n = 3$  y  $n = 4$ .

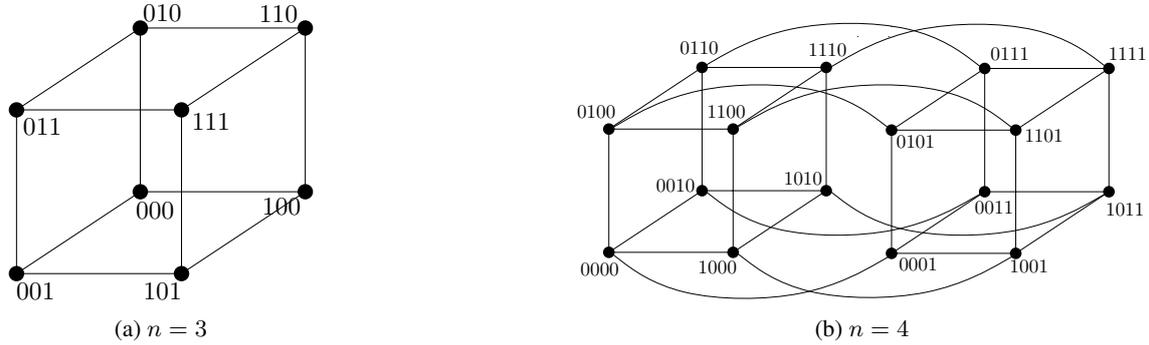


Figura 4.3: Hipercubos.

**Definición 4.3.** Para un grupo  $(G, \circ)$  con un conjunto  $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} \subset G$  no simétrico, un grafo dirigido  $X = (V, E) = \text{Dicay}(G, \Gamma)$  es de Cayley si  $V = G$  y para cada par de vértices  $x, y \in G$  define una arista  $(x, y)$  generado por  $\gamma_i \in \Gamma$  si  $y = x \circ \gamma_i$ .

Para identificar si  $X = (V, E)$  es un digrafo de Cayley se deben identificar las siguientes propiedades

**Teorema 4.1.** Un dígrafo  $X$  es de Cayley para algún conjunto  $\Gamma$  de un grupo finito  $(G, \circ)$  si, y solo si, se cumplen las siguientes propiedades.

1.  $X$  es conexo.
2. Como máximo, una arista va del vértice  $x$  al vértice  $y$ .
3. Cada vértice  $x$  tiene exactamente una arista de cada tipo que comienza en  $x$ , y uno de cada tipo que termina en  $y$ .
4. Si dos secuencias diferentes de tipos de aristas que comienzan desde el vértice  $x$  y termina al vértice  $y$ , entonces esas mismas secuencias de tipos de vértices que comienzan desde cualquier vértice  $u$  conducirán al mismo vértice  $v$ .

Note que del Teorema 4.1,

- La razón por la que el grafo  $X$  es conexo se basa en que  $\Gamma$  genera aristas de  $X$  como lo observado en el Teorema 4.1, y que cada ecuación  $y = x \circ \gamma$  tiene una solución  $\gamma$ , y  $\gamma$  puede expresarse en términos del conjunto  $\Gamma$ .
- La propiedad 2 se debe a que  $y = x \circ \gamma$  tiene una solución única. Si  $\gamma \in \Gamma$ , la arista de  $x$  a  $y$  está presente. Si  $\gamma \notin \Gamma$ , la arista de  $x$  a  $y$  no está presente.
- La propiedad 3 se debe a que la arista que genera  $\gamma$  que sale de  $x$  va al vértice  $x \circ \gamma$ . La arista que es generada por  $\gamma$  que entra en  $x$  es la arista que viene de  $x \circ \gamma^{-1}$ .
- La propiedad 4 se debe a que las dos secuencias representan algún producto de grupos generadores. Las dos secuencias producen el mismo elemento del grupo porque la ecuación  $y = x \circ \gamma$  tiene una solución única.

Por otro lado, el siguiente resultado muestran los grados de salidas y entradas de los vértices en un digrafo de Cayley.

**Teorema 4.2 (Teorema 2, [4]).** Sea  $X = \text{Dicay}(G, \Gamma)$  un digrafo de Cayley y sean  $\delta^-(v)$ ,  $\delta^+(v)$  los grados de salida y entrada de un cierto  $v \in V$  y  $n = |\Gamma|$ , respectivamente. Entonces para cualquier  $x \in V$  se tiene que  $\delta^-(x) = \delta^+(x) = n$ .

*Demostración:* Sea  $x \in V$  y  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $(x, x \circ \gamma_i)$  forma una arista en  $X$ . Veamos  $\delta^-(x) = n$ . Suponga que existen  $\gamma_i \neq \gamma_j \in \Gamma$ , con  $i \neq j$ , tal que  $x \circ \gamma_i = x \circ \gamma_j$ .

Como  $x \in (G, \circ)$ , existe  $x^{-1}$  tal que  $x \circ x^{-1} = e$ . Si  $x \circ \gamma_i = x \circ \gamma_j$ ,

$$\gamma_i = (x^{-1} \circ x) \circ \gamma_i = x^{-1} \circ (x \circ \gamma_i) = x^{-1} \circ (x \circ \gamma_j) = (x^{-1} \circ x) \circ \gamma_j = \gamma_j,$$

lo que contradice que  $\gamma_i \neq \gamma_j$ . Por tanto, para cada vértice  $x \in X$  distintos elementos  $\gamma$  de  $\Gamma$  dan lugar a distintas imágenes, esto es,  $\delta^-(x) = n$ .

Por otro lado, note que para todo  $\gamma \in \Gamma$ , existe  $\gamma^{-1} \in G$  tal que  $\gamma \circ \gamma^{-1} = e$ . Si  $y = x \circ \gamma^{-1}$ , para cada  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$(x \circ \gamma^{-1}) \circ \gamma = x \circ (\gamma^{-1} \circ \gamma) = x.$$

Por consiguiente,  $\delta^+(x) = n$ .

Conforme a lo observado en las Figuras 4.1 y 4.3, el grafo de Cayley  $X_1$  del Ejemplo 4.1 es 2-regular y los hipercubos son  $n$ -regulares. Por consiguiente, el siguiente resultado muestran algunas propiedades básicas de los grafos de Cayley.

**Proposición 4.1 (Proposición 1.29, [3]).** Sea  $X = \text{Cay}(G, \Gamma)$  un grafo de Cayley. Entonces

1.  $X$  es regular de grado  $|\Gamma|$ .
2.  $X$  es conexo si, y solo si,  $\Gamma$  genera a  $G$ .

*Demostración:* En efecto,

1. Sea  $x \in G$  arbitrario. Entonces el conjunto de las aristas en  $X$  que contienen a  $x$  viene dado por  $E_x = \{(x, x \circ \gamma) : \gamma \in \Gamma\}$  pues  $x^{-1} \circ (x \circ \gamma) = (x^{-1} \circ x) \circ \gamma = e \circ \gamma = \gamma \in \Gamma$ . Por consiguiente,  $|E_x| = |\Gamma|$ .
2. Si  $X$  es conexo, para cada par de vértices  $x, y \in X$  existe un camino  $P$  que los une. En particular, si  $y = e$ , con  $e$  el elemento identidad de  $G$ , existe un camino  $P = x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = e$  donde cada  $(x_{i+1}, x_i)$ , con  $i = 0, \dots, n - 1$ , forma una arista, esto es, existe  $\gamma_i \in \Gamma$  tal que  $x_{i+1} = x_i \circ \gamma_i$  como lo observado en la Figura 4.4(a). Así,

$$x = x_1 \circ \gamma_0^{-1} = x_2 \circ \gamma_1^{-1} \circ \gamma_0^{-1} = \dots = e \circ \gamma_{n-1}^{-1} \circ \dots \circ \gamma_0^{-1} = \gamma_{n-1}^{-1} \circ \dots \circ \gamma_0^{-1} \in \Gamma.$$

Como  $x$  es arbitrario, se tiene que  $\Gamma$  genera  $G$ .

Recíprocamente, si  $\Gamma$  genera a  $G$ , para cada  $x, y \in G$  existen  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \Gamma$  y  $t_1, t_2, \dots, t_m \in \Gamma$  tal que  $x = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \dots \circ \gamma_k$  e  $y = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_m$ . Como

$$P = x, x \circ \gamma_k^{-1}, \dots, x \circ \gamma_k^{-1} \circ \dots \circ \gamma_1^{-1} = e, x \circ \gamma_k^{-1} \circ \dots \circ \gamma_1^{-1} \circ t_1, \dots, x \circ \gamma_k^{-1} \circ \dots \circ \gamma_1^{-1} \circ t_1 \circ \dots \circ t_m = y$$

es un camino de  $x$  a  $y$  en  $X$ , como lo observado en la Figura 4.4(b), entonces  $X$  es conexo.



Figura 4.4: Construcción Proposición 4.1.

Por otro lado, de un digrafo de Cayley  $X = \text{Dicay}(G, \Gamma)$ , el grupo  $(G, \circ)$  es conmutativo si, y solo si el conjunto generador  $\Gamma$  es conmutativo. El siguiente resultado verifica cuando el conjunto generador  $|\Gamma| \geq 2$  es conmutativo.

**Lema 4.1.** El conjunto generador  $\Gamma$  de un digrafo de Cayley  $X = \text{Dicay}(G, \Gamma)$  es conmutativo si, y solo si para cada vértice  $u$  del dígrafo Cayley, se sigue una arista generada por  $\gamma_i \in \Gamma$  a un nuevo vértice  $v$  y luego se sigue una arista de  $\gamma_j$  al vértice  $w$ , y también se puede tomar la arista generada por  $\gamma_j$  desde el vértice  $u$  hasta algún vértice  $h$  y luego una arista generada por  $\gamma_i$  desde  $h$  hasta el vértice  $w$

*Demostración:* Conforme a lo observado en la Figura 4.5, como  $u \circ \gamma_i = v, v \circ \gamma_j = w, u \circ \gamma_j = h$  y  $h \circ \gamma_i = w$ , entonces

$$\gamma_i \circ \gamma_j = (u^{-1} \circ v) \circ \gamma_j = u^{-1} \circ (v \circ \gamma_j) = u^{-1} \circ w = u^{-1} \circ (h \circ \gamma_i) = (u^{-1} \circ h) \circ \gamma_i = \gamma_j \circ \gamma_i,$$

y se tiene el resultado.

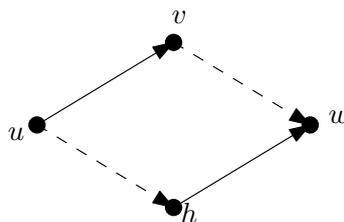


Figura 4.5: Representación Lema 4.1

Dado que un grupo  $(G, \circ)$  es libre si existe  $\Gamma \subset G$ , con  $\Gamma \cap \Gamma^{-1} = \emptyset$ , tal que genera libremente a  $G$ , esto es, si todo elemento de  $G$  se puede escribir en una forma única como producto de finitos elementos de  $\Gamma$  y sus inversos, el siguiente resultado muestra la forma del digrafo de Cayley formado por dichos grupos.

**Proposición 4.2 (Proposición 1.15, [5]).** *Sea  $(G, \circ)$  un grupo libre y  $\Gamma \subset G$  un conjunto que genera libremente a  $G$ . Entonces  $X = \text{Dicay}(G, \Gamma)$  es un árbol dirigido.*

*Demostración:* Considere  $(G, \circ)$  un grupo libre, esto es, un elemento  $x \in G$  se puede escribir de manera única como  $x = \gamma_1^{\epsilon_1} \circ \dots \circ \gamma_n^{\epsilon_n}$ , con  $\epsilon_i = \{\pm 1\}$  y  $\gamma_i \in \Gamma$  para  $1 \leq i \leq n$ . De manera equivalente a la demostración de la Proposición 4.1(1), se sigue que  $X$  es conexo.

Además, si  $X$  no tiene ciclos dirigidos, entonces  $X$  es un árbol dirigido. Suponga que, para un  $x \in G$ ,  $X$  posee un ciclo dado por

$$C = x, x \circ \gamma_1^{\epsilon_1}, x \circ \gamma_1^{\epsilon_1} \circ \gamma_2^{\epsilon_2}, \dots, x \circ \gamma_1^{\epsilon_1} \circ \dots \circ \gamma_n^{\epsilon_n} = x.$$

Por consiguiente  $e = \gamma_1^{\epsilon_1} \circ \dots \circ \gamma_n^{\epsilon_n}$ , con  $e$  el elemento identidad de  $G$ , es una relación no trivial sobre los elementos de  $\Gamma$ , lo que contradice el hecho que  $G$  es un grupo libre generado por  $\Gamma$ .

Debido a que un grafo de Cayley es  $|\Gamma|$ -regular, si  $\gamma \in \Gamma$  entonces  $\gamma^{-1} \in \Gamma$ . Por tanto, al considerar  $\Gamma$  tal que  $\Gamma \cap \Gamma^{-1} = \emptyset$ , entonces el grafo de Cayley no es regular. Por tanto, para determinar si el grafo de Cayley proviene de un grupo libre se usa el siguiente resultado.

**Proposición 4.3 (Proposición 1.15, [5]).** *Sea  $(G, \circ)$  un grupo y  $\Gamma \subset G$  un conjunto generador de  $G$  tal que  $\Gamma \cap \Gamma^{-1} = \emptyset$ . Si  $X = \text{Dicay}(G, \Gamma)$  es un árbol dirigido, entonces  $(G, \circ)$  es generado libremente por  $\Gamma$ .*

*Demostración:* Suponga que  $\Gamma$  no genera libremente  $(G, \circ)$ , esto es, existe elementos no triviales  $G$  tal que el producto de estos es la identidad del grupo  $e$ . Sea  $e \in G$  de longitud mínima  $n > 0$  tal que  $e = \gamma_1^{\epsilon_1} \circ \dots \circ \gamma_n^{\epsilon_n}$ , con  $\epsilon_i = \{\pm 1\}$  y  $\gamma_i \in \Gamma$ . Considere  $y_i = \gamma_1^{\epsilon_1} \circ \dots \circ \gamma_i^{\epsilon_i} \in G$ , donde  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , e  $y_0 = e$ . Como  $e$  es de longitud mínima,  $y_i$  son distintos para todo  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , ya que si existen  $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $i < j$ , con  $y_i = y_j$ , entonces  $\gamma_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \circ \dots \circ \gamma_j^{\epsilon_j} = e$  es de longitud menor que  $n > 0$ . Entonces  $y_0 = y_n$  y los vértices  $y_i$  e  $y_{i+1}$  son adyacentes en  $X$ . Por lo tanto, se tiene un ciclo dirigido en  $X$ , lo cual contradice el hecho que  $X$  es un árbol dirigido.

**Ejemplo 4.5.** *El grupo  $G = (\mathbb{Z}, +)$  es un grupo libre ya que  $\Gamma = \{[1]\}$  es un subconjunto de  $\mathbb{Z}$  que genera libremente a  $\mathbb{Z}$ . El digrafo de Cayley  $P_\infty = \text{Dicay}(G, \Gamma)$  es observado en la Figura 4.6.*



Figura 4.6: Grafo  $P_\infty$ .

**Ejemplo 4.6.** *Consideren  $\Gamma_1 = \{a, b\}$  un subconjunto generador libre de  $(G_1, \circ)$  y  $\Gamma_2 = \{a, b, c : ac = b\}$  una subconjunto generado de  $(G_2, \circ)$ . De la Figura 4.7 y conforme a la Proposición 4.2, el grafo  $X_1 = \text{Dicay}(G_1, \Gamma_1)$  es un árbol y, por la Proposición 4.3,  $X_2 = \text{Dicay}(G_2, \Gamma_2)$  no es árbol.*

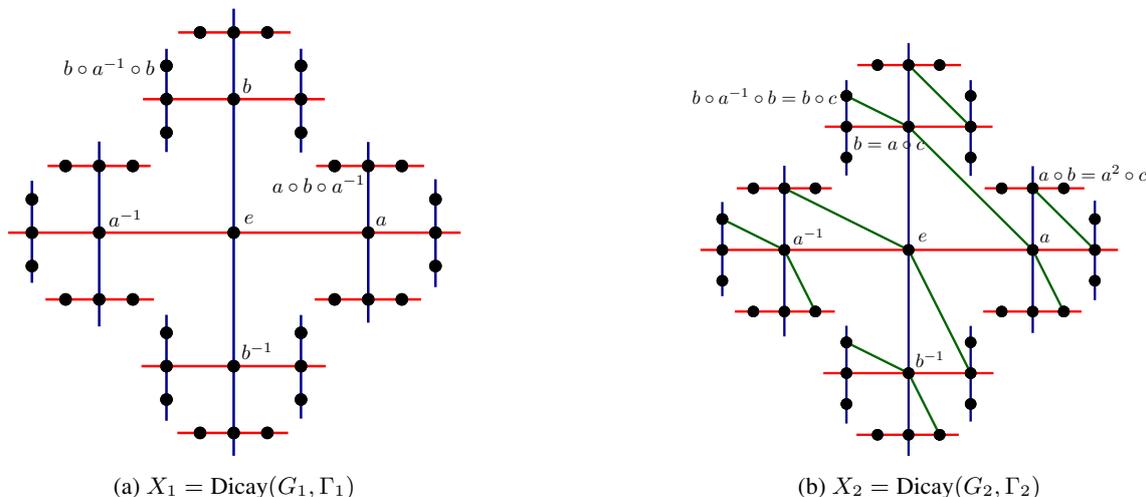


Figura 4.7: Digrafos de Cayley.

Para finalizar, el siguiente resultado muestra una forma de determinar cuando un grafo arbitrario  $X = (V, E)$  es de Cayley.

**Teorema 4.3 (Sabidussi, [6]).** *Un grafo conexo  $X = (V, E)$  es un grafo de Cayley de un grupo  $(G, \circ)$  si, y solo si, existe  $H \subseteq \text{Aut}(X)$  tal que sea vértice transitivo en  $V(X)$ .*

*Demostración:* Sea  $X = \text{Dicay}(G, \Gamma)$  un digrafo de Cayley y defina  $f : V \rightarrow V$  tal que  $f(x) = x \circ \gamma$  para algún  $\gamma \in \Gamma$ .

Observe que

- $f$  es una función bien definida, va de  $G$  en  $G$  ya que usa la operación binaria,
- Si  $f(x_1) = f(x_2)$ , esto es,  $x_1 \circ \gamma = x_2 \circ \gamma$ , entonces

$$x_1 = (x_1 \circ \gamma) \circ \gamma^{-1} = (x_2 \circ \gamma) \circ \gamma^{-1}.$$

Luego  $f$  es una función inyectiva,

- Sea  $y \in G$  arbitrario. Si  $x = y \circ \gamma^{-1}$ , entonces  $f(x) = f(\gamma^{-1} \circ x) = (y \circ \gamma^{-1}) \circ \gamma = y$ . Luego  $f$  es sobreyectiva.
- Sean  $x, y \in G$  y  $\beta \in \Gamma$  tal que  $y = x \circ \beta$ , es decir, existe una arista en  $X$  entre  $x$  e  $y$ . Veamos que existe una arista entre  $f(x)$  y  $f(y)$ . En efecto, como  $y = x \circ \beta$  entonces  $y \circ \gamma = x \circ (\beta \circ \gamma)$ , esto es,  $f(y) = f(x) \circ \gamma$ .

Por consiguiente,  $f$  es un automorfismo de  $X$ .

Recíprocamente, para  $x \in V$ , considere

$$\Gamma = \{ \gamma \in H : x \circ \gamma \text{ es adyacente con } x \}.$$

Note que  $\Gamma$  es simétrico ya que  $H$  actúa mediante automorfismos de grafos, de modo que  $x \circ \gamma$  es adyacente con  $x$  si, y solo si,  $x$  es adyacente con  $x \circ \gamma^{-1}$ . Defina  $X \cong \text{Cay}(H, \Gamma)$  de la siguiente manera: si  $x \in V$ , entonces existe un único  $\gamma \in \Gamma$  con  $x \circ \gamma = y$ . De manera similar para las aristas.

**Ejemplo 4.7.** *Considere el grafo dado en la Figura 4.8. Por el Teorema 4.3, dicho grafo es conectado mas no es Cayley ya no es transitivo de vértice. El vértice superior izquierdo y su vecino a la derecha no están mapeados entre sí a través de ningún automorfismo del grafo.*

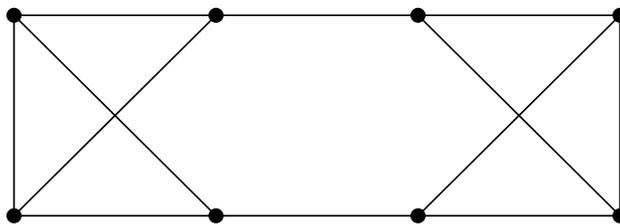


Figura 4.8: Ejemplo de un grafo que no es de Cayley.

**5. Grafos expansores de Cayley.** Debido a que los grafos de Cayley son  $|\Gamma|$ -regulares, se usa el Corolario 3.1 para identificar cuando una familia de grafos de Cayley son expansores. El Ejemplo 3.1 es un aplicación de dicho resultado. Sin embargo, dado lo complejo en algunas veces en calcular  $\lambda_2(X)$ , se usa el diámetro para identificar cuando una familia no es expansora. Para ello, defina lo siguiente.

**Definición 5.1.** *Sea  $(G_n, \circ)$  una sucesión de grupos finitos. Decimos que  $(G_n)$  tiene un diámetro logarítmico si para algún número entero positivo  $d$  existe una sucesión  $(\Gamma_n)$  tal que  $\Gamma_n \subset G$  con  $|\Gamma_n| = d$ , de modo que la sucesión de grafos de Cayley  $(\text{Cay}(G_n, \Gamma_n))$  tiene un diámetro logarítmico.*

**Definición 5.2.** *Sea  $\Gamma$  un conjunto y sea  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Entonces, un término en  $\Gamma$  de longitud  $n$  es un elemento del producto cartesiano  $\Gamma \times \dots \times \Gamma = \Gamma^n$ . Si  $\Gamma \subset G$  para algún grupo  $G$  y  $w = (w_1, \dots, w_n)$  es un término, entonces  $g \in G$  puede expresarse como  $g = w_1 \circ \dots \circ w_n$ .*

**Ejemplo 5.1.** *Sea  $(\mathbb{Z}, +)$  y  $\Gamma = \{-1, 1, 2, 5\}$ . Entonces  $w_1 = (1, 2, 1)$  es un término de longitud 3 en  $\Gamma$ , y  $w_2 = (2, 2)$  es un término de longitud 2 en  $\Gamma$ . Observe que tanto  $w_1$  como  $w_2$  se evalúan como 4. Por lo tanto, 4 se puede expresar de muchas maneras diferentes como un término en  $\Gamma$ . Además, 2 es la longitud mínima de cualquier palabra que se evalúa como 4.*

**Ejemplo 5.2.** *Sea  $(\mathbb{Z}_{10}, +)$  y  $\Gamma = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ . Entonces 7 no se puede expresar como un término en  $\Gamma$ .*

**Definición 5.3.** *Sea  $(G, \circ)$  un grupo,  $\Gamma \subset G$  y  $g \in G$  tal que puede expresarse como un término en  $\Gamma$ . La norma de  $g$  es la longitud mínima de cualquier término en la que se evalúa  $g$ . El término de longitud cero se evalúa como el elemento identidad  $e \in G$ . Entonces la identidad tiene término de norma 0.*

Por consiguiente, el siguiente resultado muestra como calcular el diámetro de un grafo de Cayley.

**Proposición 5.1 (Proposición 4.17, [3]).** Sea  $(G, \circ)$  un grupo finito y  $\Gamma \subset G$ . Sea  $X = \text{Cay}(G, \Gamma)$ .

Luego:

1.  $X$  está conectado si, y solo si, cada elemento de  $G$  puede expresarse como un término en  $\Gamma$ .
2. Si  $x, y \in G$  y existe un camino en  $X$  de  $x$  a  $y$ , entonces la distancia de  $x$  a  $y$  es la norma del término  $x^{-1} \circ y$  en  $\Gamma$ .
3. El diámetro de  $X$  es igual al máximo de las normas de términos en elementos de  $G$ .

*Demostración:* Vemos:

1. Dado de la Proposición 4.1,  $X$  es conexo si, y solo si,  $\Gamma$  genera a  $G$ , esto es, cada elemento de  $G$  puede expresarse como un término en  $\Gamma$ .
2. Sea  $(x = x_0, x_1, \dots, x_n = y)$  una caminata de longitud  $n$  en  $X$  de  $x$  a  $y$ . Como  $X$  es un grafo de Cayley,  $x_{i+1} = x_i \circ \gamma_i$  para algún  $\gamma_i \in \Gamma$ , con  $i = 1, \dots, n-1$ .

Entonces

$$x = x_1 \circ \gamma_0^{-1} = \dots = y \circ \gamma_{n-1}^{-1} \circ \dots \circ \gamma_0^{-1},$$

esto es,

$$x^{-1}y = \gamma_0 \circ \dots \circ \gamma_{n-1}.$$

Por tanto  $(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1})$  es un término de longitud  $n$  que se evalúa como  $x^{-1} \circ y$ . Por lo tanto, la distancia de  $x$  a  $y$  es igual a la longitud mínima de todas las caminatas en  $X$  de  $x$  a  $y$ , lo que equivale a la longitud mínima de todas las palabras en esa evaluación a  $x^{-1} \circ y$ , que es igual a la norma del término de  $x^{-1}y$  en  $\Gamma$ .

3. Si  $x \in G$ , por (2) la distancia desde el elemento de identidad  $e$  hasta  $x$  es la norma del término de  $x$ . Por lo tanto,  $\text{diam}(X)$  es al menos el máximo de la longitud de los términos de los elementos de  $G$ . Porque por (2) cada distancia es una norma de palabras, tenemos igualdad.

**Ejemplo 5.3.** Sea  $X_n = \text{Cay}(\mathbb{Z}_2^n, \Gamma_n)$  como lo observado en la Figura 4.3. Como la norma de un elemento de  $x \in \mathbb{Z}_2^n$  es igual al conteo de elementos 1 en  $x$ , la proposición 5.1,  $\text{diam}(X_n) = n$ .

**Ejemplo 5.4.** Sea  $(\mathbb{Z}_n, +)$ ,  $\Gamma = \{[1], [1]^{-1}\}$  y  $C_n = \text{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Gamma)$ . Por la proposición 5.1,  $\text{diam}(C_n) = n = |C_n|$ . Por consiguiente,  $(C_n)$  no tiene diámetro logarítmico, y por el Corolario 3.2,  $(C_n)$  no es una familia expansora.

**6. Conclusiones.** En este trabajo se identificaron las posibles representaciones gráficas en grafos de Cayley dependiendo las características del grupo o su generador. En este caso, si el grupo es libre, entonces el grafo es un árbol y, si  $\Gamma$  es simétrico, el grafo es regular. Además, se demostró que el grafo de Cayley es transitivo en los vértices, es decir, dado dos vértices cualesquiera existe un automorfismo del grafo que lleva un vértice en el otro. Sin embargo, no todo grafo transitivo en vértices es un grafo de Cayley de algún grupo, como ejemplo se podría tomar el grafo de Petersen [7].

Los grafos de Cayley no es independiente del conjunto de generadores que se toma, como en el caso de los posibles grafos generados para el grupo  $(\mathbb{Z}_4, +)$ . Es decir, que al tomar dos generadores distintos se obtiene en general grafos no isomorfos. De igual forma, si  $\Gamma$  no genera al grupo  $G$  entonces habrá varias componentes conexas del grafo, una por cada clase lateral determinada por el subgrupo generado por  $\Gamma$ .

En algunas ocasiones la condición para que  $(x, y) \in E$  en un digrafo de Cayley es sustituido por  $y = \gamma \circ x$  para algún  $\gamma \in \Gamma$ , pero no implica que se altera la forma del digrafo. Dado que  $x, y \in G$ , entonces  $x^{-1}, y^{-1} \in G$ , por consiguiente, una arista  $(x, y) \in E$  bajo la condición que  $y = x \circ \gamma$  es bi-equivalente a formar una arista  $(y^{-1}, x^{-1}) \in E$  bajo la condición  $x^{-1} = \gamma \circ y^{-1}$ .

Por otro lado, si el diámetro de una sucesión de grafos de Cayley no es logarítmica, entonces la familia de grafos no es expansora. Sin embargo, si el diámetro es logarítmico, no se puede concluir que la familia es expansora, lo cual es importante determinar el segundo valor propio mas grande de la familia de grafos y determinar si la sucesión  $(d - \lambda_2(X_n))$  es limitada para una constante diferente de cero. En este caso, existen trabajos dedicados en determinar el espectro de un grafo de Cayley [3, 8, 9].

## ORCID and License

Christian Cortes G. <https://orcid.org/0000-0002-8955-4530>

This work is licensed under the [Creative Commons Attribution-NoComercial-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

## Referencias

- [1] Delorme C. Cayley digraphs and graphs. European J. of Combinatorics. 2013; 34:1307-1315.

- [2] Post O. Analysis on Graphs. ICMAT: Lecture notes summarise given at Escuela JAE de Matemáticas; 2017.
- [3] Krebs M, Shaheen A. Expander families and Cayley graphs: a beginner's guide. Oxford: Oxford University Press; 2011.
- [4] Griñá D. Grafos de Cayley. [Diss.]: Universidad Politecnica de Madrid; 2017.
- [5] Serre JP. Trees. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag; 1980.
- [6] Biggs N, Norman B. Algebraic graph theory. Cambridge: Cambridge university press; 1993.
- [7] Pflögner M. Cayley-graphs and Free Groups [Bachelor Thesis]. Vienna: Slovenian-Austrian Cooperation project (OAD) Ljubljana; 2010.
- [8] Babai L. Spectra of Cayley graphs. J. of Combinatorial Theory, Series B. 1979; 27(2):180-189.
- [9] Petteri K. Eigenvectors and Spectra of Cayley Graph. Helsinki: Manuscript for a seminar given at Helsinki University of Technology; 2002.