Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2020; Vol. 7(1): 183-191.

COMMUNICATION

Análisis de la estabilidad de los sistemas lineales con saltos markovianos en tiempo continuo

Analysis of the stability of linear systems with continuous Markovian jumps

Jorge Enrique Mayta Guillermo, William C. Echegaray Castillo and Martin E. Berrospi Zapana

Received, Mar. 03, 2020 *Accepted, Jun. 16, 2020*

How to cite this article:
Mayta J, Echegaray W, Berrospi M. *Análisis de la estabilidad de los sistemas lineales con saltos markovianos en tiempo continuo*. Selecciones Matemáticas. 2020;7(1):183–191. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.01.18

Resumen

En este trabajo analizaremos la estabilidad de los sistemas lineales con saltos markovianos en tiempo continuo. En primer lugar, se impone que la cadena de Markov sea homogénea y el espacio de estado sea finito. Luego se presentan los tipos de estabilidad, por ejemplo, estabilidad cuadrática promedio, estabilidad estocástica, estabilidad exponencial. La estabilidad en la media cuadrática se analiza mediante la parte real de los autovalores de una cierta matriz. Finalmente, se presenta una ecuación del tipo Lyapunov.

Palabras clave. Sistemas lineales, cadena de Markov, ecuación de Lyapunov y estabilidad.

Abstract

In this paper analyzed the stability of linear systems with continuous Markovian jumps. Firstly, the conditions for the Markov chain to be homogeneous and the state space is finite are imposed. Then the types of stability are presented, for example quadratic average stability, stochastic stability, exponential stability and almost certain stability. Stability in quadratic mean is analyzed by the real part of the eigenvalues of a certain matrix. Finally, an equation of Lyapunov is presented.

Keywords . Linear systems, Markov chain, Lyapunov equation and stability.

1. Introducción.. Los recientes avances en tecnología han llevado a estudiar los sistemas dinámicos con una complejidad, que a su vez exigen sistemas de control cada vez más eficientes y confiables. Se ha reconocido ampliamente que los requisitos de comportamientos específicos y desempeños estrictos requieren la inclusión de una posible prevención de fallas en un diseño de control moderno. En vista de esto, los sistemas dinámicos que están sujetos a cambios abruptos han sido un tema de creciente investigación en los últimos años y una variedad de enfoques diferentes para analizar esta clase de sistemas han surgido a lo largo de las décadas. Una clase particularmente interesante de modelos dentro de este marco es el llamado sistema lineal de salto de Markov (MJLS), que es el tema de este artículo. Desde su inicio a principios de la década de 1960, MJLS ha encontrado muchas aplicaciones en una gran variedad de campos. Estos incluyen vehículos aéreos no tripulados [1], estaciones de energía solar [2], dinámica satelital [3], economía [4], etc.

2. Notaciones Básicas. En esta sección se presentan notaciones que utilizaremos en todo el artículo. El conjunto de los números reales es denotado por $\mathbb{R}$, el conjunto de los números naturales es denotado por $\mathbb{N}$ y el conjunto de los números enteros no negativos es denotado por $\mathbb{Z}_+$. El espacio vectorial de las

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 210, Lima-Perú (jmaytag@uni.edu.pe).
†Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 210, Lima-Perú (williamechegaray@yahoo.com.br).
‡Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 210, Lima-Perú (martin.zabe96@gmail.com).

$n-$uplas con componentes reales es denotado por $\mathbb{R}^n$. El espacio vectorial de matrices con orden $m \times n$ con elementos reales es denotado por $\mathbb{R}^{m\times n}$. La norma vectorial es denotado por $\|.\|$. Además la matriza transpuesta y la traza de la matriz A es denotada por A^T y $tr(A)$, respectivamente. En nuestro artículo el sistema que vamos a analizar es un sistema estocástico vemos la necesidad de definir ciertos término probabílisticos.

Se define el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde Ω es el espacio muestral, $\mathcal{F}$ es el sigma $\sigma-$álgebra y $\mathbb{P}$ es la medida de probabilidad. El valor esperado de una variable aleatoria es denotado por $E\{.\}$. La función indicadora con respecto a $A \in \mathcal{F}$ se denota por 1_A. La suma de Kronecker se denota por el símbolo $\oplus$ y el operador vec que transforma una matriz a una matriz columna. La cadena de Markov en tiempo continuo $\theta(t)$ que es utilizada en el artículo es homogénea con el siguiente espacio de estados.

$$S_\theta = \{1, 2, \cdots, N\}$$

La cadena de Markov satisface la propiedad markoviana, es decir,

$$\mathbb{P}(\theta(t) = j|\theta(s) = i, \theta(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots, \theta(t_1) = i_1) = \mathbb{P}(\theta(t) = j|\theta(s) = i)$$

donde $0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_{n-1} \le s \le t$ es cualquier secuencia no decreciente de $n+1$ tiempos e $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i, j$ son $n+1$ estados cualesquiera del conjunto S_θ.

En otras palabras, podemos decir que una cadena de Markov es un proceso estocástico que satisface la propiedad Markoviana, es decir, si se conoce la historia del proceso hasta el instante actual, su estado presente resume toda la información relevante para describir, en probabilidad, su estado futuro. Además satisface la cadena de markov es homogénea, es decir, si para cada $s \le t$ y cada estado $i, j \in S_\theta$,

$$\mathbb{P}(\theta(t) = j|\theta(s) = i) = \mathbb{P}(\theta(t-s) = j|\theta(0) = i).$$

Definimos por

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(\theta(t+s) = j|\theta(s) = i)),\ i, j \in S_\theta; s, t \in \mathbb{R}^+,$$

depende del lapso de tiempo que transcurre entre dos instantes cualesquiera y no de los instantes considerados en particular. Además

$$\lambda_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}$$

donde λ_{ij} representa la tasa de cambio de la transición de probabilidad y Π es la matriz de tasa de transición estacionaria de $\{\theta(t), t \in \mathbb{R}^+\}$.

3. Sistemas lineales asociados a una cadena de Markov en tiempo continuo. Sea el sistema dinámico definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y asumiendo que su ecuación de estado es descrita como la siguiente ecuación diferencial:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_{\theta(t)}x(t) \\ \\ \theta(0) = \theta_0, x(0) = x_0 \end{array}\right. , \tag{3.1}$$

donde $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i \in S_\theta$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es el estado inicial; $\{\theta(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ es una cadena de Markov en tiempo continuo que toma valores en un conjunto finito $S_\theta = \{1, 2, \cdots, L\}$; $L \in \mathbb{N}$ llamado espacio de estados y describe la evolución de θ_t en el tiempo t. Vamos a asumir que $\theta(0)$ y $x(0)$ son variables aleatorias independientes.

Definición 1. *Se dice que el proceso estocástico $x(t)$ es solución de (3.1) si para toda realización ω de $\theta(t)$, la ecuación (3.1) es satisfecha puntualmente, esto es,*

$$\dot{x}(t, \omega; x(0)) = A_{\theta(t,\omega)}x(t, \omega; 0).$$

A la solución $x(t)$ del sistema (3.1) se le llama también trayectoria solución.

3.1. Notaciones Principales y la matriz $\mathcal{A}$. En esta subsección presentamos ciertas notaciones las cuales serán utilizadas más adelante, las notaciones siguientes son fundamentales para analizar la estabilidad del sistema (3.1). Para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $i \in S_\theta$

$$Q_i(t) = E\{x(t)x(t)^T 1_{\{\theta(t)=i\}}\} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{3.2}$$

$$Q(t) = E\{x(t)x(t)^T\} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{3.3}$$

$$q_i(t) = vec(Q_i(t)) \in \mathbb{R}^{n^2} \tag{3.4}$$

$$q(t) \triangleq \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Notamos que las matrices presentadas en (3.2) y (3.3) son matrices semidefinidas positivas. Además que $Q(t)$ pueden ser expresado como sigue

$$\begin{aligned} Q(t) &= E\{x(t)x(t)^T\} \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^{N} x(t)x(t)^T 1_{\{\theta(t)=i\}}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} E\left\{x(t)x(t)^T 1_{\{\theta(t)=i\}}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} Q_i(t) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Teorema 1. *([7]) Sea el sistema* (3.1) *con trayectoria solución* $\{x(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$*, se cumple la siguiente ecuación diferencial*

$$\frac{\partial Q_j(t)}{\partial t} = A_j Q_j(t) + Q_j(t)A_j^T + \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ij} Q_i(t), j \in S_\theta \tag{3.7}$$

Demostración: Por la definición de $Q_j(t)$ y aplicando la derivada con respecto a t se obtiene:

$$\begin{aligned} dQ_j(t) &= E\{dx(t)x(t)^T 1_{\{\theta(t)=j\}} + x(t)dx(t)^T 1_{\{\theta(t)=j\}} + x(t)x(t)^T d1_{\{\theta(t)=j\}}\} \\ &= A_j E\{x(t)x(t)^T 1_{\{\theta(t)=j\}}\}dt + E\{x(t)x(t)^T 1_{\{\theta(t)=j\}}\}A_j^T dt + \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ij} E\{x(t)x(t)^T 1_{\{\theta(t)=i\}}\}dt. \end{aligned}$$

Así, obtenemos que

$$\frac{dQ_j(t)}{dt} = A_j Q_j(t) + Q_j(t)A_j^T + \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ij} Q_i(t),\ j \in S_\theta.$$

■

A continuación se introduce la matriz $\mathcal{A}$ que será de fundamental importancia para establecer diferentes resultados relacionados con la estabilidad del sistema

$$\mathcal{A} \triangleq (\Pi^T \otimes I_{n^2}) + diag[A_1 \oplus A_1, \ldots, A_L \oplus A_L] \tag{3.8}$$

donde $\oplus$ y $\otimes$ son la suma y producto de Kronecker, respectivamente.
Note que está matriz tiene la información de todos los parámetros del sistema y además contiene la información probabilística de la cadena de Markov en tiempo continuo. Enseguida se muestra que el sistema puede ser transformado en una ecuación diferencial ordinaria asociado a la matriz $\mathcal{A}$.

Teorema 2. *([7]) Sea el sistema* (3.1)*, el correspondiente vector columna* $q(t)$*, definido en* (3.5)*, es la solución del sistema*

$$z'(t) = \mathcal{A}z(t),\ z(0) = q(0) \in \mathbb{R}^{n^2} \tag{3.9}$$

Demostración: Vamos a aplicar la función vec a la ecuación (3.7), obteniéndose

$$\begin{aligned} vec(\dot{Q}_j(t)) &= vec\left(A_jQ_j(t) + Q_j(t)A_j^T + \sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}Q_i(t)\right),\ j \in S_\theta \\ &= vec(A_jQ_j(t)I_n) + vec(I_nQ_j(t)A_j^T) + vec\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}I_nQ_i(t)I_n\right) \end{aligned}$$

$$vec(\dot{Q}_j(t)) = (I_n \otimes A_j)vec(Q_j(t)) + (A_j \otimes I_n)vec(Q_j(t)) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}(I_n \otimes I_n)vec(Q_i(t)).$$

De la ecuación (3.4), se tiene

$$\dot{q}_j(t) = (I_n \otimes A_j)q_j(t) + (A_j \otimes I_n)q_j(t) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}(I_n \otimes I_n)q_i(t).$$

Ahora partimos de la ecuación (3.5), así

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \begin{pmatrix} (I_n \otimes A_1)q_1(t) + (A_1 \otimes I_n)q_1(t) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_{i1}(I_n \otimes I_n)q_i(t) \\ \vdots \\ (I_n \otimes A_N)q_N(t) + (A_N \otimes I_n)q_N(t) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_{iN}(I_n \otimes I_n)q_i(t). \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_n \otimes A_1 + A_1 \otimes I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I_n \otimes A_N + A_N \otimes I_n \end{pmatrix} q(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1N} & \dots & \lambda_{NN} \end{pmatrix}}_{\Pi^T} \otimes \underbrace{(I_n \otimes I_n)}_{I_{n^2}} q(t) \\ &= \{diag(I_n \otimes A_1 + A_1 \otimes I_n, \dots, I_n \otimes A_N + A_N \otimes I_n) + \Pi^T \otimes I_{n^2}\}q(t) \\ &= \{\Pi^T \otimes I_{n^2} + diag(A_1 \oplus A_1, \dots, A_N \oplus A_N)\}q(t) \\ &= \mathcal{A}q(t). \end{aligned}$$

■

Observe que la ecuación tiene una forma clásica, de donde la solución es

$$q(t) = e^{\mathcal{A}t}q(0) \tag{3.10}$$

4. Estabilidad del sistema lineal. Uno de los problemas más importantes de un sistema lineal es el análisis de su estabilidad. Estabilidad es la característica más importante que debe cumplirse entre los requerimientos a la hora de diseñar un sistema de control. Sin estabilidad, las otras dos especificaciones, respuesta transitoria y error en estado estable, son irrelevantes. A continuación presentamos las definiciones de estabilidad para el sistema (3.1).

4.1. Tipos de estabilidad. **Definición 2.** *Se dice que el sistema* (3.1) *es*

a) *Estable en media cuadrática (EMC) si para cualquier* $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *y cualquier* $\theta(0) \in \Theta$ *se cumple*

$$\lim_{k\to\infty} Q(k) = 0$$

b) *Estocásticamente estable (SS) si para cualquier* $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *y cualquier* $\theta(0) \in \Theta$*, existe una constante* $K(x(0), \theta(0)) = K > 0$ *tal que:*

$$E\left\{\int_0^\infty x^T(t)x(t)dt \middle| x(0) = x_0, \theta(0) = \theta_0\right\} < K(x(0), \theta(0)).$$

c) *Exponencialmente medio estable (EMS) si para cualquier* $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *y cualquier* $\theta(0) \in \Theta$*, existen constantes positivas* α *y* β *tal que:*

$$E\{\|x(t)\|^2\} \leq \alpha e^{-\beta t}E\{\|x_0\|^2\}.$$

4.2. Test computacional de la estabilidad. En esta subsección analizamos la estabilidad de (3.1) en términos del radio espectral de la matriz $\mathcal{A}$. El resultado que se presenta constituye un test fácilmente implementable, por ejemplo, en MATLAB, con el que se puede determinar la estabilidad del sistema. Para llegar al resultado principal presentaremos resultados auxiliares que nos ayudaran para la demostración del resultado principal.

Lema 1. *El sistema* (3.1) *es EMC si y solo si para cualquier* $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *y para cualquier* $\theta(0) \in \Theta$ *se cumple*

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = 0. \tag{4.1}$$

Demostración:
Asumamos que el sistema es EMC. De la desigualdad

$$\|Q_i(t)\| = \left\|E\{x(t)x^T(t)1_{\{\theta(t)=i\}}\}\right\| \leq \left\|E\{x(t)x^T(t)\}\right\| = \|Q(t)\|$$

se sigue que $\lim\limits_{t\to+\infty} Q_i(t) = 0$ y como el operador vec es continuo entonces $\lim\limits_{k\to+\infty} q_i(t) = 0$. De aquí se concluye inmediatamente (4.1).

Si $\lim\limits_{k\to+\infty} q(t) = 0$ entonces $\lim\limits_{t\to+\infty} q_i(t) = 0$ lo que es equivalente a decir que $\lim\limits_{t\to+\infty} Q_i(t) = 0$, se concluye que el sistema (3.1) es EMC. ■

El siguiente resultado provee una herramienta de fácil implementación computacional para analizar si el sistema (3.1) es EMC, mediante el radio espectral de la matriz $\mathcal{A}$.

Teorema 3. *El sistema* (3.1) *es EMC si y solo si* $Re(\lambda(A)) < 0$.

Demostración: Si el sistema es EMC, entonces por el teorema 1 se tiene $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = 0$. Como $x(0)$ y $\theta(0)$ son arbitrarios y teniendo en cuenta que

$$Q_i(0) = E\left\{x(0)x^T(0)\right\} E\left\{1_{\{\theta(0)=i\}}\right\} = E\left\{x(0)x^T(0)\right\}\pi_i,$$

entonces por la descomposición de Jordan de $\mathcal{A}$ y por (3.10) se deduce que $Re(\lambda(A)) < 0$.

Si $Re(\lambda(A)) < 0$ entonces tomando límite a ambos lados de (3.10) se tiene $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = 0$, se concluye que el sistema es EMC. ■

A continuación se presenta un ejemplo para ver como funciona el teorema anterior.

Ejemplo 1. *Sea* $S_\theta = \{1, 2\}$, *se tiene que*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Pi = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Notamos que $Re(\lambda(A_1)) = 1 > 0$ *y* $Re(\lambda(A_2)) = 1 > 0$ *esto implica que en cada modo es inestable, pero notamos que* $Re(\lambda(\mathcal{A})) < 0$ *esto implica que el sistema* (3.1) *es EMC. Esto implica que si cada modo es inestable no implica que el sistema lo sea.*

4.3. Equivalencia de Estabilidades. En esta subsección se establecen la relaciones entre los diferentes tipos de estabilidad introducidos en la sección de estabilidad. Se prueba que bajo la condición de ser S_θ un espacio de estados finito, las nociones de estabilidad (a)-(c) son equivalentes

El teorema 4 se establecen dos desigualdades que van a ser útiles en la demostración de los teoremas 5 y 6.

Teorema 4. *Sea* $Q(t)$ *la matriz, entonces:*

$$\frac{1}{n}E\{\|x(t)\|^2\} \leq \|Q(t)\|_{\text{máx}} \leq E\{\|x(t)\|^2\} \tag{4.2}$$

Teorema 5. *El sistema* (3.1) *es EMC si y solo si es SS.*

Teorema 6. *El sistema* (3.1) *es EMC si y solo si es MSE.*

4.4. Ecuación de Lyapunov. En esta subsección se presenta una ecuación del tipo Lyapunov, la cual notamos que es una generalización de la ecuación de Lyapunov de una ecuación diferencial ordinaria. Previamente se presentan algunas definiciones previas.

Definición 3. *El generador infinitesimal débil $\mathcal{L}(\cdot)$ del proceso de Markov $\{(x(t),\theta(t)), t\geq 0\}$, también llamado el derivado promedio en el punto $(x(t)=x,\theta(t)=i)$ actuando en función $V(\cdot)$ es definido por la siguiente expresión:*

$$\mathcal{L}V(x(t)\theta_t)=\lim_{h\to 0^+}\frac{E\left\{V(x(t+h),\theta(t+h))|x(t)=x,\theta(t)=i\right\}-V(x,i)}{h}$$

A continuación, vamos a considerar un sistema dinámico (3.1), para cada $t\geq 0$.

Teorema 7. *([11]) El sistema (3.1) es estocásticamente estable si y solo si para cualquier conjunto de matrices simétricas $\{W_i>0: i\in S_\theta\}$, existe un conjunto de matrices simétricas $\{M_i>0: i\in S_\theta\}$ que es solución de la siguiente ecuación, para cada $i\in S_\theta$,*

$$A_i^T M_i + M_i A_i + \sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}M_j = -W_i. \tag{4.3}$$

Demostración: La demostración se basa en dos etapas. En primer lugar probaremos que el sistema es estocásticamente estable. En efecto, vamos a asumir que M_i, para cada $i\in S_\theta$, resuelve la ecuación (4.3). Consideremos la función de Lyapunov estocástica siguiente :

$$V(x(t),\theta(t))=x^T(t)M_{\theta(t)}x(t)$$

En el instante t, establecemos lo siguiente: $x(t)=x$ y $\theta(t)=i$, para $i\in S_\theta$. El generador infinitesimal débil actuando en $V(\cdot)$ y que empieza desde el punto (x,i) en el instante t está dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x(t),i) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}E\left\{V(x(t+h),\theta(t+h))-V(x,i)|x(t)=x,\theta(t)=i\right\}\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}E\left\{x^T(t+h)M_{\theta(t+h)}x(t+h)-x^TM_ix|x(t)=x,\theta(t)=i\right\}.\end{aligned}$$

Dado la ecuación (3.1), la expresión anterior queda como sigue

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(x(t),i) &= \sum_{j=1}^{N}x(t)^TM_jx(t)\lambda_{ij}+x(t)^TM_iA_ix(t)+x(t)^TA_i^tM_ix(t)\\ &= x(t)^T\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{N}M_j\lambda_{ij}+M_iA_i+A_i^tM_i}_{-W_i}\right)x(t)\\ &= -x(t)^TW_ix(t).\end{aligned}$$

Usando la Desigualdad de Rayleigh, se tiene que

$$\lambda_{\text{mín}}(W_i)x^T(t)x(t)\leq x^T(t)W_ix(t)\leq\lambda_{\text{máx}}(W_i)x^T(t)x(t).$$

Usando la expresión anterior con una de las desigualdades, obtenemos

$$\mathcal{L}V(x(t),i)=-x(t)^TW_ix(t)\leq-\lambda_{\text{mín}}(W_i)x^T(t)x(t)\leq-\min_{i\in S_\theta}(\lambda_{\text{mín}}(W_i))x^T(t)x(t). \tag{4.4}$$

Por la fórmula de Dynkin, obtenemos:

$$E\left\{V(x(t),i)|x(0)=x_0,\theta(0)=\theta_0\right\}-V(x(0),\theta(0))=E\left\{\int_0^t\mathcal{L}V(x(s),\theta(s))ds\middle|x(0)=x_0,\theta(0)=\theta_0\right\}$$

se deduce que

$$\min_{i\in S_\theta}(\lambda_{\text{mín}}(W_i))E\left\{\int_0^t x(t)^Tx(t)ds\;\middle|\;x(0)=x_0,\theta(0)=\theta_0\right\}\leq V(x_0,\theta_0)=E\{V(x_0,\theta_0)\}.$$

Esto implica que

$$E\left\{\int_0^t x(t)^T x(t)ds \;\middle|\; x(0)=x_0,\theta(0)=\theta_0\right\} \leq \frac{E\{V(x_0,\theta_0)\}}{\min\limits_{i\in S_\theta}(\lambda_{\text{mín}}(W_i))}$$

para cualquier $t>0$ dejamos que $t\to\infty$. Esto es,

$$E\left\{\int_0^\infty x(t)^T x(t)ds \;\middle|\; x(0)=x_0,\theta(0)=\theta_0\right\} \leq \frac{E\{V(x_0,\theta_0)\}}{\min\limits_{i\in S_\theta}(\lambda_{\text{mín}}(W_i))},$$

es acotado por una constante $K(x_0,\theta_0)$ dado como sigue

$$K(x_0,\theta_0)=\frac{E\{V(x_0,\theta_0)\}}{\min\limits_{i\in S_\theta}(\lambda_{\text{mín}}(W_i))}.$$

Reemplazando lo anterior, resulta

$$E\left\{\int_0^\infty x(t)^T x(t)ds\middle|x_0,\theta_0\right\} \leq K(x_0,\theta_0).$$

Por lo tanto, el sistema (3.1) es estocásticamente estable.

Ahora probaremos el otro sentido. Sabemos por hipótesis que el sistema es estocásticamente estable, es decir,

$$E\left\{\int_0^\infty x^T(t)x(t)dt\middle|x(0)=x_0,\theta(0)=\theta_0\right\} < K(x(0),\theta(0)) < \infty,\ \forall x_0\in\ \mathbb{R}^N.$$

Esto nos produce lo siguiente

$$E\left\{\int_0^\infty x^T(t)W_i x(t)dt\middle|x(0)=x_0,\theta(0)=\theta_0\right\} < \infty,$$

para alguna matriz $\{W_i>0, i\in S_\theta\}$ simétrica y definida positiva.
Vamos a considerar que partimos desde el punto (x,i) en el instante t (como en el caso de la suficiencia).
Definimos la función Ψ de la forma siguiente:

$$\Psi(T,t,x(t),i) \triangleq E\left[\int_t^T x^T(s)W_{\theta(s)}x(s)ds\middle|x(t)=x,\theta(t)=i\right]. \tag{4.5}$$

Haciendo un cambio $u=s-t$, tenemos:

$$\Psi(T,t,x(t),i)=E\left[\int_0^{T-t} x^T(u+t)W_{\theta(u+t)}x(u+t)du\middle|x(t)=x,\theta(t)=i\right].$$

Usando la propiedad homogénea en tiempo continuo, tenemos

$$\begin{aligned}\Psi(T,t,x(t),i)&=\Psi(T-t,x(t),i)\\&=E\left[\int_0^{T-t} x^T(v)W_{\theta(v)}x(v)dv\middle|x(0)=x,\theta(0)=i\right]\end{aligned}$$

Esto quiere decir que ahora las condiciones iniciales están dadas en el instante inicial $t=0$, donde $x(0)=x=x_0$ y $\theta(0)=i=\theta_0$. Esto es,

$$\begin{aligned}\Psi(T,t,x(t),i)&=\Psi(T-t,x(t),i)\\&=E\left[\int_0^{T-t} x^T(v)W_{\theta(v)}x(v)dv\;\middle|x(0)=x_0,\theta(0)=\theta_0\right]\end{aligned}$$

Sea Φ la matriz de transición del sistema (3.1), tenemos

$$x(v)=\Phi(v,t)x(t).$$

Reemplazando en la expresión anterior, se produce

$$\begin{aligned}\Psi(T,t,x(t),i) &= x^T(t)E\left[\int_0^{T-t}\Phi^T(v,t)W_{\theta(v)}\Phi(v,t)dv\middle|x(0)=x_0,\theta(0)=\theta_0\right]x(t)\\ &\triangleq x^T(t)M(T-t,i)x(t)\end{aligned}$$

Llegamos a la conclusión que la función $x^T(t)M(T-t,i)x(t)$ es acotada y monótona creciente, es decir, es convergente.

De lo anterior, notamos que existe una función de valor matricial acotada $M_i \in \mathbb{R}^{N\times N}$ tal que

$$M_i = \lim_{T\to\infty} M(T,i).$$

Además, la matriz M_i es definida positiva $\{M_i > 0, \forall i \in S_\theta\}$. Esto se puede ver claramente de como está definido $\Psi(T-t,x(t),i)$.
Sea T un tiempo arbitrario y fijo. Para algún $T > s > t > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E[\Psi(T-t,x,i)] &= \lim_{s\to t}\frac{1}{s-t}\left[E(\Psi(T-s,x(s),\theta(s))|x,i)-\Psi(T-t,x,i)\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Psi(T-t,x,i)+\mathcal{L}\Psi(T-t,x,i)\\ &= x^T(t)[A_i^TM(T-t,i)+M(T-t,i)A_i]x(t)\\ &+\sum_{j=1}^N\lambda_{ij}x^T(t)M(T-t,j)x(t)+x^T(t)\frac{\partial}{\partial t}M(T-t,i)x(t)\\ &= x^T(t)\left[\frac{\partial}{\partial t}M(T-t,i)+A_i^TM(T-t,i)+M(T-t,i)A_i\right.\\ &\left.+\sum_{j=1}^N\lambda_{ij}M(T-t,j)\right]x(t).\end{aligned}\tag{4.6}$$

Por otro lado, de la ecuación (4.5), tenemos

$$\begin{aligned}E[\Psi(T-s,x(s),\theta(s))|x,i]-\Psi(T-t,x,i) &= E[\Psi(T-s,x(s),\theta(s))-\Psi(T-t,x,i)|x,i]\\ &= E\left\{E\left[\int_s^T x^T(v)W_{\theta(v)}x(v)dv\middle|x(s),\theta(s)\right]\right.\\ &\left.-E\left[\int_t^T x^T(v)W_{\theta(v)}x(v)dv\middle|x,i\right]\middle|x,i\right\}\\ &= E\left\{\int_s^T x^T(v)W_{\theta(v)}x(v)dv\right.\\ &\left.-\int_t^T x^T(v)W_{\theta(v)}x(v)dv\middle|x,i\middle|x,i\right\}\\ &= -E\left\{\int_0^{s-t}x^T(u)W_{\theta(u)}x(u)du\middle|x(0)=x,\theta(0)=i\right\}\\ &= -x^TE\left\{\int_0^{s-t}\Phi^T(u,t)W_{\theta(u)}\Phi(u,t)du\middle|\theta(0)=i\right\}x.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t}\frac{1}{s-t}E\left\{\int_0^{s-t}\Phi^T(u,t)W_{\theta(u)}\Phi(u,t)du\middle|\theta(0)=i\right\} &= \lim_{s\to t}E\left\{\frac{1}{s-t}\int_0^{s-t}W_{\theta(u)}du\middle|\theta(0)=i\right\}\\ &= E[W_i|\theta(0)=i]=W_i\end{aligned}$$

ya que $\Phi(0)=I$ (Propiedad del semigrupo).
Esto implica que

$$\frac{d}{dt}E\Psi(T-t,x,i) = -x^TW_ix.\tag{4.8}$$

Cuando $T \to \infty$ en la ecuación (4.6), se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} P(T - t, j) \to 0$$

Entonces, las ecuaciones (4.6),(4.7) y (4.8) nos da el resultado de la ecuación matricial formulada en el teorema. ■

5. Conclusiones.

- En este artículo se presentó la teoría de la estabilidad del sistemas (3.1), la cual es una generalización de la teoría clásica.
- Se presentó los tipos de estabilidad, la cual son consistentes con respecto al sistema (3.1). Además se verifico que dichos tipos de estabilidades son equivalentes, siempre bajo ciertas condiciones.
- Por último se presentó un test para analizar la estabilidad y para analizar la estabilidad estocástica se hace mediante la ecuación de lyapunov.

6. Agradecimiento. Los autores agradecen a las autoridades de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería por su apoyo y financiamiento para dicha investigación. Esta investigación fue apoyada por CAR-FC-UdI bajo concesión 105-2018.

7. Acknowledgements. The authors thank the authorities of the Faculty of Science of the National University of Engineering for their support and funding for such research. This research was supported by CAR-FC-UdI under grant 105-2018

ORCID and License
Jorge Enrique Mayta Guillermo https://orcid.org/0000-0002-7872-1639
William C. Echegaray Castillo https://orcid.org/0000-0002-6922-4059
Martin E. Berrospi Zapana https://orcid.org/0000-0002-8235-0674

Referencias

[1] Stoica A, Yaesh I. *Jump-Markovian based control of wing deployment for an uncrewed air vehicle.* Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2002; 25:407-411.
[2] Sworder DD, Rogers RO. *An LQG solution to a control problem with solar thermal receiver.* IEEE Transactions on Automatic Control. 1983; 28:971-978.
[3] Meskin N, Khorasani K. *Fault detection and isolation of discrete-time Markovian jump linear systems with application ot a network of multi-agent systems having imperfect comunication channels.* Automatica. 2009; 45:2032-2040.
[4] Blair WP, Sworder DD. *Continuous- time regulation of class of econometric models* IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics SMC-5. 1975; 341-346.
[5] Krishna B., Soumendra N. *Measure theory and probability theory.* New York: Springer; 2006.
[6] Roger A., Charles R. *Matrix Analysis.* Second Edition. Cambridge University Press; 2013.
[7] Costa O. *Continuous-time Markov jump linear systems.* New York: Springer; 2013.
[8] Boukas E. *Control of singular systems with random abrupt changes.* Berlin: Springer; 2008.
[9] Yin G, Zhang Q. *Continuous-Time Markov Chains and Applications.* Second Edition. Springer; 2013.
[10] Jerzy Zabczyk. *Mathematical Control Theory: An introduction.* Boston: Birkhäuser: 1992.
[11] Fang Y. *Stability analysis of linear control systems with uncertain parameters* . Ph.D. Dissertation. Cleveland, London. Deparment of Systems, Control, and Industrial Engineering, Case Western Reserve University, 1998.