



Um estudo numérico do modelo de Timoshenko com mecanismos dissipativos

A numerical study of the Timoshenko model with dissipative mechanisms

Bruna T. S. Sozzo  and Frank H. Acasiete Q. 

Received, Mar. 24, 2020

Accepted, Jun. 12, 2020



How to cite this article:

Sozzo B, Acasiete F. *Um estudo numérico do modelo de Timoshenko com mecanismos dissipativos*. *Selecciones Matemáticas*. 2020;7(1):176–182. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.01.17>

Resumo

Neste trabalho reunimos trabalhos da literatura que apresentam o estudo qualitativo via semigrupos lineares para o Sistema de Vigas de Timoshenko com mecanismos dissipativos. Tais problemas, não possuem solução analítica, mas com o uso da teoria de exponenciais de operadores não limitados e ferramentas de Análise Funcional é possível fazer a análise assintótica para os modelos apresentados. Sendo assim, o objetivo do trabalho é fazer uma análise numérica, usando métodos de diferenças finitas, mostrando que os resultados qualitativos verificados pela teoria de semigrupos, é verificada para viga com o material concreto e o material alumínio.

Palavras-chave. Estabilidade Exponencial, Mecanismos Dissipativos, Diferenças Finitas.

Abstract

In this work we gather works from the literature that present the qualitative study via linear semigroups to the Timoshenko Beams System with dissipative mechanisms. Such problems do not have an analytical solution, but with the use of the exponentials theory of non-limited operators and Functional Analysis tools, it is possible to perform the asymptotic analysis for the models presented. Therefore, the objective of the work is accomplish a numerical analysis, using finite difference methods. We show that the qualitative results, proven by the semigroup theory, are verified for beam with concrete material and aluminum material.

Keywords . Exponential Stability, Dissipative Mechanisms, Finite Differences.

1. Introdução. Quando trabalhamos com projetos voltados à engenharia, como por exemplo, projetos de aviões, turbinas, pontes, automóveis, é necessário aplicação de modelos que sejam eficientes durante o funcionamento. Um fenômeno que deve ser estudado e analisado em todos eles é a vibração estrutural. A análise de qualquer problema que tenha como foco principal de estudo a vibração, pode ser abordado teoricamente e experimentalmente. Devido a fatores climáticos, alguns problemas podem ser estudados apenas do ponto de vista teórico, devido à complexidade de algumas situações, é possível estudar apenas de maneira experimental, e ainda, também é possível que notemos corroboração de estudos teóricos e experimentais. Nos últimos anos, nota-se o crescente interesse da engenharia em problemas que envolvem estruturas flexíveis sujeitas a vibrações. Quando o assunto é vibração, a viga é um dos elementos fundamentais de uma estrutura. Por este motivo, o estudo qualitativo de problemas relacionados a vibrações de vigas têm sido assunto de bastante interesse da matemática aplicada. As teorias para vigas começaram a ser estudadas no século XVIII, por Bernoulli e Euler [12]. Os modelos mais conhecidos de vigas são os modelos de Euler-Bernoulli, Vlasov e Timoshenko. Os diferentes tipos de modelos para vigas, possuem aplicações diferentes, com vantagens e desvantagens. Nesse trabalho, iremos nos limitar ao estudo de vigas de Timoshenko, pois seu modelo é mais completo em relação aos outros dois modelos. O sistema de

*Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis/RJ - Brasil (bsozzo@lncc.br).

†Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis/RJ - Brasil (frankhaq@lncc.br).

Vigas de Timoshenko, [1, 2], descreve o comportamento vibratório de uma viga, medindo deslocamento transversal e ângulo de rotação descritas pelas funções φ e ψ , ilustradas a seguir.

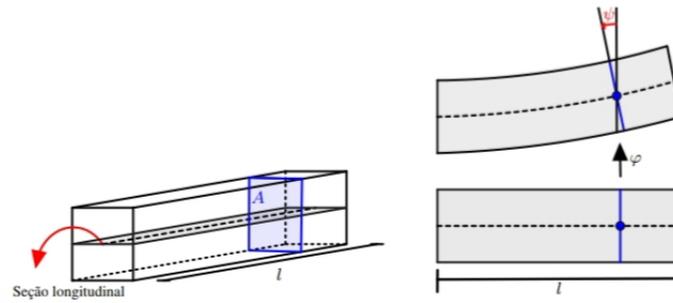


Figura 1.1: Viga de Timoshenko.

Fonte: Autor

Devido a essas considerações, o sistema de Vigas de Timoshenko é considerado mais geral e realista do que os demais citados anteriormente. Na figura 1.1, A representa a área da seção transversal da viga e ainda, o eixo da seção longitudinal carrega as propriedades da viga, por este motivo, o modelo de Timoshenko é considerado em apenas uma dimensão. O sistema que descreve o comportamento da viga é dado por

$$(1.1) \quad \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, T). \end{cases}$$

No sistema (1.1), as variáveis $\varphi(x, t)$ e $\psi(x, t)$, dependem do espaço $x \in (0, L)$ e tempo $t \in (0, T)$, as constantes ρ_1, ρ_2, k e b representam a massa específica da viga, a resistência à deformação torcional, o módulo de rigidez e o módulo de elasticidade por momento de inércia da seção transversal, respectivamente. Mais detalhes para a dedução do modelo pode ser encontrado em [3].

O trabalho principal é dividido em duas seções, sendo que, a Análise Qualitativa, que introduz os problemas e suas respectivas literaturas, as quais fazem uso da teoria de semigrupos para mostrar a análise qualitativa de cada problema. A Análise Numérica, que é a principal contribuição do trabalho, apresenta um estudo numérico utilizando diferenças finitas, para os problemas com mecanismos dissipativos atuando de maneiras diferentes na viga.

2. Análise Qualitativa. Nesta seção, enunciaremos o principal resultado da teoria de exponencial de operadores, quando o assunto é tratar de estabilidade exponencial. Mais resultados da teoria podem ser encontrados em livros clássicos como [7, 5, 6, 10]. A seguir, enunciaremos os problemas que trataremos no trabalho junto com a análise qualitativa matemática.

Teorema 1 (Teorema de Prüss). *Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo C_0 de contrações em um espaço de Hilbert. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, as seguintes condições são verificadas.*

1. $i\lambda \in \rho(A), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - A)^{-1}\| < \infty$.

2.1. Sistema de Timoshenko com mecanismos dissipativos nas duas variáveis. O primeiro sistema trabalhado é o sistema de Timoshenko com dois termos dissipativos friccionais $\beta\varphi_t$ e $\gamma\psi_t$, atuando sob a deformação e sob ângulo de rotação, respectivamente. Assim de (1.1) segue que

$$(2.1) \quad \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \beta\varphi_t = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma\psi_t = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L). \end{cases}$$

No sistema (2.1), os mecanismos dissipativos atuam uniformemente ao longo da viga de comprimento L , de modo que, β e γ são constantes positivas. O trabalho [13] mostra o decaimento exponencial para a solução do sistema. Já para $\beta = \beta(x) \geq 0, \forall x \in (0, L)$ e $\gamma = \gamma(x) \geq 0, \forall x \in (0, L)$, ou seja, mecanismos atuando de maneira pontual foi estudado por [18], que também mostrou decaimento exponencial para as soluções.

2.2. Sistema de Timoshenko com mecanismo dissipativo atuando na deformação. O segundo sistema é o sistema de Timoshenko com um termo dissipativo, atuando sob a deformação transversal da viga. Assim

$$(2.2) \quad \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \beta \varphi_t = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L). \end{cases}$$

No sistema (2.2), em que o mecanismo dissipativo atua uniformemente ao longo da viga de comprimento L , isto é, β é uma constante positiva é estudado por [14], que mostra a estabilidade exponencial com uma restrição. Para que haja estabilidade exponencial é necessário que a identidade $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$ seja satisfeita, isto é, a velocidade de propagação de ondas no sistema é igual. Para $\beta = \beta(x) \geq 0, \forall x \in (0, L)$, ou seja, o mecanismo está atuando pontualmente no sistema, foi estudado por [4] que também mostrou decaimento exponencial para as soluções sob a mesma hipótese, isto é, $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$.

2.3. Sistema de Timoshenko com mecanismo dissipativo atuando no ângulo de rotação. O terceiro sistema é o sistema de Timoshenko com um termo dissipativo, atuando sob o ângulo de rotação da viga. Logo, de (1.1) segue que

$$(2.3) \quad \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma \psi_t = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L). \end{cases}$$

No sistema (2.3), em que o mecanismo dissipativo atua uniformemente ao longo da viga de comprimento L , isto é, γ é uma constante positiva, é estudado por [15], que mostra a estabilidade exponencial com uma restrição. Para que haja estabilidade exponencial, os autores mostraram que é necessário que a identidade $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$ seja satisfeita para $\gamma = \gamma(x) \geq 0, \forall x \in (0, L)$, ou seja, o mecanismo está atuando pontualmente no sistema, foi estudado por [8], que também mostrou decaimento exponencial para as soluções sob a mesma hipótese, isto é, $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$.

3. Análise Numérica. Para a implementação numérica, usamos o método de diferenças finitas explícito. Por considerarmos o método explícito, foi realizado um estudo a respeito da estabilidade da solução numérica do problema. Para que haja convergência do método, é necessário que a desigualdade a seguir, $\Delta t \leq \Delta x \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{E}}$, seja satisfeita. Nós fixamos o comprimento da viga com $L = 1$ e calculamos a solução dos sistemas para alguns valores de T , como poderá ver nas figuras a seguir. A fim de não violarmos as condições de estabilidade, fixamos os valores $\Delta t = 0.025$ e $\Delta x = 0.05$, para espaçamento no tempo e espaço, respectivamente. Já os valores da massa específica, ρ , e o módulo de elasticidade, E , foram adotados de acordo com as propriedades mecânicas de materiais típicos de engenharia, valores do Sistema Internacional de Unidades (SI), e que podem ser encontrados no livro [19].

Utilizamos a hipótese de que as vigas possuem suas extremidades engastadas, isto é, condições de contorno de Dirichlet. Alguns trabalhos mencionados na Seção 2, também possuem condições de contorno de Neumann, ressaltamos que os mesmos resultados são válidos quando consideramos condições de contorno de Dirichlet. Como condições iniciais: $\varphi(x, 0) = 4 \sin(4\pi x)$, $\varphi_t(x, 0) = 4 \sin(4\pi x) + 2\Delta t \sin(4\pi x)$, $\psi(x, 0) = 4 \sin(4\pi x)$ e $\psi_t(x, 0) = 4 \sin(4\pi x) + 2\Delta t \sin(4\pi x)$. Para os sistemas descritos acima, utilizamos as seguintes discretizações:

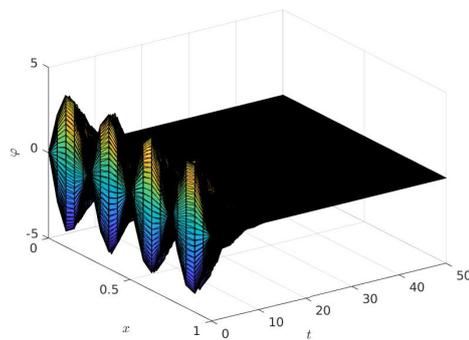
$$\varphi_{tt} = \frac{\varphi_i^{t+1} - 2\varphi_i^t + \varphi_i^{t-1}}{\Delta t^2}, \quad \varphi_{xx} = \frac{\varphi_{i+1}^t - 2\varphi_i^t + \varphi_{i-1}^t}{\Delta x^2}, \quad \psi_x = \frac{\psi_i^t - \psi_{i-1}^t}{\Delta x}, \quad \varphi_t = \frac{\varphi_i^t - \varphi_i^{t-1}}{\Delta t},$$

$$\psi_{tt} = \frac{\psi_i^{t+1} - 2\psi_i^t + \psi_i^{t-1}}{\Delta t^2}, \quad \psi_{xx} = \frac{\psi_{i+1}^t - 2\psi_i^t + \psi_{i-1}^t}{\Delta x^2}, \quad \varphi_x = \frac{\varphi_i^t - \varphi_{i-1}^t}{\Delta t}, \quad \psi_t = \frac{\psi_i^t - \psi_i^{t-1}}{\Delta t}.$$

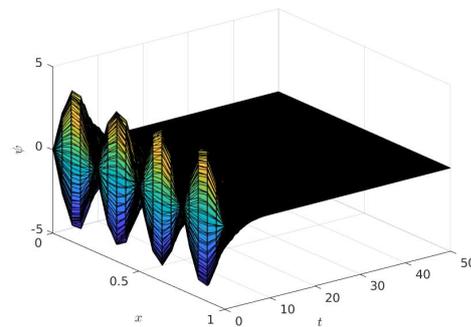
Soluções para o sistema (2.1): A tabela a seguir contém os valores dos parâmetros utilizados para a implementação da solução do sistema de Timoshenko com mecanismo dissipativo uniforme nas duas variáveis. Para o mecanismo atuando de maneira pontual, desde que escolhamos parâmetros que não violem a condição de estabilidade do método, são produzidos resultados semelhantes. O valores de ρ_1, ρ_2, b e k foram retirados do livro [19], adotando a área da seção transversal igual a $A = 0.1$ e momento de inércia $I = \frac{1}{12}$. Para mais detalhes de como os cálculos foram realizados, definições sobre as constantes e seus valores respectivos, veja [3].

Tabela 3.1: Problema com mecanismo dissipativo nas duas variáveis.

Material	ρ_1	ρ_2	b	k	β	γ	ϵ	Convergência $\varphi(t)$	Convergência $\psi(t)$
Alumínio	0.279	0.2325	6.0916	2.7	0.1	0.1	10^{-4}	42.1821	37.5819
Concreto	0.238	0.1941	1.8416	1.2	0.1	0.1	10^{-4}	35.8918	32.1963

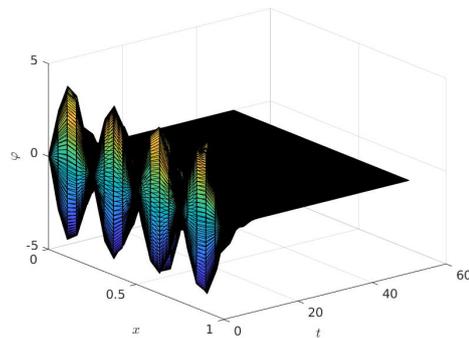


(a) Função de Deformação.

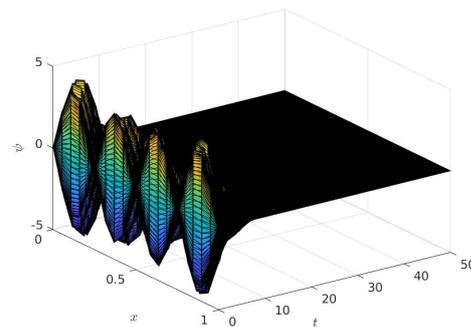


(b) Função de Rotação.

Figura 3.1: Solução para viga de alumínio.



(a) Função de Deformação.



(b) Função de Rotação.

Figura 3.2: Solução para viga de concreto.

Observe que para ambos os materiais, a estabilização da perturbação atua de maneira mais rápida no ângulo de rotação do que no deslocamento transversal, usando os mesmos mecanismos dissipativos. E ainda vale observar que, a viga de concreto se estabiliza mais rápido, uma vez que, assumimos o valor do módulo de rigidez maior para o alumínio.

Soluções para o sistema (2.2): A tabela a seguir contém os valores dos parâmetros utilizados para a implementação da solução do sistema de Timoshenko com mecanismo dissipativo uniforme atuando apenas

na variável de deformação transversal, isto é, a variável φ . Novamente para o mecanismo atuando de maneira pontual, desde que escolhamos parâmetros que não violem a condição de estabilidade do método, obteremos resultados semelhantes. Também consideramos os valores para ρ_1, ρ_2, b e k da referência [19], adotando a área da seção transversal igual a $A = 0.1$ e momento de inércia $I = \frac{1}{12}$. Quanto à condição de estabilidade do problema do ponto de vista matemático, isto é, aquele obtido pela teoria de semigrupos, $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$, não é verificado do ponto de vista físico, veja [20]. Deste modo, para que haja coerência nos resultados simulados, consideramos valores aproximados.

Tabela 3.2: Problema com mecanismo dissipativo na deformação transversal.

Material	ρ_1	ρ_2	b	k	β	γ	ϵ	Convergência φ (t)	Convergência ψ (t)
Alumínio	0.279	0.2325	6.0916	2.7	1	0	10^{-2}	+100	+100
Concreto	0.238	0.1941	1.8416	1.2	1	0	10^{-2}	48.1012	50.9438

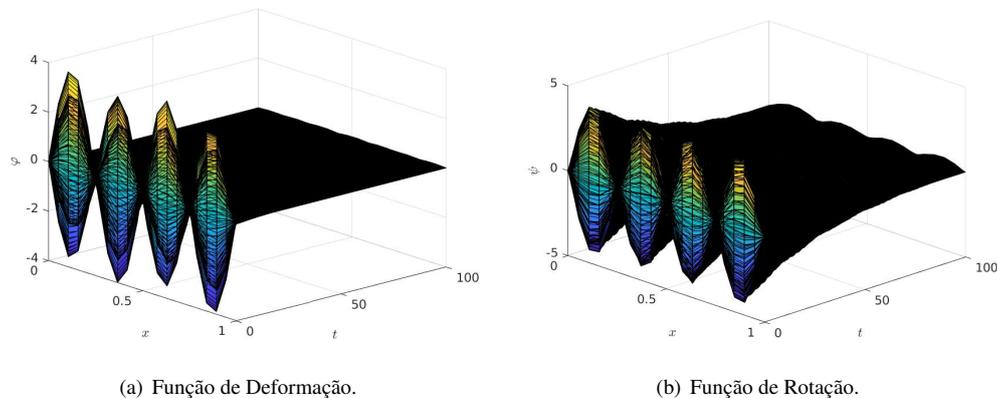


Figura 3.3: Solução para a viga de alumínio.

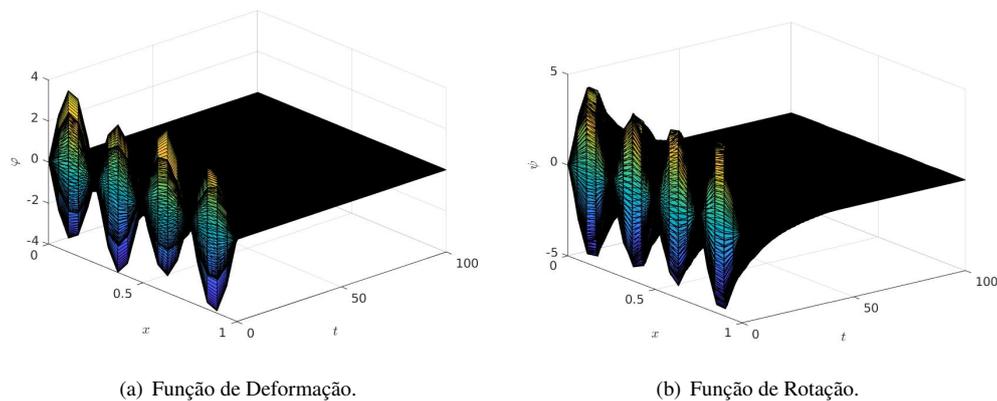


Figura 3.4: Solução para a viga de concreto.

A fim de comparar os valores de convergência, para este problema, mudamos o valores dos parâmetros β e a tolerância ϵ . É possível observar que a diferença de convergência do sistema (2.1) e (2.2) é muito grande. Com um mecanismo dissipativo atuando na deformação transversal, pudemos observar que a diferença de tempo para que o sistema se estabilize é muito pequeno quando comparamos rotação e deslocamento. Ainda vale ressaltar que, novamente, a deformação na viga de concreto é estabilizada mais rapidamente.

Soluções para o sistema (2.3): A tabela a seguir contém os valores dos parâmetros utilizados para a implementação da solução do sistema de Timoshenko com mecanismo dissipativo uniforme atuando apenas na variável relacionada ao ângulo de rotação. Novamente para o mecanismo atuando de maneira pontual, desde que escolhamos parâmetros que não violem a condição de estabilidade do método, obteremos resultados semelhantes. Também consideramos os valores para ρ_1, ρ_2, b e k da referência [19], adotando a área da seção transversal igual a $A = 0.1$ e momento de inércia $I = \frac{1}{12}$. A mesma observação foi levada em conta no que diz respeito à igualdade de propagação de ondas.

Tabela 3.3: Problema com mecanismo dissipativo no ângulo de rotação.

Material	ρ_1	ρ_2	b	k	β	γ	ϵ	Convergência $\varphi(t)$	Convergência $\psi(t)$
Alumínio	0.279	0.2325	6.0916	2.7	0	1	10^{-2}	+100	54.7364
Concreto	0.238	0.1941	1.8416	1.2	0	1	10^{-2}	67.2142	20.5630

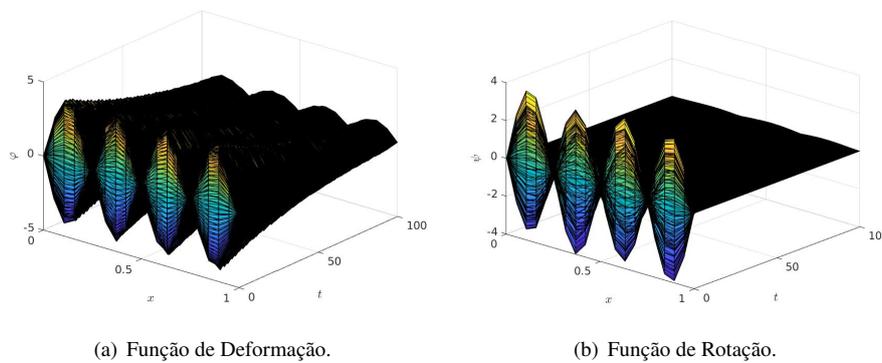


Figura 3.5: Solução para a viga de alumínio.

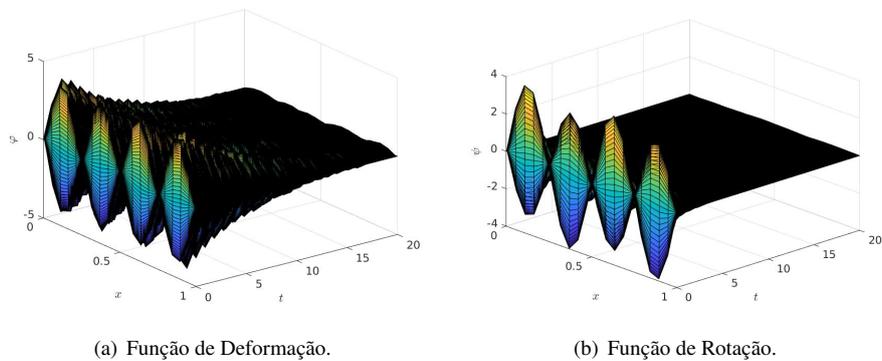


Figura 3.6: Solução para a viga de concreto.

Para o caso em que temos o mecanismo dissipativo localizado apenas no ângulo de rotação, temos a estabilização mais rápida para a viga de concreto. Nossos resultados numéricos também mostram dados discrepantes de tempo para estabilização quando comparamos eixo de rotação e deformação transversal, ou seja, observe que a estabilização no eixo de rotação é muito mais rápida. É possível notar uma grande diferença de tempo de estabilização quando comparamos com as simulações para o caso em que o sistema possui mecanismo dissipativo apenas no deslocamento transversal.

4. Considerações finais.

- Com relação às análises matemática e numérica: Os resultados numéricos comprovaram o que o estudo matemático, utilizando teoria de semigrupos havia mostrado. Uma vez que, a física dos materiais não permite que a igualdade $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$ seja satisfeita, ao tomar valores aproximados, conseguimos um resultado coerente para as simulações numéricas.

- Com relação aos materiais: O resultado obtido era esperado, pois o módulo de rigidez do alumínio é maior do que o do concreto, desta forma, temos que a perturbação em um material de concreto tende a se estabilizar mais rapidamente.
- Com relação aos parâmetros de deformação e rotação: Com base nos valores das tabelas 3.1, 3.2 e 3.3, podemos dizer que, para os materiais alumínio e concreto, o ângulo de rotação é mais sensível a perturbações. Observe que os problemas (2.1) e (2.3), apresentaram dados que comprovam tal sensibilidade, menor tempo de estabilização, comparado à deformação transversal. Já o problema (2.2), onde o mecanismo dissipativo está situado apenas no deslocamento transversal, temos tempos muito parecidos para estabilização. Então, para que o sistema se estabilize de maneira mais uniforme, é necessário dar atenção ao mecanismo dissipativo situado no deslocamento transversal da viga, aumentar sua potencialidade dissipativa é uma maneira de uniformizar a estabilização do sistema.

ORCID and License

Bruna T. S. Sozzo <https://orcid.org/0000-0001-6759-4139>

Frank H. Acasiete Q. <https://orcid.org/0000-0002-3380-3606>

This work is licensed under the [Creative Commons Attribution-NoComercial-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Referências

- [1] Timoshenko SP. *On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars*. Philosophical Magazine. 1921; 41:744-746.
- [2] Weaver W, Timoshenko SP, Young DH. *Vibration Problems in Engineering*. A Wiley-Interscience publication; 1990.
- [3] Sozzo BTS. *Boa Colocação para Equações Diferenciais Parciais via Semigrupos Lineares*. Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional. Londrina. Universidade Estadual de Londrina, 2018.
- [4] Saito TO. *Sistema de Timoshenko com Amortecimento Indefinido na Oscilação Transversal*. Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional. Londrina. Universidade Estadual de Londrina, 2016.
- [5] Liu Z, Zheng Z. *Semigroups associated with dissipative systems*. Chapman & Hall/CRC, 1999.
- [6] Brezis H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext, New York: Springer, 2010.
- [7] Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. 3Island Press, 1992.
- [8] Rivera J, Racke R. *Global stability for damped Timoshenko systems*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2003.
- [9] Cunha CAR. *Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos em EDP*. Florianópolis, SC. 2007.
- [10] Kreyszig E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library, 1989.
- [11] Rivera J. *Energy Decay Rates in Linear Thermoelasticity*. Funkcialaj Ekvacioj, Serie Internacia, 1996.
- [12] Timoshenko S. *History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [13] Raposo CA, Ferreira J, Santos ML, Castro NNO. *Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings*. Applied Mathematics Letters. 2005; 18:535-541.
- [14] Almeida Junior DS, Santos ML, Rivera J. *Stability to weakly dissipative Timoshenko systems*. Math. Meth. Appl. Sci. 2013; 36:1965-1976.
- [15] Soufyane A. *Stabilisation de la poutre de Timoshenko*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics. 1999; 328:731-734.
- [16] Khodja F, Benabdallah A, Rivera J, Racke R. *Energy decay for Timoshenko system of memory type*. Journal of Differential Equations, J. Differential Equations. 2000; 194:82-115.
- [17] Rivera J. *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*. Rio de Janeiro-Brasil: Laboratório Nacional de Computação Científica; 2008.
- [18] Shi D, Feng, D. *Exponential decay of Timoshenko beam with locally distributed feedback*. IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2001; 18:395-403.
- [19] Hibbeler RC. *Resistência dos materiais*. Brasil: Prentice Hall; 2010.
- [20] Almeida Júnior DS. *Estabilidade Assintótica e Numérica de Sistemas Dissipativos de Vigas de Timoshenko e Vigas de Bresse*. Curso de Pós Graduação em Modelagem Computacional, Laboratório Nacional de Computação Científica; 2009.