Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2020; Vol. 7(1): 172-175.

COMMUNICATION

# Unicidad de Solución de la Ecuación del Calor en Espacios de Sobolev Periódico

# Uniqueness Solution of the Heat Equation in Sobolev Periodic Spaces

Yolanda Santiago Ayala and Santiago Rojas Romero

*Received, Apr. 03, 2020* *Accepted, Jun. 12, 2020*

How to cite this article:
Santiago Y, Rojas S. *Unicidad de Solución de la Ecuación del Calor en Espacios de Sobolev Periódico*. Selecciones Matemáticas. 2020;7(1):172–175. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.01.16

**Resumen**

*En este artículo, probamos la unicidad de solución de la ecuación del calor homogénea y no homogénea en espacios de Sobolev periódico. Lo hacemos de un modo diferente a lo hecho en [3], en este caso realizamos cálculo diferencial en $H^s_{per}$ y aprovechamos de la inmersión y propiedades de espacios de Sobolev periódico. Con esta prueba ganamos visualizar la propiedad disipativa del problema homogéneo y de ahí deducimos la dependencia continua respecto al dato inicial y la unicidad de solución para ambos casos: homogéneo y no homogéneo.*

**Palabras clave**. Unicidad de solución, ecuación del calor, ecuación no homogénea, espacios de Sobolev periódico, cálculo en espacios de Banach.

**Abstract**

*In this article, we prove the uniqueness solution of the homogeneous and non-homogeneous heat equation in periodic Sobolev spaces. We do it in a different way from what we did in [3], in this case we perform differential calculus in $H^s_{per}$ and we take advantage of the immersion and properties of periodic Sobolev spaces. With this proof we gain to visualize the dissipative property of the homogeneous problem and with this we deduce the continuous dependence with respect to the initial data and the uniqueness solution for both cases: homogeneous and non-homogeneous.*

**Keywords** . Uniqueness solution, heat equation, Non homogeneous equation, Periodic Sobolev spaces, Calculus in Banach Spaces.

**1. Introducción.** Primero, queremos comentar que del Teorema 1 de [3], se tiene que el problema homogéneo del calor es globalmente bien colocado y además de la desigualdad (3.12) del corolario 2 de [3] se tiene la dependencia continua de la solución, respecto al dato inicial.

También, del Teorema 8 de [3] se tiene la existencia y unicidad de solución local del problema no homogéneo, y del Teorema 10 de [3] se obtiene la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial y a la no homogeneidad.

Así, en [3] en ambos casos, homogéneo y no homogéneo se hicieron las estimaciones a partir de la cara de la solución, que se obtuvo al aplicar la transformada de Fourier a la ecuación respectiva.

Ahora, en este estudio logramos probar la propiedad disipativa del problema homogéneo y realizar estimativas de su solución, partiendo de la existencia de solución, sin usar la cara de la solución, haciendo cálculo diferencial en $H^s_{per}$, usando inmersiones y propiedades de $H^s_{per}$. Así, esto esta comprendido en nuestro Teorema 1. Del Teorema 1, deducimos los resultados de dependencia continua y unicidad de solución para ambos problemas: homogéneo y no homogéneo, respectivamente.

*Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. Venezuela S/N Lima 01, Lima-Perú (ysantiagoa@unmsm.edu.pe).

†Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. Venezuela S/N Lima 01, Lima-Perú (srojasr@unmsm.edu.pe).

Nuestro artículo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, indicamos la metodología usada y citamos las referencias usadas. En la sección 3, probamos la propiedad disipativa del problema homogéneo y demostramos los resultados principales sobre la dependencia continua de la solución respecto a los datos iniciales y la unicidad de solución para los casos: homogéneo y no homogéneo. En la última subsección, damos adicionales observaciones de unicidad de solución de $(P_c^F)$.

Finalmente, en la sección 4, damos las conclusiones de nuestro estudio.

**2. Metodología.** Como marco teórico, en el presente artículo, usamos los resultados de existencia y regularidad de [3]. Usamos [1], [2] y [3] para la teoría de Fourier en espacios de Sobolev periódico, cálculo diferencial e integral en espacios de Banach.

**3. Principales Resultados.** Enunciaremos y demostraremos los resultados de unicidad y dependencia continua de la solución de la ecuación del calor, que conseguimos para los casos: homogéneo y no homogéneo, mediante el Teorema 1.

**3.1. Ecuación Homogénea.** Sea $\mu > 0$, $s \in \mathbb{R}$ y el problema homogéneo

$$(P_c) \quad \left| \begin{array}{l} w \in C([0,\infty), H^s_{per}) \cap C^1([0,\infty), H^{s-2}_{per}) \\ \partial_t w - \mu \partial_x^2 w = 0 \ \in H^{s-2}_{per} \\ w(0) = \phi \in H^s_{per}\,. \end{array} \right.$$

**Teorema 1.** *Sea $w$ solución de $(P_c)$ con dato inicial $\phi \in H^s_{per}$, entonces obtenemos los siguientes resultados:*

1. $\partial_t \|w(t)\|^2_{s-2} = -2\mu \|\partial_x w(t)\|^2_{s-2} \leq 0.$
2. $\|w(t)\|_{s-2} \leq \|\phi\|_{s-2} \leq \|\phi\|_s\,,\ t \geq 0.$

*Demostración:* Como $H^s_{per} \subset H^{s-2}_{per}$ entonces están bien definidos: $< \partial_t w, w >_{s-2}$ y $< w, \partial_t w >_{s-2}$. Así,

$$\begin{aligned} \partial_t \|w(t)\|^2_{s-2} &= \partial_t < w(t), w(t) >_{s-2} \\ &= < \partial_t w(t), w(t) >_{s-2} + < w(t), \partial_t w(t) >_{s-2} \\ &= 2Re < \partial_t w(t), w(t) >_{s-2}\ . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} < \partial_x^2 w, w >_{s-2} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \widehat{\partial_x^2 w}(k) \overline{\widehat{w}(k)} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} (ik)^2 \widehat{w}(k) \overline{\widehat{w}(k)} \\ &= -2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} k^2 \widehat{w}(k) \overline{\widehat{w}(k)} \\ &= -2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} k^2 |\widehat{w}(k)|^2\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Se observa que la serie en (3.2) es convergente desde que $k^2 \leq (k^2)^2 \leq (1+k^2)^2$, $\forall k \in Z$ y $w(t) \in H^s_{per}$. Como $\widehat{\partial_x w}(k) = ik\widehat{w}(k)$ y $\overline{\widehat{\partial_x w}(k)} = -ik\overline{\widehat{w}(k)}$, entonces su producto es

$$\widehat{\partial_x w}(k) \cdot \overline{\widehat{\partial_x w}(k)} = k^2 \widehat{w}(k) \overline{\widehat{w}(k)} = k^2 |\widehat{w}(k)|^2\,. \tag{3.3}$$

Sustituyendo (3.3) en (3.2) tenemos:

$$\begin{aligned} < \partial_x^2 w, w >_{s-2} &= -2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \widehat{\partial_x w}(k) \cdot \overline{\widehat{\partial_x w}(k)} \\ &= - < \partial_x w, \partial_x w >_{s-2} \\ &= -\|\partial_x w\|^2_{s-2} \ \leq\ 0\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Obviamente $\|\partial_x w\|_{s-2} < \infty$ desde que $\|\partial_x w\|_{s-1} < \infty$ y $\|\partial_x w\|_{s-2} \leq \|\partial_x w\|_{s-1}$.
De (3.1), usando que $\partial_t w = \mu \partial_x^2 w$ , $\mu > 0$ y la igualdad (3.4), tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_t \|w(t)\|_{s-2}^2 &= 2Re < \partial_t w(t), w(t) >_{s-2} \\
&= 2Re < \mu \partial_x^2 w(t), w(t) >_{s-2} \\
&= 2\mu Re < \partial_x^2 w(t), w(t) >_{s-2} \\
&= 2\mu \left\{ -\|\partial_x w(t)\|_{s-2}^2 \right\} \\
&= -2\mu \|\partial_x w(t)\|_{s-2}^2 \ \leq \ 0\,.
\end{aligned}$$

Esto es, $\partial_t \|w(t)\|_{s-2}^2 \leq 0$ .
Así, $\|w(t)\|_{s-2}^2$ es no creciente. Luego,

$$\|w(t)\|_{s-2}^2 \leq \|w(0)\|_{s-2}^2 \ , \ \forall t \geq 0\,.$$

Como

$$(\|w(t)\|_{s-2} - \|w(0)\|_{s-2})(\|w(t)\|_{s-2} + \|w(0)\|_{s-2}) \leq 0\,,$$

obtenemos

$$\|w(t)\|_{s-2} \leq \|w(0)\|_{s-2} \leq \|w(0)\|_s \ , \ \forall t \geq 0\,.$$

i.e.

$$\|w(t)\|_{s-2} \leq \|\phi\|_{s-2} \leq \|\phi\|_s \ , \ \forall t \geq 0\,.$$

■

**Corolario 1 (Dependencia continua de ($P_c$)).** *Sean $u$ y $v$ soluciones de ($P_c$) con datos iniciales $\phi_1$ y $\phi_2$ en $H^s_{per}$, respectivamente. Entonces*

$$\partial_t \|u(t) - v(t)\|_{s-2}^2 = -2\mu \|\partial_x u(t) - \partial_x v(t)\|_{s-2}^2 \leq 0$$

*y*

$$\|u(t) - v(t)\|_{s-2} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{s-2} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_s\,, \quad t \geq 0\,. \tag{3.5}$$

*Demostración:* Defina $w := u - v$ entonces $w$ satisface:

$$\left| \begin{array}{l} \partial_t w - \mu \partial_x^2 w = 0 \\ w(0) = \phi_1 - \phi_2\,. \end{array} \right.$$

Luego, usando el Teorema 1 se consigue probar el Corolario. ■

**Corolario 2 (Unicidad de solución de ($P_c$)).** *($P_c$) posee una única solución.*

*Demostración:* En efecto, sean $u$ y $v$ soluciones de ($P_c$) con un mismo dato inicial, i.e. $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. Obtenemos de (3.5) que $\|u(t) - v(t)\|_{s-2} \leq \|0\|_s = 0$. Luego, $\|u(t) - v(t)\|_{s-2} = 0$. Así, $u(t) = v(t)$, $\forall t \geq 0$, i.e. $u = v$. ■

**3.2. Ecuación no Homogénea.** Sea $T > 0$, $\mu > 0$, $s \in \mathbb{R}$, $F \in C([0,T], H^s_{per})$ y el problema no homogéneo

$$(P_c^F) \quad \left| \begin{array}{l} w \in C([0,T], H^s_{per}) \cap C^1([0,T], H^{s-2}_{per}) \\ \partial_t w - \mu \partial_x^2 w = F(t) \ \in H^{s-2}_{per} \\ w(0) = \phi \in H^s_{per}\,. \end{array} \right.$$

**Observación 1.** *Del Teorema 10 de [3] se obtuvo la dependencia continua de la solución de ($P_c^F$) respecto al dato inicial y a la no homogeneidad, usando transformada de Fourier. En consecuencia se obtuvo la unicidad de solución del problema no homogéneo.*

Ahora, haremos uso del Teorema de la subsección anterior, para obtener el siguiente resultado.

**Corolario 3 (Dependencia continua de la solución de $(P_c^F)$).** *Sean $u$ y $v$ soluciones de $(P_c^F)$ con datos iniciales $\phi_1$ y $\phi_2$ en $H^s_{per}$, respectivamente. Entonces $u - v$ es solución de $(P_c)$ con dato inicial $\phi_1 - \phi_2$ y satisface:*

$$\partial_t \|u(t) - v(t)\|^2_{s-2} = -2\mu \|\partial_x u(t) - \partial_x v(t)\|^2_{s-2} \leq 0$$

*y*

$$\|u(t) - v(t)\|_{s-2} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{s-2} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_s\,, \quad t \geq 0\,. \tag{3.6}$$

*Demostración:* Es consecuencia inmediata del Teorema 1. ■

**Corolario 4 (Unicidad de solución de $(P_c^F)$).** *$(P_c^F)$ posee una única solución.*

*Demostración:* En efecto, sean $u$ y $v$ soluciones de $(P_c^F)$ con un mismo dato inicial, i.e. $\phi_1 = \phi_2 = \phi \in H^s_{per}$, entonces usando el Corolario 3 tenemos que $u - v$ es solución de $(P_c)$ con dato inicial 0 y $\|u(t) - v(t)\|_{s-2} \leq \|0\|_s = 0$.
Luego, $\|u(t) - v(t)\|_{s-2} = 0$. Así, $u(t) = v(t)$, $\forall t \geq 0$, i.e. $u = v$. ■

**3.3. Dependencia continua y unicidad de solución de $(P_c^F)$ vía resultado de [3].** Se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 5 (Dependencia continua de la solución de $(P_c^F)$).** *Sean $u$ y $v$ soluciones de $(P_c^F)$ con datos iniciales $\phi_1$ y $\phi_2$ en $H^s_{per}$, respectivamente. Entonces $u - v$ es solución de $(P_c)$ con dato inicial $\phi_1 - \phi_2$ y satisface:*

1. $\|u(t) - v(t)\|_s \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_s\,, \quad t \in [0, T]\,.$
2. $\|u(t) - v(t)\|_r \leq C\|\phi_1 - \phi_2\|_s\,, \quad \forall r \in \mathbb{R}\,, \quad t \in (0, T]\,.$

*Demostración:* Es consecuencia de desigualdades de la prueba del Teorema 1 de [3]. ■

**Observación 2.** *Como consecuencia del Corolario 5, haciendo $\phi_1 = \phi_2$, obtenemos la unicidad de solución del problema $(P_c^F)$.*

**4. Conclusiones.** En nuestro estudio de la ecuación del calor en espacios de Sobolev periódico, tanto para el caso homogéneo $(P_c)$ y no homogéneo $(P_c^F)$ hemos obtenido los siguientes resultados:

1. Evidenciamos la propiedad disipativa del problema homogéneo y obtenemos estimativa de la norma de la solución global que nos permitió deducir la dependencia continua y unicidad de solución de $(P_c)$.
2. Probamos la dependencia continua de la solución de $(P_c^F)$, respecto al dato inicial, usando el Teorema 1. En consecuencia deducimos la unicidad de solución del problema.
3. Finalmente, comentamos algunas observaciones referente a la unicidad de solución de $(P_c^F)$.

**ORCID and License**
Yolanda Santiago Ayala https://orcid.org/0000-0003-2516-0871
Santiago Rojas Romero https://orcid.org/0000-0002-5354-8059



# Referencias

[1] Iorio R, Iorio V. *Fourier Analysis and partial differential equation.* Cambridge University, 2001.
[2] Santiago Y, Rojas S, Quispe T. *Espacios de Sobolev periódico y un problema de Cauchy asociado a un modelo de ondas en un fluido viscoso.* Theorema, Segunda Época. 2016; 3(4):7-23.
[3] Santiago Y, Rojas S. *Existencia y Regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev Periódico.* Selecciones Matemática. 2019; 06(01):49-65.