



SELECCIONES MATEMÁTICAS

Universidad Nacional de Trujillo

ISSN: 2411-1783 (Online)

2020; Vol. 7(1): 115-122.



Sobre la convergencia en el Grassmaniano

On the convergence on the Grassmannian

Helmuth Villavicencio 

Received, Feb. 07, 2020

Accepted, Jun. 09, 2020



How to cite this article:

Villavicencio H. *Sobre la convergencia en el Grassmaniano*. *Selecciones Matemáticas*. 2020;7(1):115–122. <http://dx.doi.org/10.17268/se1.mat.2020.01.10>

Resumen

En este trabajo, presentamos una caracterización de la convergencia sobre el grassmaniano de orden n que nos permite probar de manera directa que este conjunto es compacto y que todo fibrado vectorial es medible. Finalmente obtenemos un criterio para inducir fibrados medibles.

Palabras clave. Fibrados vectoriales, Variedad de grassman, Topología diferencial.

Abstract

In this paper, we present a characterization of the convergence on the n -th order Grassmannian that permits us to show in a direct way that this set is compact and every vector bundle is measurable. Finally, we obtain a criterion to induce measurable bundles.

Keywords . Vector bundles, Grassman manifold, Differential Topology.

1. Introducción. Sea \mathbb{R}^d el espacio euclidiano real d dimensional. El *Grassmaniano* de \mathbb{R}^d , denotado por $G(\mathbb{R}^d)$, es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de \mathbb{R}^d cuya relevancia es notoria dentro de la Topología Diferencial (ver [2]). Actualmente su estudio tiene múltiples aplicaciones al tratamiento de imágenes para reconocimiento facial (ver [3, 8]). Una manera razonable para comparar los elementos dentro de $G(\mathbb{R}^d)$ consiste en estudiar subconjuntos del mismo con una dimensión fija. Dado $1 \leq n \leq d$ el *grassmaniano de orden n* , denotado por $G_n(\mathbb{R}^d)$, es el conjunto de todos los subespacios de dimensión n , es decir, $G_n(\mathbb{R}^d) = \{Z \in G(\mathbb{R}^d) : \dim Z = n\}$. Es posible dotar a este último de una topología τ que lo torna una variedad topológica de dimensión $n(d-n)$ es decir un espacio de Hausdorff, segundo contable y localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^{n(d-n)}$. Para ver esto basta considerar el conjunto $V(n, \mathbb{R}^d) = \{A \in \mathbb{R}^{d \times n} : \text{rank}(A) = n\}$, el cual es un abierto en $\mathbb{R}^{d \times n}$, así como la aplicación

$$\begin{aligned} \pi : V(n, \mathbb{R}^d) &\longrightarrow G_n(\mathbb{R}^d) \\ A &\longmapsto \text{span}\{\text{columnas de } A\}. \end{aligned}$$

Luego la topología τ es definida de la siguiente manera

$$U \text{ es abierto en } G_n(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \text{ es abierto en } \mathbb{R}^{d \times n}.$$

Como caso particular, tomando $n = 1$ y $d = 3$, obtenemos el espacio proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = G_1(\mathbb{R}^3)$ el cual sabemos es compacto dado que es localmente homeomorfo a la esfera S^2 . Esto también es cierto en el caso general (ver [2, 6]), es decir $(G_n(\mathbb{R}^d), \tau)$ es compacto. Pero probar esto no es directo por la forma de los abiertos en τ . A su vez, por el teorema de metrización de Urysohn, sabemos que $(G_n(\mathbb{R}^d), \tau)$ es metrizable y existen diversos métodos para construir métricas en él (ver [7]). Luego tiene sentido buscar una métrica sobre $G_n(\mathbb{R}^d)$ que utilice la linealidad de sus elementos. Esto es logrado al considerar la métrica

$$\begin{aligned} D : G_n(\mathbb{R}^d) \times G_n(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (X, Y) &\longmapsto \|P_X - P_Y\| \end{aligned}$$

*Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Universidad Nacional de Ingeniería, Perú (hvillavicencio@imca.edu.pe).

donde P_X, P_Y son las proyecciones ortogonales de \mathbb{R}^d sobre X e Y respectivamente y $\|\cdot\|$ es la norma usual en el espacio de operadores lineales $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ (ver [5]). Motivados por las relaciones lineales de esta métrica, obtenemos una caracterización de la convergencia sobre $(G_n(\mathbb{R}^d), D)$ en relación a las bases de los elementos de $G_n(\mathbb{R}^d)$. Esta caracterización nos permite probar, de forma rápida, que la topología inducida por D es equivalente a τ y que $(G_n(\mathbb{R}^d), \tau)$ es compacto. A su vez, dado que las fibras de un fibrado vectorial en \mathbb{R}^d son elementos de algún $G_n(\mathbb{R}^d)$ (ver [4]), probamos que todo fibrado vectorial es medible y obtenemos un criterio para inducir fibrados medibles.

El presente trabajo esta organizado de la siguiente manera. En la sección 2 abordamos los preliminares necesarios sobre fibrados vectoriales. En seguida, en la sección 3 estudiamos algunas propiedades de la métrica D en $G_n(\mathbb{R}^d)$. Luego en la sección 4 obtenemos una caracterización para la convergencia sobre D a través del Teorema 1. Como consecuencia probamos la continuidad del fibrado vectorial y que $(G_n(\mathbb{R}^d), \tau)$ es compacto. En la sección 5, probamos que todo fibrado vectorial es medible y obtenemos nuestro segundo resultado principal, Teorema 2, donde mostramos un criterio para obtener un fibrado medible. Finalmente, obtenemos las conclusiones del trabajo en la sección 6.

2. Preliminares. Iniciamos con la definición de fibrado vectorial. Mayores detalles pueden ser encontrados en [4].

Definición 1. Sea M un espacio topológico, el cual llamaremos espacio base. Un fibrado vectorial ξ sobre M , consiste de lo siguiente:

1. Un espacio topológico $F = F(\xi)$, llamado espacio total.
2. Una aplicación continua y sobreyectiva $\pi : F \rightarrow M$, llamada proyección natural.
3. Para todo $x \in M$ el conjunto $F_x = \pi^{-1}(x)$, llamado fibra sobre x , tiene estructura de espacio vectorial real.

Además se debe satisfacer la *condición de trivialidad local*: Para todo $x \in M$ existen un conjunto abierto $U_x \subset M$ con $x \in U_x$, un entero $d_x \geq 0$ y un homeomorfismo

$$h : U_x \times \mathbb{R}^d \rightarrow \pi^{-1}(U_x),$$

de tal modo que $\pi \circ h = \pi_1$ y fijado $u \in U_x$ la correspondencia $v \rightarrow h(u, v)$ defina un isomorfismo lineal entre \mathbb{R}^d y $\pi^{-1}(u) = F_u$.

Un fibrado vectorial $\xi = (M, F, \pi)$ muchas veces se representa, cuando M y π están sobreentendidos, solo con el espacio total F . Es consecuencia de la definición que la función $x \mapsto d_x$ es localmente constante y cuando M es conexo podemos hablar de la dimensión del fibrado, como la dimensión de cualquier fibra de F .

Ejemplo 1. Sea M un espacio topológico. El producto $E = M \times \mathbb{R}^d$ induce una estructura de fibrado vectorial, llamado *fibrado trivial*. Basta considerar $\pi : E \rightarrow M$ tal que $\pi(x, v) = x$.

Ejemplo 2. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n contenida en \mathbb{R}^{n+k} . El *fibrado tangente* de M es el conjunto $TM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^{n+k} : v \in T_x M\}$ el cual es un fibrado vectorial sobre M al considerar la proyección $\pi : TM \rightarrow M$ tal que $\pi(x, v) = x$. En efecto; dado $x \in M$, para cada carta local (φ, U_x) es posible definir un homeomorfismo

$$\begin{aligned} h : U_x \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \pi^{-1}(U_x) \\ (u, v) &\longmapsto (u, D\varphi_{\varphi(u)}^{-1}v) \end{aligned}$$

de donde para cada $z \in U_x$ se tiene que $h(z, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(z) = \{z\} \times T_z M$ es un isomorfismo.

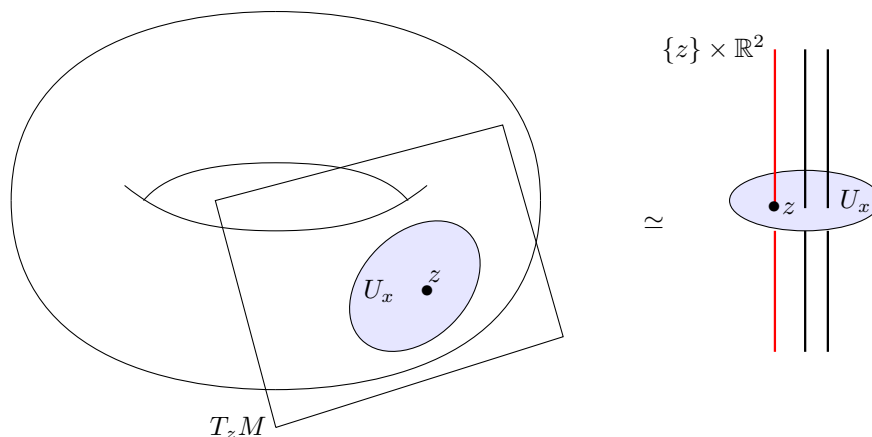


Figura 1: Estructura local de un fibrado vectorial.

3. Propiedades de la métrica D . El siguiente resultado es una caracterización importante para el cálculo explícito de la distancia entre dos elementos de $G_n(\mathbb{R}^d)$. Una prueba de la misma puede ser hallada en [1]. Nosotros la incluimos con el fin de hacer autocontenido este trabajo. Para enunciarla es necesario introducir algunas notaciones adicionales. Dado $U \subset \mathbb{R}^d$ denotaremos por $S(U)$ a la restricción de U a la esfera unidad esto es $S(U) = \{u \in U : \|u\| = 1\}$. Por otro lado, dado $x \in \mathbb{R}^d$ denotaremos por $d(x, U)$ a la distancia de x a U es decir $d(x, U) = \inf\{\|x - z\| : z \in U\}$.

Proposición 1. Para cada $X, Y \in G_n(\mathbb{R}^d)$ se verifica que

$$D(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in S(X)} d(x, Y), \sup_{y \in S(Y)} d(y, X) \right\}.$$

Demostración: Sea $x \in S(X)$, entonces $P_Y(x) \in Y$ por tanto

$$\|x - P_Y(x)\| = \|(P_X - P_Y)(x)\| \leq \|P_X - P_Y\|.$$

Como x fue arbitrario, se tiene $\sup_{x \in S(X)} d(x, Y) \leq \|P_X - P_Y\|$. Análogamente $\sup_{y \in S(Y)} d(y, X) \leq \|P_X - P_Y\|$.

De donde

$$\max \left\{ \sup_{x \in S(X)} d(x, Y), \sup_{y \in S(Y)} d(y, X) \right\} \leq \|P_X - P_Y\| = D(X, Y).$$

Recíprocamente, definimos

$$\lambda_Y := \sup_{x \in S(X)} d(x, Y) = \sup_{x \in S(X)} \|x - P_Y(x)\| = \sup_{x \in S(X)} \|(I - P_Y)(x)\| = \|I - P_Y\|,$$

$$\lambda_X := \sup_{y \in S(Y)} d(y, X) = \sup_{y \in S(Y)} \|y - P_X(y)\| = \sup_{y \in S(Y)} \|(I - P_X)(y)\| = \|I - P_X\|.$$

Notemos que es posible expresar $P_X - P_Y$ como la diferencia de dos operadores mutuamente ortogonales

$$P_X - P_Y = P_X(I - P_Y) - (I - P_X)P_Y.$$

Luego utilizando las propiedades de la proyección ortogonal podemos estimar $\|P_X(I - P_Y)v\|$.

$$\begin{aligned} \|P_X(I - P_Y)v\|^2 &= \langle P_X(I - P_Y)v, P_X(I - P_Y)v \rangle \\ &= \langle P_X^2(I - P_Y)v, (I - P_Y)v \rangle \\ &= \langle P_X(I - P_Y)v, (I - P_Y)^2v \rangle \\ &= \langle (I - P_Y)P_X(I - P_Y)v, (I - P_Y)v \rangle \\ &= \|(I - P_Y)P_X(I - P_Y)v\| \|(I - P_Y)v\| \\ &\leq \lambda_Y \|P_X(I - P_Y)v\| \|(I - P_Y)v\| \end{aligned}$$

En consecuencia $\|P_X(I - P_Y)v\| \leq \lambda_Y \|I - P_Y\|$. De modo que

$$\begin{aligned} \|P_X - P_Y\|^2 &= \|P_X(I - P_Y)\|^2 + \|(I - P_X)P_Y\|^2 \\ &\leq \lambda_Y^2 \|I - P_Y\|^2 + \|I - P_X\|^2 \|P_Y\|^2 \\ &\leq \lambda_Y^2 \|I - P_Y\|^2 + \lambda_X^2 \|P_Y\|^2 \\ &\leq \max\{\lambda_X^2, \lambda_Y^2\} = \max\{\lambda_X, \lambda_Y\}^2. \end{aligned}$$

Por tanto obtenemos la desigualdad contraria $D(X, Y) \leq \max\{\lambda_X, \lambda_Y\}$. ■

El siguiente ejemplo ilustra la ventaja del uso de la métrica D .

Ejemplo 3. Sean $X = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ y $Y = \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ elementos del espacio proyectivo $\mathbb{R}P^1 \simeq G_1(\mathbb{R}^2)$, entonces $D(X, Y) = 1/\sqrt{2}$. En efecto; notemos que para los subespacios X e Y (ver Figura 2) dados se tiene

$$S(X) = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\} \text{ y } S(Y) = \{(0, 1), (0, -1)\}.$$

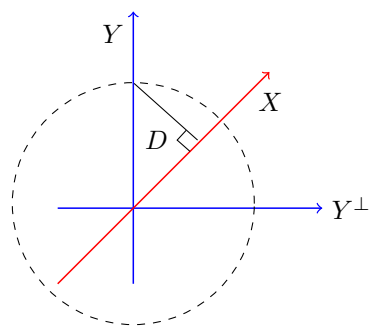


Figura 2: $D(X, Y) = 1/\sqrt{2}$

Por tanto

$$D(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in S(X)} d(x, Y), \sup_{y \in S(Y)} d(y, X) \right\},$$

$$= \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Otra propiedad interesante de esta métrica es su comportamiento frente a los automorfismos de \mathbb{R}^d es decir aplicaciones lineales inversibles.

Proposición 2. Sea $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un automorfismo. Si $X, Y \in G_n(\mathbb{R}^d)$ entonces $D(T(X), T(Y)) \leq \|T\| \|T^{-1}\| D(X, Y)$.

Demostración: Usando el hecho que T es un automorfismo, se puede verificar que $P_{T(X)} = T.P_X.T^{-1}$. Luego

$$D(T(X), T(Y)) = \|P_{T(X)} - P_{T(Y)}\|$$

$$= \|T.P_X.T^{-1} - T.P_Y.T^{-1}\|$$

$$= \|T.(P_X - P_Y).T^{-1}\|$$

$$\leq \|T\| \|P_X - P_Y\| \|T^{-1}\|$$

Por lo tanto se obtiene $D(T(X), T(Y)) \leq \|T\| \|T^{-1}\| D(X, Y)$. ■

Notemos que si definimos

$$\tilde{T} : G_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^d)$$

$$X \mapsto T(X),$$

la proposición anterior muestra que \tilde{T} es una aplicación Lipchitz con constante $\|T\| \|T^{-1}\|$.

4. Convergencia. Ahora presentaremos una caracterización de la convergencia en $(G_n(\mathbb{R}^d), D)$ y posteriormente la usaremos para probar la compacidad del Grassmaniano de dimensión n .

Teorema 1. Una sucesión $\{S_k\} \subset G_n(\mathbb{R}^d)$ converge a $S \in G_n(\mathbb{R}^d)$ si y solo si para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una base $\{u_1^k, \dots, u_n^k\}$ de S_k tal que $\{\lim_{k \rightarrow \infty} u_1^k, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} u_n^k\}$ es una base de S .

Demostración: Supongamos que $\{S_k\} \subset G_n(\mathbb{R}^d)$ converge a $S \in G_n(\mathbb{R}^d)$. Sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de S . Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(u_i, \varepsilon) \cap B(u_j, \varepsilon) = \emptyset$ para $i \neq j$ con $1 \leq i, j \leq n$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $D(S_k, S) = \|P_{S_k} - P_S\| < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. Entonces $\|P_{S_k}(u_j) - u_j\| < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$ y todo $1 \leq j \leq n$. Luego para cada $1 \leq j \leq n$ basta tomar $u_j^k = P_{S_k}(u_j)$ con lo cual $u_j^k \rightarrow u_j$ y además $\{u_1^k, \dots, u_n^k\}$ es base de S_k para todo $k \geq k_0$. En efecto; sean $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=1}^n \alpha_j u_j^k = 0$. Entonces

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j u_j^k - \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j (u_j^k - u_j) = - \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j.$$

Luego suponiendo que existe $\alpha_{j_0} \neq 0$ entonces $\sum_{j=1}^n |\alpha_j| > 0$ por tanto

$$\left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j (u_j^k - u_j) \right\| < \varepsilon \sum_{j=1}^n |\alpha_j|.$$

Usando la ortonormalidad y la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 < \left(\varepsilon \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \right)^2 \leq \varepsilon^2 n \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 < \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \text{ absurdo.}$$

Recíprocamente, supongamos ahora que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una base $\{u_1^k, \dots, u_n^k\}$ del subespacio S_k tal que $\Lambda = \{\lim_{k \rightarrow \infty} u_1^k, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} u_n^k\}$ es una base de S . Denotemos por $A_k \in \mathbb{R}^{d \times n}$ a la matriz que tiene como columnas a los vectores $u_j^k \in \mathbb{R}^{d \times 1}$. Sabemos del Álgebra Lineal que la proyección ortogonal $P_{S_k} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ puede representarse por

$$P_{S_k} = A_k(A_k^\top A_k)^{-1}A_k^\top.$$

Además $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = \tilde{\Pi}$, donde $\tilde{\Pi}$ es la matriz cuyas columnas forman la base Π . Por tanto, $P_{S_k} \rightarrow P_S$ donde $D(S_k, S) \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$. Luego la sucesión $(S_k) \subset G_n(\mathbb{R}^d)$ es convergente. ■

Ejemplo 4. En $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq G_1(\mathbb{R}^2)$, la sucesión de subespacios $X_n = \{(t, nt) : t \in \mathbb{R}\}$ converge al eje Y . En efecto; el conjunto $\{(1/n, 1)\}_n$ es una sucesión de bases de X_n las cuales convergen a $(0, 1)$ entonces $D(X_n, Y) \rightarrow 0$.

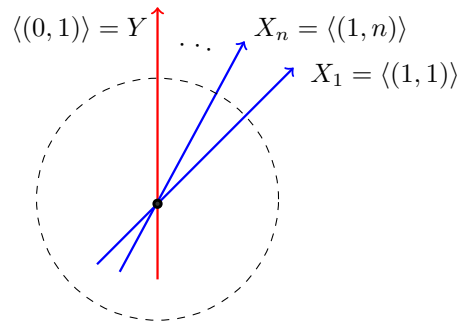


Figura 3: La sucesión X_n converge al eje Y .

Sea (F, M, π) un fibrado vectorial de dimensión n tal que $F_x \subset \mathbb{R}^k$ para cada $x \in M$ y algún $k \in \mathbb{N}$. Definamos

$$\begin{aligned} \xi_F : M &\longrightarrow G_n(\mathbb{R}^k) \\ x &\longmapsto F_x. \end{aligned}$$

Corolario 1. La aplicación ξ_F es continua.

Demostración: Dado $x \in M$ y una sucesión (x_m) en M tal que $x_m \rightarrow x$. Por la propiedad de trivialización local existe un abierto $U_x \subset M$ y un homeomorfismo $h : U_x \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_x)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que los elementos $x_m \in U_x$ para todo $m \geq 1$. Dada una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n , entonces $\{h(x_m, e_1), \dots, h(x_m, e_n)\}$ es una base de F_{x_m} . Por la continuidad de h , obtenemos $\{h(x, e_1), \dots, h(x, e_n)\}$ es una base de F_x . En consecuencia, usando el Teorema 1 se tiene que $F_{x_m} \rightarrow F_x$. ■

Corolario 2. El fibrado tangente TM de una subvariedad M de \mathbb{R}^d tiene la propiedad de continuidad en las fibras.

Por otro lado, la caracterización de la noción de convergencia en la proposición anterior nos permite obtener una prueba elemental de la compacidad de $G_n(\mathbb{R}^d)$.

Corolario 3. El espacio métrico $(G_n(\mathbb{R}^d), D)$ es compacto.

Demostración: Dada una sucesión $\{S_k\}_k$ en $G_n(\mathbb{R}^d)$. Por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt podemos suponer que S_k admite base ortonormal $\{u_1^k, \dots, u_n^k\}$. Por tanto $\|u_1^k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego existen $N_1 \subset \mathbb{N}$ infinito y una aplicación $\varphi_1 : \mathbb{N} \rightarrow N_1$ creciente tal que $\{u_1^{\varphi_1(k)}\}_k$ es convergente. Supongamos ahora que existan $N_r \subset \dots \subset N_1 \subset \mathbb{N}$ infinitos y aplicaciones $\varphi_i : \mathbb{N} \rightarrow N_i$ crecientes para todo $1 \leq i \leq r < n$ tales que $\{u_1^{\varphi_1(k)}\}_k, \dots, \{u_r^{\varphi_r(k)}\}_k$ son convergentes, digamos a u_1, \dots, u_r . Como $\|u_{r+1}^k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $N_{r+1} \subset N_r$ infinito y una aplicación $\varphi_{r+1} : \mathbb{N} \rightarrow N_{r+1}$ creciente tal que $\{u_{r+1}^{\varphi_{r+1}(k)}\}_k$ es convergente a u_{r+1} . Así obtenemos el conjunto $\{u_1, \dots, u_n\}$ el cual es linealmente independiente por la continuidad del producto interno. Finalmente, usando el Teorema 1 se obtiene que $S_k \rightarrow \langle\{u_1, \dots, u_n\}\rangle$. ■

La métrica D induce en el grassmaniano $G_n(\mathbb{R}^d)$ una topología que denotaremos por τ_D . Para verificar que ambas topologías τ y τ_D son equivalentes es suficiente probar que la aplicación identidad

$$\begin{aligned} i : (G_n(\mathbb{R}^d), \tau_D) &\longrightarrow (G_n(\mathbb{R}^d), \tau) \\ A &\longmapsto A \end{aligned}$$

es continua puesto que como ya fue mostrado, en el Corolario 3, $(G_n(\mathbb{R}^d), \tau_D)$ es compacto.

Proposición 3. *La aplicación identidad $i : (G_n(\mathbb{R}^d), \tau_D) \longrightarrow (G_n(\mathbb{R}^d), \tau)$ es continua.*

Demostración: Supongamos por absurdo que exista un abierto $W \in \tau$ tal que $W \notin \tau_D$. Luego existe $Z \in W$ tal que no es punto interior. Es decir para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $Y_m \notin W$ tal que $D(Z, Y_m) < \frac{1}{m}$. Entonces $Y_m \rightarrow Z$ en la métrica D y $\pi^{-1}(Y_m) \cap \pi^{-1}(W) = \emptyset$. Tomemos $A_m \in \pi^{-1}(Y_m)$ tal que sus columnas sean ortonormales. Luego $A_m \notin \pi^{-1}(W)$ y $\pi^{-1}(W)$ es abierto en $\mathbb{R}^{d \times n}$ de donde pasando a una subsecuencia si es necesario $A_m \rightarrow A$ en la norma de $\mathbb{R}^{d \times n}$ y además $A \notin \pi^{-1}(W)$. Por tanto $\pi(A) \notin W$ de donde existe $\sigma > 0$ tal que $\sigma \leq D(Z, \pi(A))$, por desigualdad triangular dado $m \geq 1$.

$$\begin{aligned} \sigma \leq D(Z, \pi(A)) &\leq D(Z, Y_m) + D(Y_m, \pi(A)) \\ &= D(Z, Y_m) + D(\pi(A_m), \pi(A)) \\ &\leq \frac{1}{m} + D(\pi(A_m), \pi(A)). \end{aligned}$$

Si $A_m = [a_1^m, \dots, a_n^m]$ y $A = [a_1, \dots, a_n]$ son las representaciones en vectores columna se tiene

$$\begin{aligned} D(\pi(A_m), \pi(A)) &= \|P_{\pi(A_m)} - P_{\pi(A)}\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \langle a_i^m, \cdot \rangle a_i^m - \sum_{i=1}^n \langle a_i, \cdot \rangle a_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \langle a_i^m, \cdot \rangle (a_i^m - a_i) + \sum_{i=1}^n \langle a_i^m - a_i, \cdot \rangle a_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i^m - a_i| + \sum_{i=1}^n |a_i^m - a_i| \\ &= 2 \sum_{i=1}^n |a_i^m - a_i|. \end{aligned}$$

Como $A_m \rightarrow A$, entonces $D(\pi(A_m), \pi(A)) \rightarrow 0$, de donde $\sigma = 0$ absurdo. ■

Los siguientes resultados son consecuencia directa de la proposición anterior.

Corolario 4. *Las topologías τ y τ_D son equivalentes.*

Corolario 5. *La variedad de Grassman de dimensión n , $(G_n(\mathbb{R}^d), \tau)$ es compacta.*

5. Fibrados medibles. En adelante, M será un espacio métrico, conexo y compacto, que dotado de la σ -álgebra de Borel, puede verse como un espacio medible (M, \mathcal{B}) .

Definición 2. *Una colección de espacios vectoriales $F = \{F_x\}_{x \in M} \subset G_n(\mathbb{R}^d)$ se dice que induce una estructura de fibrado medible sobre M , si se satisface la siguiente condición: Para todo $x \in M$ existen un conjunto medible $W_x \subset M$ con $x \in W_x$ y funciones $v_i : W_x \rightarrow \mathbb{R}^d$ medibles para todo $1 \leq i \leq n$ tales que*

$$\{v_1(z), \dots, v_n(z)\} \text{ es una base de } F_z \text{ para todo } z \in W_x.$$

Proposición 4. Todo fibrado vectorial sobre M es un fibrado medible.

Demostración: Sea $\xi = (M, F, \pi)$ un fibrado vectorial sobre M . Por la condición de trivialidad local de ξ , dado $x \in M$ existen un conjunto abierto $U_x \subset M$, un entero $n \geq 0$, que no depende de x por ser M conexo y un homeomorfismo

$$h_x : U_x \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_x)$$

tal que para $y \in U_x$ se tiene que $h_x(y, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow F_y$ es un isomorfismo. Luego si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n entonces $\{h_x(y, e_1), \dots, h_x(y, e_n)\}$ es base de F_y . Por tanto podemos considerar las funciones $v_i : U_x \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $v_i(y) = h_x(y, e_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Así, la colección $\{F_x\}_{x \in M}$ define una estructura de fibrado medible sobre M . ■

Notemos que el recíproco de resultado anterior es falso, esto es, existen fibrados medibles que no son fibrados vectoriales. Por ejemplo, si $M = \mathbb{T}^2$, entonces el fibrado tangente es trivial. Podemos asumir que es generado por $v_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ y $v_2 = \frac{\partial}{\partial y}$. Luego la familia $F = \{F_{(a,b)}\}$ donde

$$F_{(a,b)} = \begin{cases} \langle v_1 \rangle & \text{si } a \in \mathbb{Q}; \\ \langle v_2 \rangle & \text{otro caso,} \end{cases}$$

es un fibrado medible que no es fibrado vectorial.

El siguiente resultado, muestra una forma de inducir fibrados medibles haciendo uso de la medibilidad en las grassmanianas.

Teorema 2. Supongamos que para algún n tal que $1 \leq n \leq d$, la aplicación

$$\begin{aligned} \zeta : M &\longrightarrow G_n(\mathbb{R}^d) \\ x &\longmapsto H_x \end{aligned}$$

es medible. Entonces la familia de subespacios $\{H_x\}_{x \in M}$ induce un fibrado vectorial medible sobre M .

Demostración: Sea $E \in G_n(\mathbb{R}^d)$ entonces $\mathbb{R}^d = E \oplus E^\perp$, consideremos el conjunto

$$\mathcal{V}(E) = \{U \in G_n(\mathbb{R}^d) : U \cap E^\perp = \{0\}\}$$

el cual es abierto en $(G_n(\mathbb{R}^d), D)$ pues dado $U \in \mathcal{V}(E)$ tomando

$$\varepsilon = \min_{x \in E^\perp, \|x\|=1} \|P_U(x) - x\| > 0,$$

luego si $W \in G_n(\mathbb{R}^d)$ es tal que la distancia $D(U, W) < \varepsilon$ entonces $W \in \mathcal{V}(E)$. Por otro lado, dado $U \in \mathcal{V}(E)$ existe $L_U \in \mathcal{L}(E, E^\perp)$ tal que $U = \{x + L_U(x) : x \in E\}$ para ver esto notemos que $\pi_E : E \oplus E^\perp \rightarrow E$ mapea U isomórficamente sobre E . Basta mostrar que $\pi_E|_U$ es inyectiva: dados $u_1 = a + b_1, u_2 = a + b_2$ entonces $b_1 - b_2 = u_1 - u_2 \in U \cap E^\perp = \{0\}$ luego $b_1 = b_2$ por tanto $u_1 = u_2$. Entonces podemos considerar el operador lineal $L_U = \pi_{E^\perp} \circ (\pi_E|_U)^{-1}$ tal que

$$\begin{aligned} L_U : E &\longrightarrow E^\perp \\ u = a + b &\longmapsto L_U(a) = b. \end{aligned}$$

Sea $\{a_1, \dots, a_n\}$ una base de E . Dado $U \in \mathcal{V}(E)$, $\{a_1 + L_U(a_1), \dots, a_n + L_U(a_n)\}$ es una base de U . Definamos para cada $1 \leq i \leq n$ las funciones

$$\begin{aligned} u_i : \mathcal{V}(E) &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ U &\longmapsto a_i + L_U(a_i). \end{aligned}$$

Afirmamos que para todo $1 \leq i \leq n$, la función u_i es continua. En efecto; sea $U \in \mathcal{V}(E)$ y $\{U_k\}_k \subset \mathcal{V}(E)$ tales que $U_k \rightarrow U$ luego existen bases, que podemos suponer con elementos unitarios $\{s_1^k, \dots, s_n^k\}$ y $\{s_1, \dots, s_n\}$ tales que $s_j^k \rightarrow s_j$. Notemos que probar $u_i(U_k) \rightarrow u_i(U)$ se reduce a probar que $L_{U_k}(a_i) \rightarrow L_U(a_i)$. También existe $\{x_1^k, \dots, x_n^k\}$ base de E tal que $s_j^k = x_j^k + L_{U_k}(x_j^k)$ donde la convergencia $s_j^k \rightarrow s_j$ implica que $x_j^k \rightarrow x_j$ y $L_{U_k}(x_j^k) \rightarrow L_U(x_j)$ luego $s_j = x_j + L_U(x_j)$, por tanto $a_i = \sum_{j=1}^n \beta_j^k x_j^k$ para cada $k \geq 1$. De donde para mostrar que las sucesiones $(\beta_j^k)_k$ son convergentes, basta mostrar que son acotadas para todo $1 \leq j \leq k$. Para ver esto, sea $V = [x_1^k \dots x_n^k]$, entonces $V^T V$ es inversible. Haciendo $a_i = V \alpha$, donde $\alpha = (\beta_1^k, \dots, \beta_n^k)$ vemos que $V^T a_i = V^T V \alpha$ de donde

$$\alpha = (V^T V)^{-1} V^T a_i.$$

Luego tenemos $\|\alpha\| \leq M \|a_i\|$, con $M = \|(V^T V)^{-1} V^T\|$. Por tanto

$$L_{U_k}(a_i) = L_{U_k} \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^k x_j^k \right) = \sum_{j=1}^n \beta_j^k L_{U_k}(x_j^k) \rightarrow \sum_{j=1}^n \beta_j L_U(x_j) = L_U(a_i).$$

Como $G_n(\mathbb{R}^d)$ es compacto podemos obtener un cubrimiento finito $\mathcal{V}(E_1), \dots, \mathcal{V}(E_r)$ de conjuntos medibles que sin pérdida de generalidad podemos considerar disjuntos dos a dos. Luego dado $x \in M$ existe $1 \leq i_0 \leq n$ tal que $H_x \in \mathcal{V}(E_{i_0})$. Tomemos $W_x = \zeta^{-1}(\mathcal{V}(E_{i_0}))$ medible, entonces para cada $1 \leq i \leq n$ basta tomar $v_i : W_x \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $v_i = u_i \circ \zeta$. ■

6. Conclusiones.

1. A través del Teorema 1, podemos obtener de manera natural una prueba para la compacidad del Grassmaniano $G(\mathbb{R}^d)$.
2. Toda variedad diferenciable admite continuidad de las fibras del espacio tangente. En efecto; sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Sin pérdida de generalidad, por teorema de Whitney, podemos considerar que $TM \subset M \times \mathbb{R}^d$ donde $d \geq 2n + 1$. Considerando el fibrado vectorial $F = TM$ con fibras en $G_n(\mathbb{R}^d)$, entonces por Corolario 1 la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma : M &\longrightarrow G_n(\mathbb{R}^d) \\ x &\longmapsto T_x M \end{aligned}$$

es continua.

3. El Teorema 2 muestra una condición suficiente para que un subconjunto en $G_n(\mathbb{R}^d)$ sea un fibrado medible.
4. Todos los resultados probados pueden ser nuevamente obtenidos tomando un espacio vectorial V de dimensión finita como base de referencia en el Grassmaniano y en los fibrados vectoriales.

Agradecimientos. Deseo expresar un profundo agradecimiento al Prof. R. Metzger por sus útiles conversaciones y a Fondecyt-Concytec (100–2018). Así como a las valiosas sugerencias de los revisores.

ORCID and License

Helmuth Villavicencio <https://orcid.org/0000-0002-5812-9021>

This work is licensed under the [Creative Commons Attribution-NoComercial-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Referencias

- [1] Akhiezer N, Glazman I. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. New York: Dover Publications Inc.; 1993.
- [2] Hirsch M. *Differential topology*. Graduate Texts in Mathematics 33. New York: Springer-Verlag; 1994.
- [3] Huang Z, Wang R, Shan S, Chen X. *Projection metric learning on grassmann manifold with application to video based face recognition*. Boston, MA, USA: In Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition; june 2015; 7-12.
- [4] Milnor J, Stasheff J. *Characteristic classes*. Annals of Mathematics Studies. Tokyo. University of Tokyo Press; 1974.
- [5] Morris D. *A rapidly-converging lower bound for the joint spectral radius via multiplicative ergodic theory*. Advances in Mathematics. 2010; 225(6):3425-3445.
- [6] Orrillo M. *Análise em Grassmannianas e o Teorema de Johnson-Lindenstrauss*. [Tese de Mestrado]. Rio de Janeiro. PUC, 2013.
- [7] Qiu L, Zhang Y, Li Chi. *Unitarily invariant metrics on the Grassmann space*. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005;27 (2): 507-531.
- [8] Zeng X, Bian W, Liu W, Shen J, Tao D. *Dictionary pair learning on Grassmann manifolds for image denoising*. IEEE Trans. Image Process. 2015; 24(11):4556-4569.