Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2020; Vol. 7(1): 108-114.

Cocientes algebraicos y Teoría de Invariantes Geométricos

Algebraic quotients and Geometric Invariant Theory

Nélida Medina García

Received, Jan. 02, 2020 *Accepted, May. 12, 2020*

How to cite this article:
Medina N. *Cocientes algebraicos y Teoría de Invariantes Geométricos*. Selecciones Matemáticas. 2020;7(1):108–114.
http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.01.09

Resumen

El cociente de una variedad algebraica por acción de un grupo algebraico no siempre tiene estructura de variedad. El objetivo de este trabajo es describir un método para construir cocientes buenos en la geometría algebraica en el sentido de la Teoría de invariantes geométricos.

Palabras clave. Teoría de invariantes geométricos, Criterio de Hilbert Mumford.

Abstract

The quotient of an algebraic variety by action of an algebraic group does not always has a variety structure. The aim of this work is to describe a methodfor constructing good quotients, in the sense of Geometric invariant theory, in algebraicgeometry.

Keywords . Geometric invariant theory, Hilbert-Mumford criterion.

1. Introducción. Sea G un grupo algebraico complejo actuando en una variedad algebraica compleja X. La cerradura de cualquier órbita del cociente de X por acción de G puede contener una órbita de dimensión menor, así que este cociente no siempre tiene estructura de variedad algebraica.

Teoría de invariantes geométricos (GIT por sus siglas en inglés) es un método para construir cocientes buenos cuyos puntos corresponden a clases de isomorfismos (dados por la acción) que tengan buenas propiedades geométricas y algebraicas. Mumford y Fogarty en *Geometric invariant theory* [6], demostraron que si un grupo reductivo G actúa linealmente en una variedad proyectiva X, entonces existe un cociente bueno de un subconjunto abierto $U \subset X$, formado por puntos llamados semiestables de X, por G. Las definiciones de semiestabilidad, estabilidad son dadas en términos de la existencia de polinomios invariantes, sin embargo el cálculo del álgebra de $G-$invariantes no siempre es fácil. El criterio de Hilbert- Mumford determina la semiestabilidad, estabilidad de un punto de una variedad proyectiva en términos de los pesos de las acciones de los subgrupos a un parámetro de G.

Las técnicas de GIT han sido usadas en la construcción de espacios moduli, estratificación de curvas planas, estratificación de foliaciones holomorfas de dimensión 1 y grado 2, 3, 4 en el plano proyectivo complejo.

El objetivo de este trabajo es hacer una descripción del método GIT para construir cocientes algebraicos buenos. Para ello, en la subsección 2.1, presentamos nociones importantes de GIT como acciones de grupos algebraicos en variedades algebraicas, objetos invariantes por la acción y explicamos cómo se obtiene un cocienta bueno afín. En la subsección 2.2 explicamos cocientes proyectivos, el criterio de Hilbert- Mumford. Finalmente obtenemos una aplicación del criterio de Hilbert-Mumford.

2. Teoría de invariantes geométricos.

2.1. Cocientes afines. Consideramos acciones de grupos algebraicos afines en variedades algebraicas complejas provistas de la topología de Zariski.

*Departamento Académico de Ciencias, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú (nmedina@pucp.pe).

Las definiciones y resultados relevantes de la teoría de invariantes geométricos explicadosse detallan en [3], [8], [1].

Definición 1. Un **grupo algebraico** G es una variedad algebraica afín con estructura de grupo abstracto tal que la aplicación multiplicación $m : G \times G \to G, \quad (g, h) \to gh$ y la aplicación inversa $i : G \to G, \quad g \to g^{-1}$ son morfismos de variedades. Un grupo algebraico isomorfo a un subgrupo cerrado (Zariski) de $GL_n(\mathbb{C})$ es llamado **grupo algebraico lineal**.

Ejemplo 1.

1. El grupo lineal general complejo $GL_n(\mathbb{C})$ de las matrices $n \times n$, inversibles, con la multiplicación usual de matrices. El grupo lineal especial $SL_n(\mathbb{C})$ formado por las matrices con determinante 1 es un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{C})$. El grupo lineal proyectivo complejo $PGL_n(\mathbb{C})$.
2. El grupo multiplicativo $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\} \cong GL_1(\mathbb{C})$. El grupo de las matrices diagonales de $GL_n(\mathbb{C})$. Los toros algebraicos $T_n \cong (\mathbb{C}^*)^n$.
3. El grupo $GL(V)$ de las transformaciones lineales inversibles de un espacio vectorial complejo V de dimensión n en si mismo.

Definición 2. Una **acción** de un grupo algebraico G en una variedad algebraica X es un morfismo de variedades

$$\alpha : G \times X \to X, \quad (g, x) \to \alpha(g, x) := g \cdot x$$

tal que para todo $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$ y e elemento identidad de G,

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x, \quad e \cdot x = x.$$

Diremos que X es una $G-$variedad.

Se definen Gx la órbita de x y $Est(x)$ estabilizador o grupo de isotropía de x como

$$Gx = \{g \cdot x : g \in G\}, \quad Est(x) = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Un conjunto $W \subset X$ es llamado invariante por la acción de G en X , si $gW = \{g \cdot w : w \in W\} \subset W$ para todo $g \in G$.

Algunas propiedades de las órbitas y sus cerraduras son demostradas en [2, Proposición 1.11].

Proposición 1. (Brion) *Dada una $G-$variedad X y un punto $x \in X$:*

i) La órbita Gx es una subvariedad de X suave localmente cerrada y toda componente de Gx tiene dimensión $\dim Gx = \dim G - \dim Est(x)$.

ii) La cerradura $\overline{Gx}$ de una órbita es la unión de la órbita Gx y órbitas de dimensión menor. En particular, la cerradura de cualquier órbita contiene una órbita cerrada (de dimensión mínima).

Sea $C[X]$ el álgebra de las funciones regulares de X. Existe una acción inducida de G en $C[X]$ definida por

$$g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

Definición 3. Un elemento $f \in C[X]$ se denomina **invariante** por la acción de G o $G-$**invariante** si

$$f(g \cdot x) = f(x) \text{ para todo } g \in G \text{ y } x \in X.$$

Si W es un subconjunto abierto e invariante de X, el conjunto de elementos invariantes de W es

$$C[W]^G := \{f \in C[W] : f(g \cdot w) = f(w), \forall g \in G, \forall w \in W\}.$$

Ejemplo 2. Consideremos la acción del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ en el plano afín $\mathbb{C}^2$ definida por

$$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \qquad (t, (x, y)) \to t \cdot (x, y) = (tx, t^{-1}y).$$

Las órbitas cerradas de esta acción son: el origen y las hipérbolas $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = c\}$, para cada $c \neq 0$. La cerradura de los ejes sin el origen $\{(x, 0),\ x \neq 0\}$ y $\{(0, y),\ y \neq 0\}$ contienen el origen. Así que el conjunto de órbitas de $\mathbb{C}^2$ por esta acción de $\mathbb{C}^*$ no es Hausdorff.

Esta acción induce una acción de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}[x, y]$, álgebra de las funciones regulares de $\mathbb{C}^2$,

$$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}[x, y] \to \mathbb{C}[x, y], \qquad (t, f) \to t \cdot f(x, y) = f(tx, t^{-1}y).$$

La función f es C^*- invariante si $t \cdot f = f$, para todo $t \in \mathbb{C}^*$, es decir

$$\sum a_{ij}(tx)^i(t^{-1}y)^j = \sum a_{ij}x^iy^j, \text{ para todo } t \in \mathbb{C}^*, (x,y) \in \mathbb{C}^2,$$

que se cumple si y sólo si $a_{i,j} = 0, i \neq j$, así $f(x,y) = \sum a_{ii}(xy)^i$.

El álgebra de las funciones C^*-invariantes es $\mathbb{C}[x,y]^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}[xy] \cong \mathbb{C}$.

El morfismo $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definido por $(x,y) \to xy$ es constante en las órbitas, invariante y suryectivo. Así, $(\mathbb{C}, \phi)$ define un cociente que no separa las órbitas $\{(x,0) : x \neq 0\}$, $\{(0,y) : y \neq 0\}$ y $\{(0,0)\}$. Por tanto $(\mathbb{C}, \phi)$ no es un espacio de órbitas.

El estabilizador del origen $Est((0,0)) = \{t \in \mathbb{C}^* : t \cdot (0,0) = (0,0)\} = \mathbb{C}^*$ tiene dimensión 1. El estabilizador de cualquier punto $\{(x,y) : xy \neq 0\}$ es $\{1\}$, ver figura 2.1 .

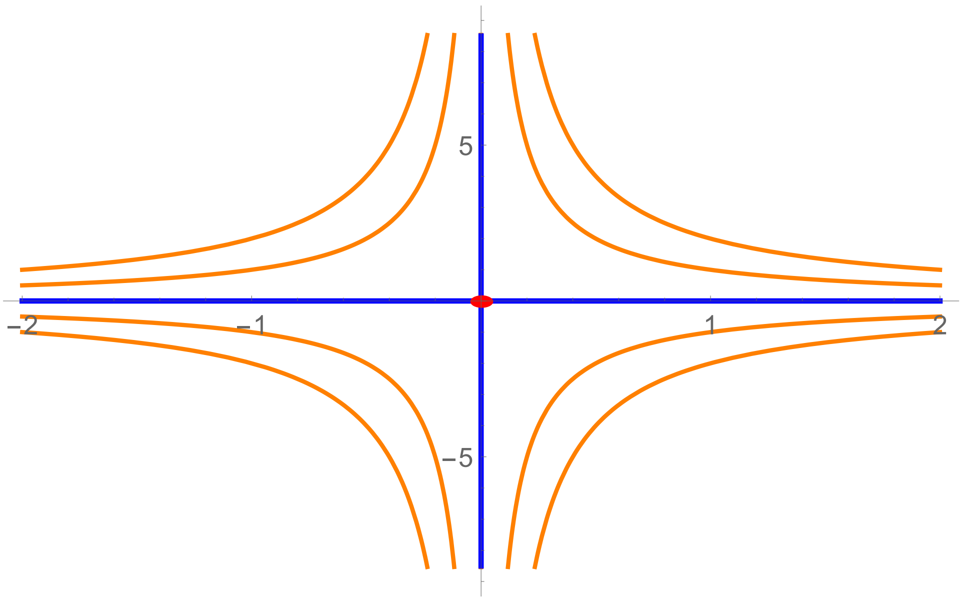

Figura 2.1: Órbitas de $\mathbb{C}^2$ por acción de $\mathbb{C}^*$: fuente propia

Tipos de cocientes

Exponemos diferentes tipos de cocientes por la acción de un grupo algebraico afín en una variedad algebraica.

Definición 4. Un **cociente categórico** por la acción de G en X es un par (Y, π), donde Y es una variedad algebraica y $\pi : X \to Y$ es un morfismo de variedades, constante en las órbitas y, para cada variedad Y_1 y morfismo $\phi : X \to Y_1$ que es constante en las órbitas existe un único morfismo $\overline{\phi} : Y \to Y_1$ tal que $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$.

Como π es continua y constante en las órbitas, también es constante en las cerraduras de las órbitas. Por consiguiente, un cociente categórico es un espacio de órbitas sólo si todas las órbitas Gx son cerradas.

Definición 5. Un **cociente bueno** por la acción de G en X es un par (Y, π), donde Y es una variedad algebraica y $\pi : X \to Y$ es un morfismo afín tal que:

i) π es $G-$invariante.
ii) π es suryectiva.
iii) Para todo subconjunto abierto U en Y, $\pi^* : C[U] \to C[\pi^{-1}(U)]$ es un isomorfismo de $C[U]$ en $C[\pi^{-1}(U)]^G$.
iv) Si W es un subconjunto cerrado invariante de X, entonces $\pi(W)$ es cerrado.
v) Si W_1, W_2 son subconjuntos cerrados invariantes disjuntos de X, entonces $\pi(W_1)$, $\pi(W_2)$ son disjuntos.

Si además, la preimagen de cada punto es una única órbita decimos que el cociente es **geométrico**.

Observación. $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \neq \emptyset$ si y sólo si $\pi(x_1) = \pi(x_2)$.

Denotamos por $X//G$ y X/G el cociente bueno, cociente geométrico de G por X, respectivamente.

Todo cociente bueno es un cociente categórico.

Definición 6. Sea $X \subset \mathbb{C}^{n+1}$ variedad afín o $X \subset \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva. Una acción de un grupo algebraico lineal G en X se dice **lineal** si existe una representación

$$\rho : G \to GL(\mathbb{C}^{n+1}) \cong GL_{n+1}(\mathbb{C})$$

tal que la acción de G en X es la acción inducida por

$$G \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}, \quad (g, (x_1, \ldots, x_{n+1})) \to \rho(g)(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

El problema de la existencia de un cociente algebraico está relacionado al problema de la generación finita del álgebra de invariantes.

Definición 7. Un grupo algebraico lineal G es llamado

- **reductivo** si el radical de G (subgrupo normal soluble conexo maximal) es un toro algebraico.
- **geométricamente reductivo** si para cada acción lineal de G en $\mathbb{C}^n$ y cada punto $G-$invariante $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, existe un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ homogéneo invariante de grado mayor o igual a uno tal que $f(v) \neq 0$.

Ejemplo 3. Los grupos $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $PGL_n(\mathbb{C})$, el grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$, los toros algebraicos son reductivos. Estas definiciones son equivalentes en los números complejos. Nagata y Miyata demostraron que todo grupo geométricamente reductivo es reductivo. Haboush en [4] probó que los grupos reductivos son geométricamente reductivos.

Estas definiciones son equivalentes en los números complejos. Nagata y Miyata de-mostraron que todo grupo geométricamente reductivo es reductivo. Haboush en [4] probóque los grupos reductivos son geométricamente reductivos

Masayoshi Nagata, demostró en [7]

Teorema 1. *Sea G un grupo reductivo actuando racionalmente en un $\mathbb{C}-$álgebra finitamente generado R. Entonces, el subálgebra $G-$ invariante R^G es finitamente generado.*

Toda acción lineal de un grupo reductivo G en una variedad afín X induce una acción racional de G en el álgebra $\mathbb{C}[X]$. Por el teorema de Nagata, el subálgebra de invariantes por la acción de G en X es finitamente generado. Por tanto, existen polinomios $G-$ invariantes $f_1, \ldots, f_m$ tales que $\mathbb{C}[X]^G = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_m]$.

El morfismo

$$\phi : X \to \mathbb{C}^m, \quad x \to (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

se llama morfismo cociente. La imagen del morfismo es independiente de la selección de $f_1, \ldots, f_m$ y $(\mathbb{C}^m, \phi)$ es un cociente bueno [2, Teorema 1.24].

Teorema 2. *Sea G un grupo reductivo actuando en una variedad afín X. Entonces, existe un cociente bueno de X por G y $X//G$ es afín.* Si un grupo reductivo actúa en una variedad afín, el morfismo cociente $\phi : X \to X//G$ define una correspondencia entre las clases de equivalencia de órbitas de X y puntos de $X//G$ pero algunas órbitas en $X//G$ pueden identificarse, así que no siempre es un cociente geométrico.

2.2. Cocientes proyectivos.

David Mumford demostró que quitando algunos puntos de X, llamados inestables, el cociente de los llamados puntos semiestables por la acción de G tiene estructura de un cociente bueno.

Las siguientes definiciones y resultados son tomados de [2], [8].

Definición 8. Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva. Para cualquier acción lineal de un grupo reductivo G en X, un punto x de X es llamado

- **semiestable**, si existe un polinomio f homogéneo, $G-$invariante, de grado mayor o igual que 1 tal que $f(x) \neq 0$.

- **estable**, si x es semiestable, la órbita Gx es cerrada en X^{ss} y el estabilizador $Est(x)$ es finito.
- **inestable**, si x no es semiestable.

Denotamos por X^{ss}, X^s y X^{un} los conjuntos de puntos semiestables, estables e inestables de X, respectivamente.

El conjunto de puntos inestables X^{un} es un subconjunto cerrado de X.

El principal teorema de GIT en el contexto de variedades proyectivas es:

Teorema 3. *Sea G un grupo reductivo que actúa linealmente en una variedad proyectiva X. Entonces:*

i) Existe un cociente bueno $\phi : X^{ss} \to Y$ y $Y = X^{ss}//G$ es una variedad proyectiva.

ii) Existe un subconjunto Zariski−abierto Y^s de Y tal que $\phi^{-1}(Y^s) = X^s$ y $Y^s = X^s/G$ es un cociente geométrico.

iii) Para $x_1, x_2 \in X^{ss}$, $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ si y sólo si $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \cap X^{ss} \neq \emptyset$.

iv) Para $x \in X^{ss}$, x es estable si y sólo si x tiene estabilizador finito y la órbita Gx es cerrada en X^{ss}.

Demostración: [8, Teorema 1.12] ■

El cálculo de los generadores del subaĺgebra de polinomios homogéneos invariantes por la acción no siempre es fácil.

Criterio de Hilbert-Mumford

El Criterio de Hilbert-Mumford es un criterio numérico para determinar la semiestabilidad, inestabilidad, estabilidad de un punto de una variedad proyectiva en términos de los pesos de la acción de subgrupos a un parámetro de G.

Definición 9. Un **subgrupo a un parámetro** de un grupo algebraico G es un homomorfismo no trivial de grupos algebraicos

$$\lambda : \mathbb{C}^* \to G, \qquad t \to \lambda(t).$$

Sea G un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$. La acción de un subgrupo a un parámetro de G, $\lambda : \mathbb{C}^* \to G$ induce una representación de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}^* & \to & GL(\mathbb{C}^{n+1}) & & & & \\ t & \to & \lambda(t): & & \mathbb{C}^{n+1} & \to & \mathbb{C}^{n+1} \\ & & & & v & \to & \lambda(t)\cdot v \end{array}$$

que es diagonalizable. Es decir, existe una base $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que

$$\lambda(t)\cdot e_i = t^{r_i} e_i, \quad \text{para algún } r_i \in \mathbb{Z}.$$

Los exponentes r_i son llamados pesos de e_i respecto a la acción de $\lambda(t)$.
Dados un punto $x \in X$ y $\widehat{x} \in x$ en el cono afín $\widehat{X} \subset C^{n+1}$ escribimos $\widehat{x} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$ respecto a esta base.

Definición 10. Sean $x \in X$ y $\lambda : \mathbb{C}^* \to G$ un subgrupo a un parámetro de G. Si $\widehat{x} \in x$ en $\widehat{X} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ y $\widehat{x} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$ entonces,

$$\lambda(t)\cdot\widehat{x} = \sum_{i=1}^{n+1} t^{r_i} a_i e_i.$$

La función μ se define por

$$\mu(x,\lambda) = \text{mín}\{r_i : a_i \neq 0\}. \tag{2.1}$$

La definición de la función μ es independiente de la selección de $\hat{x}$ en el cono afín de X y de la base de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Teorema 4. *(*Criterio de Hilbert-Mumford*) Sea G un grupo reductivo actuando linealmente en una variedad proyectiva X en $\mathbb{P}^n$. Sea x un punto cualquiera de X, entonces*

i) x es semiestable si y sólo si $\mu(x,\lambda) \leq 0$ para todo subgrupo a un parámetro de G.
ii) x es estable si y sólo si $\mu(x,\lambda) < 0$ para todo subgrupo a un parámetro de G.
iii) x es inestable si y sólo si $\mu(x,\lambda) > 0$ para algún subgrupo a un parámetro de G.
Demostración: [8, Teorema 4.9]. ■

Aplicando la definición (2.1) se prueba

$$\mu(g \cdot x, \lambda) = \mu(x, g^{-1}\lambda g), \ g \in G.$$

Entonces, es posible reemplazar un subgrupo a un parámetro $\lambda(t)$ por un conjugado conveniente para los cálculos.

Todo subgrupo a un parámetro de $SL_n(\mathbb{C})$ es conjugado a un subgrupo a un parámetro diagonal.

Proposición 2. *Para todo subgrupo a un parámetro $\lambda : C^* \to SL_n(\mathbb{C})$ existen enteros $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = 0$, para los cuales $\lambda(t)$ es conjugado en $SL_n(\mathbb{C})$ a una matriz diagonal de la forma*

$$t \longrightarrow \mathrm{diag}(t^{r_1}, \ldots, t^{r_n}) = \begin{pmatrix} t^{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t^{r_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & t^{r_n} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Demostración: [5, Proposición 7.5]. ■

Ejemplo 4. Cálculo de las cúbicas semiestables aplicando el Criterio de Hilbert-Mumford

Una cúbica plana proyectiva compleja $\mathcal{C}$ es un conjunto de ceros de un polinomio homogéneo $F \in \mathbb{C}[x,y,z]$ de grado 3, donde:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{2,0}x^2z + a_{1,2}xy^2 + a_{1,1}xyz + a_{1,0}xz^2 + a_{0,3}y^3 \\ &+ a_{0,2}y^2z + a_{0,1}yz^2 + a_{0,0}z^3 = \sum a_{i,j}x^iy^jz^{3-i-j}, \end{aligned}$$

que es único, salvo el producto por un escalar diferente de cero.

Calculamos los puntos singulares de F resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Entonces, $(1:0:0)$ es punto singular de F si y solo si $a_{3,0} = a_{2,1} = a_{2,0} = 0$.
El grupo de automorfismos del plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2$ es $\mathbb{P}GL_3(\mathbb{C})$.
Consideremos la acción de $\mathbb{P}GL_3(\mathbb{C})$ en el espacio de cúbicas planas

$$Hip_3(2) = \mathbb{P}\{F(x,y,z) = \sum a_{i,j}x^iy^jz^{3-i-j}, \ 0 \leq i,j \leq 3\}$$

por cambio de coordenadas. La aplicación $SL_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}GL_3(\mathbb{C})$ que asigna a una matriz su clase de equivalencia es una isogenia (el núcleo de la aplicación es un conjunto finito). Como los grupos a un parámetro de $SL_3(\mathbb{C})$ son diagonalizables, estudiamos la acción

$$SL_3(\mathbb{C}) \times Hip_3(2) \to Hip_3(2), \quad (g, F(x,y,z)) \to g \cdot F(x,y,z) := F(g^{-1}(x,y,z)).$$

Para determinar las cúbicas semiestables aplicamos el Criterio de Hilbert-Mumford.
Por la proposición 2, todo subgrupo a un parámetro de $SL_3(\mathbb{C})$ es conjugado a un subgrupo diagonal de la forma $\lambda(t) = \mathrm{diag}(\mathrm{t}^{\mathrm{r}_1}, \mathrm{t}^{\mathrm{r}_2}, \mathrm{t}^{\mathrm{r}_3})$ con $r_1 \geq r_2 \geq r_3$, $r_1 + r_2 + r_3 = 0$. Tenemos

$$\lambda(t) \cdot F(x,y,z) = \sum t^{-r_1 i - r_2 j - r_3(3-i-j)} \, a_{i,j}x^iy^jz^{3-i-j}$$

y por consiguiente,

$$\mu(F, \lambda(t)) = \text{mín}\{-r_1 i - r_2 j - r_3(3 - i - j) : a_{i,j} \neq 0\}$$

Por definición, una cúbica F es semiestable si y sólo si F no es inestable. Aplicamos el Criterio de Hilbert-Mumford: F es inestable si y sólo si $\mu(F, \lambda(t)) > 0$ para algún $\lambda(t)$ diagonal.
De la condición $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ y asumiendo $r_1 > 0$, $r_3 < 0$, obtenemos

$$-\frac{1}{2} \leq q_2 = \frac{r_2}{r_1} \leq 1.$$

Para cada (i, j) tenemos

i	j	q_2	i	j	q_2	i	j	q_2	i	j	q_2
3	0	-	2	1	< -2	1	2	$< -\frac{1}{2}$	0	3	< 0
			2	0	> 1	1	1	-	0	2	< 1
						1	0	$> -\frac{1}{2}$	0	1	> -2
									0	0	> -1

Del análisis de esta tabla, inferimos que las cúbicas inestables son generadas por: $xz^2, y^3, y^2z, yz^2, z^3$. Así, las cúbicas semiestables tienen la forma $F(x, y, z) = a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{2,0}x^2z + a_{1,2}xy^2 + a_{1,1}xyz$. Observamos que $(1 : 0 : 0)$ no es punto singular de F.

ORCID and License

Nélida Medina García https://orcid.org/0000-0003-2074-945X

Referencias

[1] Alcántara C. *Introducción a la teoría de invariantes geométricostios.* CIMAT: Universidad de Guanajuato; 2010.
[2] Brion M. *Introduction to actions of algebraic groups.* Les cours du CIRM. 2010; 1:1-22.
[3] Dolgachev I. *Lectures on Invariant Theory.* London Mathematical Society. Cambridge University Press. Lecture Notes Series **296**; 2003.
[4] Haboush W. *Reductive Groups are Geometrically Reductive.* Annals of Mathematics. Second Series. 1995; 102(1):67–83.
[5] Mukai S, Oxbury W. *An introduction to Invariants and Moduli.* Cambridge University Press; 2003.
[6] Mumford D, Fogarty J, Kirwan F. *Geometric Invariant Theory.* Tercera edición. Springer; **34**; 1994.
[7] Nagata M. *Lectures on the Fourteenth Problem of Hilbert.* Tata Institute of Fundamental Research; 1965.
[8] Newstead P. *Geometric Invariant Theory.* CIMAT: Guanajuato; 2006.