Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2020; Vol. 7(1): 52-73.

Existencia y Dependencia Continua de la Solución de la Ecuación de Onda no Homogénea en Espacios de Sobolev Periódico

Existence and Continuous Dependence of the Solution of Non homogeneous Wave Equation in Periodic Sobolev Spaces

Yolanda Santiago Ayala[*] and Santiago Rojas Romero[†]

Received, Nov. 18, 2019 *Accepted, Mar. 17, 2020*

How to cite this article:
Santiago Y, Rojas S. *Existencia y Dependencia Continua de la Solución de la Ecuación de Onda no Homogénea en Espacios de Sobolev Periódico*. Selecciones Matemáticas. 2020;7(1):52–73. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.01.06

Resumen

En este artículo, primero probamos que el problema de valor inicial asociado a la ecuación de onda homogénea en espacios de Sobolev periódico tiene solución global y la solución posee dependencia continua, respecto a los datos iniciales, en $[0,T]$, $T>0$. Hacemos esto en un modo intuitivo usando la Teoría de Fourier y en una version elegante introduciendo familias de operadores fuertemente continuas, inspirados en los trabajos de Iorio [4] y Santiago and Rojas [7].
También, demostramos que la energía asociada a la ecuación de onda es conservativa en intervalos $[0,T]$, $T>0$.
Como resultado final, probamos que el problema de valor inicial asociado a la ecuación de onda no homogénea tiene solución local y la solución posee dependencia continua con respecto al dato inicial y a la parte no homogénea del problema.

Palabras clave. Familia de Operadores fuertemente continuos, Operador coseno, Ecuación de onda no homogénea, Espacios de Sobolev periódico, teoría de Fourier, cálculo diferencial en espacios de Banach.

Abstract

In this article, we first prove that the initial value problem associated to the homogeneous wave equation in periodic Sobolev spaces has a global solution and the solution has continuous dependence with respect to the initial data, in $[0,T]$, $T>0$. We do this in an intuitive way using Fourier theory and in a fine version introducing families of strongly continuous operators, inspired by the works of Iorio [4] and Santiago and Rojas [7].
Also, we prove that the energy associated to the wave equation is conservative in intervals $[0,T]$, $T>0$.
As a final result, we prove that the initial value problem associated to the non homogeneous wave equation has a local solution and the solution has continuous dependence with respect to the initial data and the non homogeneous part of the problem.

Keywords . Strongly continuous operators, cosine operator, Non homogeneous wave equation, Periodic Sobolev spaces, Fourier theory, Differential Calculus in Banach Spaces.

1. Introducción.

Empezamos comentando acerca de la ecuación de onda (1746)

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0\,. \tag{1.1}$$

[*]Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. Venezuela S/N Lima 01, Lima-Perú (ysantiagoa@unmsm.edu.pe).
[†]Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. Venezuela S/N Lima 01, Lima-Perú (srojasr@unmsm.edu.pe).

Sabemos que esta ecuación diferencial es de tipo hiperbólica y de segundo orden, donde $a > 0$ es una constante equivalente a la velocidad de propagación de la onda y como datos iniciales consideramos $u(0) = \phi \in H^s_{per}$ y $\partial_t u(0) = \psi \in H^{s-1}_{per}$, donde s es un número real y H^s_{per} es el espacio de Sobolev periódico de orden s.
La ecuación (1.1) describe la propagación de ondas, como ondas sonoras, ondas de luz y ondas en el agua, siendo importante en acústica y electromagnetismo, ver [2]. También, esta ecuación es de gran importancia en mecánica cuántica, ver [3] y dinámica de fluidos, ver [1].

Así, queremos resaltar la obra de Iorio [4], por los trabajos relacionados al modelo (1.1). También citamos a Santiago and Rojas [7, 6] cuyos trabajos motivaron este estudio. Probaremos la existencia y unicidad de solución global de (1.1) y su dependencia continua en intervalos compactos, introduciendo familias fuertemente continuas.
Finalmente, probaremos que el modelo no homogéneo de (1.1) posee solución local única, obteniendo también la dependencia continua de la solución respecto a los datos iniciales y a la parte no homogénea.
El trabajo lo organizamos del siguiente modo. En la sección 2, indicamos la metodología usada, citamos la referencia adecuada para los resultados preliminares que el lector pueda necesitar. También presentamos dos importantes diagramas que resumen nuestro estudio de inmersión y transformada de Fourier en distribuciones periódicas y espacios de Sobolev. En la sección 3, introducimos familias de operadores fuertemente continuas y obtenemos importantes propiedades en el espacio infinito dimensional H^s_{per}. En la sección 4, probamos que la ecuación de onda homogénea posee solución global. En la sección 5, probamos la dependencia continua de la solución de la ecuación de onda homogénea en $[0, T]$, $T > 0$. En la sección 6, analizamos la energía asociada a la ecuación de onda (1.1) y probamos que es conservativa, lo que también nos permite demostrar la unicidad de solución para el caso no homogéneo. En la sección 7, obtenemos una solución particular del problema no homogéneo de la ecuación de onda. En la sección 8, probamos la existencia de solución local de la ecuación de onda no homogénea. En la sección 9, probamos la dependencia continua respecto a los datos iniciales y a la no homogeneidad.
Finalmente, en la sección 10, expresamos las conclusiones de nuestro estudio.

2. Metodología. Como marco teórico, en este trabajo usamos principalmente los siguientes tópicos: Teoría de Fourier en espacios de Sobolev periódico, análisis armónico, teoría de familias de operadores fuertemente continuos, método de variación de parámetros para EDOs. Como referencia para ver algunos resultados previos que usaremos, podemos citar Iorio [4], Santiago et al [5] y Santiago and Rojas [7, 6].

Queremos resumir en dos diagramas las importantes propiedades de las distribuciones periódicas P' y los espacios de Sobolev H^s_{per}, respectivamente. Esto es, las siguientes inclusiones son continuas con imagen densa

$$\begin{array}{ccccc} P & \hookrightarrow & L^2([-\pi,\pi]) & \hookrightarrow & P' \\ \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee \\ S(Z) & \hookrightarrow & l^2(Z) & \hookrightarrow & S'(Z) \end{array}$$

y para $s > 0$:

$$\begin{array}{ccccc} H^s_{per} & \hookrightarrow & H^0_{per} = L^2([-\pi,\pi]) & \hookrightarrow & H^{-s}_{per} \\ \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee \\ l^2_s(Z) & \hookrightarrow & l^2(Z) & \hookrightarrow & l^2_{-s} \end{array}$$

Usamos toda esta teoría en el análisis de existencia y dependencia continua de la solución de la ecuación de onda, realizando en el proceso una serie de cálculos y aproximaciones.

3. Familias de Operadores y Propiedades. Para estudiar la existencia de solución de la ecuación de la onda en espacios de Sobolev periódicos, empezaremos introduciendo varias familias de operadores. Aquí, probaremos muchas de sus propiedades obtenidas. Estas familias de operadores surgen al conseguir, vía Fourier, el candidato a ser solución de la ecuación de onda homogénea. Empezamos con el siguiente resultado.

Proposición 1. *Sea $a > 0$ y $s \in \mathbb{R}$. Se cumplen los siguientes enunciados.*

1. *Si $\phi \in P'$ entonces $(cos(a|k|t)\widehat{\phi}(k))_k \in S'(\mathbb{Z})$ y $C(t)\phi := \sum_{k=-\infty}^{\infty} cos(a|k|t)\widehat{\phi}(k)\phi_k \in P'$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*
2. *Si $\phi \in P'$ entonces $(sen(a|k|t)\widehat{\phi}(k))_k \in S'(\mathbb{Z})$ y $S(t)\phi := \sum_{k=-\infty}^{\infty} sen(a|k|t)\widehat{\phi}(k)\phi_k \in P'$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

3. *Si* $\psi \in P'$ *entonces* $(\frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\widehat{\psi}(k))_k \in S'(\mathbb{Z})$ *y*
$W(t)\psi := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\widehat{\psi}(k)\phi_k \in P'$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *donde estamos considerando:*

$$\left.\frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\right|_{k=0} = t\,. \tag{3.1}$$

4. *Las aplicaciones* $C(t)$*,* $S(t)$ *y* $W(t)$ *son operadores lineales de* P' *en* P'*, desde que la transformada de Fourier es lineal en* P'*.*
5. $C(0) = I$*,* $S(0) = 0$ *y* $W(0) = 0$*, donde* I *es el operador identidad y* 0 *es el operador nulo.*
6. *Los operadores* $C(t)$*,* $S(t)$ *y* $W(t)$ *son continuos de* P' *en* P'*.*
7. *Para* $f \in P'$ *se verifica:*

$$C(t)f = \partial_t W(t)f\,, \tag{3.2}$$

donde (3.2) es en el sentido:

$$\lim_{h\to 0} < \frac{W(t+h)-W(t)}{h} f, \varphi > = < C(t)f, \varphi >\,, \quad \forall \varphi \in P\,.$$

8. *Si* $\phi \in H^s_{per}$ *entonces* $C(t)\phi \in H^s_{per}$ *y* $\|C(t)\phi\|_s \leq \|\phi\|_s$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$*. i.e.* $C(t) \in L(H^s_{per})$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$*.*
Mejor aún, $C(t)\phi \in H^r_{per}$ $\forall r \leq s$*, satisfaciendo:* $\|C(t)\phi\|_r \leq \|\phi\|_s$*,* $\forall r \leq s$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$*. i.e.* $C(t) \in L(H^s_{per}, H^r_{per})$*,* $\forall r \leq s$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$*.*
9. *Si* $\psi \in H^{s-1}_{per}$ *entonces* $W(t)\psi \in H^s_{per}$ *y* $\|W(t)\psi\|_s \leq \sqrt{\text{máx}\left\{t^2, \left(\frac{2}{a^2}\right)\right\}}\,\|\psi\|_{s-1}$*. i.e.* $W(t) \in L(H^{s-1}_{per}, H^s_{per})$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$*.*
Mejor aún, $W(t)\psi \in H^r_{per}$ *,* $\forall r \leq s$*, satisfaciendo:*

$$\|W(t)\psi\|_r \leq \sqrt{\text{máx}\left\{t^2, \left(\frac{2}{a^2}\right)\right\}}\,\|\psi\|_{s-1},\ \forall r \leq s\,, \tag{3.3}$$

i.e. $W(t) \in L(H^{s-1}_{per}, H^r_{per})$*,* $\forall r \leq s$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$*.*
Se observa que la desigualdad (3.3) nos va indicando que la dependencia continua de la solución será local.

Demostración: Fácilmente se prueban los primeros cinco items. Probaremos los items restantes.

6. En efecto, sea $\psi_n \to \psi$ en P', probaremos que $S(t)\psi_n \to S(t)\psi$ en P'. Así, sea $\varphi \in P$ arbitrario, tenemos

$$\begin{aligned} < S(t)\psi_n - S(t)\psi, \varphi > &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{sen(a|k|t)\widehat{\psi_n}(k) - sen(a|k|t)\widehat{\psi}(k)\}\widehat{\varphi}(-k) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{\psi_n}(k) - \widehat{\psi}(k)\}\underbrace{\widehat{\varphi}(-k)sen(a|k|t)}_{\in S(Z)} \longrightarrow 0\,, \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$. Análogamente, conseguimos

$$\begin{aligned} < C(t)\psi_n - C(t)\psi, \varphi > &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{cos(a|k|t)\widehat{\psi_n}(k) - cos(a|k|t)\widehat{\psi}(k)\}\widehat{\varphi}(-k) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{\psi_n}(k) - \widehat{\psi}(k)\}\underbrace{\widehat{\varphi}(-k)cos(a|k|t)}_{\in S(Z)} \longrightarrow 0\,, \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$. Esto demuestra la continuidad de $C(t)$.
Igualmente, tenemos

$$\begin{aligned} < W(t)\psi_n - W(t)\psi, \varphi > &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{\frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\widehat{\psi_n}(k) - \frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\widehat{\psi}(k)\right\}\widehat{\varphi}(-k) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{\psi_n}(k) - \widehat{\psi}(k)\}\underbrace{\widehat{\varphi}(-k)\frac{sen(a|k|t)}{a|k|}}_{\in S(Z)} \longrightarrow 0\,, \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$. Esto demuestra la continuidad de $W(t)$.

7. Para $f \in P'$ probaremos:

$$\lim_{h\to 0} < \frac{W(t+h)-W(t)}{h} f, \varphi > = < C(t)f, \varphi > , \quad \forall \varphi \in P$$

En efecto, sabemos que si $f \in P'$ y $\varphi \in P$ entonces vale

$$\frac{1}{2\pi} < f, \varphi > = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k) < \infty \,. \tag{3.4}$$

Usando (3.4) obtenemos

$$\begin{aligned} &< \frac{W(t+h)-W(t)}{h} f - C(t)f, \varphi > \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \underbrace{\frac{\frac{sen(a|k|(t+h))}{a|k|} - \frac{sen(a|k|t)}{a|k|}}{h}}_{M(k,t,h)=} - cos(a|k|t) \right\} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k) \,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $M(k,t,h) - cos(a|k|t) \to 0$ cuando $h \to 0$.
Ahora, necesitamos la convergencia uniforme de la serie (3.5) para habilitar el intercambio de límites. Usando el teorema del valor medio a $f(t) = sen(a|k|t)$ sobre $[t, t+h]$, tenemos: $M(k,t,h) = cos(a|k|\xi), \ \xi \in [t, t+h]$.
Mayoramos el k- ésimo término de la serie (3.5) obteniendo: $I_k(t,h) \leq 2\widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k)$ y de (3.4) tenemos $\sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k) < \infty$, entonces usando el Teorema M- Test de Weierstrass conseguimos la convergencia uniforme de la serie (3.5). Por lo tanto, es posible intercambiar límites y obtener

$$\lim_{h\to 0} < \frac{W(t+h)-W(t)}{h} f - C(t)f, \varphi > = \lim_{h\to 0} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(t,h) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{h\to 0} I_k(t,h)}_{=0} = 0 \,.$$

8. Si $\phi \in H^s_{per}$, probaremos que $(cos(a|k|t)\widehat{\phi(k)})_{k\in Z} \in l^2_s$. Como el coseno es acotado, tenemos

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |cos(a|k|t)\widehat{\phi}(k)|^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |cos(a|k|t)|^2 (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 = \|\phi\|_s^2 < \infty \,. \end{aligned}$$

Así, $\|C(t)\phi\|_s \leq \|\phi\|_s$. Análogamente, se obtiene: $\|C(t)\phi\|_r \leq \|\phi\|_r \leq \|\phi\|_s \ \forall r \leq s$.

9. Si $\psi \in H^{s-1}_{per}$, probaremos que $\left(\frac{sen(a|k|t)}{a|k|} \widehat{\psi}(k) \right)_{k\in Z} \in l^2_s$. Obtenemos la siguiente estimativa:

$$\begin{aligned} & 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \frac{sen(a|k|t)}{a|k|} \widehat{\psi}(k) \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{sen(a|k|t)}{a|k|} \right|^2 (1+k^2)^s \left| \widehat{\psi}(k) \right|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} |sen(a|k|t)|^2 \left(\frac{1+k^2}{k^2} \right) (1+k^2)^{s-1} |\widehat{\psi}(k)|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{a^2} (1+k^2)^{s-1} |\widehat{\psi}(k)|^2 \\ &= \left(\frac{2}{a^2} \right) 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1} |\widehat{\psi}(k)|^2 \qquad (3.6) \\ &\leq \frac{2}{a^2} \|\psi\|_{s-1}^2 < \infty \end{aligned}$$

pues para $k \neq 0$ se tiene $1 \leq k^2$ y por consiguiente $\frac{1+k^2}{k^2} \leq 2$. Usando (3.6) obtenemos

$$\begin{aligned}\|W(t)\psi\|_s^2 &\leq t^2 2\pi|\widehat{\psi}(0)|^2 + \left(\frac{2}{a^2}\right) 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1}|\widehat{\psi}(k)|^2 \\ &\leq \text{máx}\left\{t^2, \left(\frac{2}{a^2}\right)\right\} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1}|\widehat{\psi}(k)|^2 \;=\; \text{máx}\left\{t^2, \left(\frac{2}{a^2}\right)\right\} \|\psi\|_{s-1}^2 .\end{aligned}$$

Similarmente para $r \leq s$ obtenemos:

$$\begin{aligned}(3.7)\quad 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left|\frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\widehat{\psi}(k)\right|^2 &\leq \left(\frac{2}{a^2}\right) 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-1}|\widehat{\psi}(k)|^2 \\ &\leq \frac{2}{a^2}\|\psi\|_{s-1}^2 \;<\; \infty .\end{aligned}$$

También, usando (3.7), obtenemos para todo $r \leq s$:

$$\begin{aligned}\|W(t)\psi\|_r^2 &\leq t^2 2\pi|\widehat{\psi}(0)|^2 + \left(\frac{2}{a^2}\right) 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-1}|\widehat{\psi}(k)|^2 \\ &\leq \text{máx}\left\{t^2, \left(\frac{2}{a^2}\right)\right\} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-1}|\widehat{\psi}(k)|^2 \\ &= \text{máx}\left\{t^2, \left(\frac{2}{a^2}\right)\right\} \|\psi\|_{r-1}^2 \;\leq\; \text{máx}\left\{t^2, \left(\frac{2}{a^2}\right)\right\} \|\psi\|_{s-1}^2 \;<\; \infty . \;\blacksquare\end{aligned}$$

A seguir enunciamos y demostramos algunos resultados importantes obtenidos a partir de las familias de operadores introducidos en la Proposición 1.

Teorema 1. *Sea $a > 0$, $s \in \mathbb{R}$ fijado y W definido en la Proposición 1. Entonces $W(t) \in L(H_{per}^{s-1}, H_{per}^r)$, $\forall r \leq s$, $\forall t \in \mathbb{R}$ y la aplicación: $t \in \mathbb{R} \longrightarrow W(t)$ es fuertemente continua, i.e.*

$$(3.8) \qquad \lim_{t'\to t} \|W(t)\varphi - W(t')\varphi\|_r = 0 \;\forall \varphi \in H_{per}^{s-1}, \;\forall t \in \mathbb{R}, \forall r \leq s .$$

Además, se verifican las siguientes convergencias:

$$(3.9) \qquad \lim_{h\to 0} \left\|\frac{W(t+h)\varphi - W(t)\varphi}{h} - C(t)\varphi\right\|_{r-1} = 0 , \;\forall r \leq s ,$$

$$(3.10) \qquad \lim_{h\to 0} \left\|\frac{\partial_t W(t+h)\varphi - \partial_t W(t)\varphi}{h} + a^2|D|^2 W(t)\varphi\right\|_{r-2} = 0 , \;\forall r \leq s ,$$

siendo la convergencia uniformemente respecto a t, donde:
$a^2|D|^2 W(t)\varphi := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^2|k|^2 \frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\widehat{\varphi}(k)\phi_k .$

En particular, $W(t)\varphi$ satisface la ecuación de onda

$$\left|\begin{array}{l} \partial_t^2 W(t)\varphi - a^2\partial_x^2 W(t)\varphi = 0 \in H_{per}^{s-2} \\ W(0)\varphi = 0 \\ \partial_t W(0)\varphi = \varphi \in H_{per}^{s-1} \end{array}\right.$$

con la derivada respecto al tiempo calculado en (3.9) y (3.10) para $r = s$.

Demostración: Primero, probaremos (3.8) para el caso $r = s$. Sea $\varphi \in H^{s-1}_{per}$ y $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned}\|W(t)\varphi - W(t')\varphi\|_s^2 &= 2\pi|t\widehat{\varphi}(0) - t'\widehat{\varphi}(0)|^2\\ &+ 2\pi\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|\left\{\frac{sen(a|k|t) - sen(a|k|t')}{a|k|}\right\}\widehat{\varphi}(k)\right|^2\\ &= 2\pi|t\widehat{\varphi}(0) - t'\widehat{\varphi}(0)|^2\\ &+ 2\pi\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|\underbrace{\left\{\frac{sen(a|k|t) - sen(a|k|t')}{a|k|}\right\}}_{M(t):=}\right|^2|\widehat{\varphi}(k)|^2 .\end{aligned} \tag{3.11}$$

Se observa que $\lim_{t\to t'} M(t) = 0$. Ahora, necesitamos la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para eso, tomamos el k-ésimo término de la serie y lo mayoramos por una serie convergente, i.e.

$$\begin{aligned}I_{k,t} &:= (1+k^2)^s\,|M(t)|^2\,|\widehat{\varphi}(k)|^2 \;=\; (1+k^2)^{s-1}|sen(a|k|t) - sen(a|k|t')|^2\frac{1}{a^2|k|^2}(1+k^2)|\widehat{\varphi}(k)|^2\\ &\leq\; (1+k^2)^{s-1}\frac{4}{a^2}\left(\frac{1+k^2}{k^2}\right)|\widehat{\varphi}(k)|^2 \;\leq\; \frac{8}{a^2}(1+k^2)^{s-1}|\widehat{\varphi}(k)|^2 ,\end{aligned}$$

donde hemos usado $1 \leq |k|^2$ para $k \in Z - \{0\}$ y $\frac{1+k^2}{k^2} \leq 2$ para $k \in Z - \{0\}$.

Así, tenemos: $2\pi\displaystyle\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t} \leq \frac{8}{a^2}2\pi\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-1}|\widehat{\varphi}(k)|^2 \;<\; \infty$, y usando el Teorema del M-Test de Weierstrass resulta que la serie converge uniformemente. Luego, está permitido el intercambio de límite, esto es,

$$\lim_{t\to t'}\|W(t)\varphi - W(t')\varphi\|_s^2 = 0 + 2\pi\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\lim_{t\to t'} I_{k,t}}_{=0} = 0 .$$

De modo análogo se demuestra que $\displaystyle\lim_{t\to t'}\|W(t)\varphi - W(t')\varphi\|_r^2 = 0\,, \forall r \leq s\,,\ \forall\varphi \in H^{s-1}_{per}$.

Ahora, probaremos (3.9) para el caso $r = s$. Sea $\varphi \in H^{s-1}_{per}$ y $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{W(t+h)\varphi - W(t)\varphi}{h} - C(t)\varphi\right\|_{s-1}^2 =\\ &2\pi\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-1}\left|\underbrace{\left\{\frac{sen(a|k|(t+h)) - sen(a|k|t)}{a|k|h} - cos(a|k|t)\right\}}_{M(t,h):=}\right|^2|\widehat{\varphi}(k)|^2 .\end{aligned} \tag{3.12}$$

Observamos que $\lim_{h\to 0} M(t,h) = 0$. Ahora, necesitamos la convergencia uniforme de la serie para habilitar el intercambio de límites. Para ello procederemos mayorando el k- ésimo término de la serie. Previamente, usando el Teorema del valor medio, aplicado a la función $f(y) = sen(a|k|(t+y))$ en el intervalo $[0,h]$, con $h > 0$, obtenemos que existe $\xi \in [0,h]$ tal que $f(h) - f(0) = hf'(\xi) = ha|k|cos(a|k|(t+\xi))$. Mayorando $M(t,h)$, tenemos

$$|M(t,h)| \leq |cos(a|k|(t+\xi))| + |cos(a|k|(t))| \leq 2 . \tag{3.13}$$

Pasamos a mayorar el k- ésimo término de la serie usando (3.13) y obtenemos

$$I_{k,t,h} = (1+k^2)^{s-1}|M(t,h)|^2|\widehat{\varphi}(k)|^2 \;\leq\; (1+k^2)^{s-1}4|\widehat{\varphi}(k)|^2 .$$

Con ello $2\pi\displaystyle\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t,h} \leq 8\pi\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-1}|\widehat{\varphi}(k)|^2 \leq 4\|\varphi\|_{s-1}^2 < \infty$, y usando el Teorema del M-Test de Weierstrass resulta que la serie en (3.12) converge uniformemente. Luego, está permitido el intercambio de límite, esto es,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{W(t+h)\varphi - W(t)\varphi}{h} - C(t)\varphi\right\|_{s-1}^2 = 2\pi\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}\lim_{h\to 0} I_{k,t,h} = 0.$$

De modo análogo se demuestra que

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{W(t+h)\varphi - W(t)\varphi}{h} - C(t)\varphi\right\|_{r-1}^2 = 0\,, \quad \forall r \leq s\,,\ \forall \varphi \in H_{per}^{s-1}\,.$$

Finalmente, probaremos (3.10) para $r = s$. Sea $\varphi \in H_{per}^{s-1}$ y $t \in \mathbb{R}$,

$$\left\|\frac{\partial_t W(t+h)\varphi - \partial_t W(t)\varphi}{h} + a^2|D|^2 W(t)\varphi\right\|_{s-2}^2 =$$

$$2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2}\left|\underbrace{\left\{\frac{cos(a|k|(t+h)) - cos(a|k|t)}{h} + a|k|sen(a|k|t)\right\}}_{M_1(t,h):=}\right|^2 |\widehat{\varphi}(k)|^2\,. \tag{3.14}$$

Observamos que $\lim_{h\to 0} M_1(t,h) = 0$. Ahora, necesitamos la convergencia uniforme de la serie para habilitar el intercambio de límites. Para ello procederemos acotando el k- ésimo término de la serie. Previamente, usando el Teorema del valor medio, aplicado a la función $f(y) = cos(a|k|(t+y))$ en el intervalo $[0,h]$, con $h > 0$, obtenemos que existe $\xi \in [0,h]$ tal que $f(h) - f(0) = hf'(\xi) = -ha|k|sen(a|k|(t+\xi))$. Mayorando $M_1(t,h)$ tenemos

$$|M_1(t,h)| \leq |-a|k|sen(a|k|(t+\xi))| + |a|k|sen(a|k|(t))| \leq 2a|k|\,. \tag{3.15}$$

Pasamos a acotar el k- ésimo término de la serie usando (3.15) y obtenemos

$$\begin{aligned} I_{k,t,h} = (1+k^2)^{s-2}|M_1(t,h)|^2|\widehat{\varphi}(k)|^2 &\leq (1+k^2)^{s-2}4a^2k^2|\widehat{\varphi}(k)|^2 \leq (1+k^2)^{s-2}4a^2(1+k^2)|\widehat{\varphi}(k)|^2 \\ &= 4a^2(1+k^2)^{s-1}|\widehat{\varphi}(k)|^2\,. \end{aligned}$$

Así, $2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t,h} \leq 8\pi a^2 \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1}|\widehat{\varphi}(k)|^2 \leq 4a^2\|\varphi\|_{s-1}^2 < \infty\,,$ y usando el Teorema del M-Test de Weierstrass la serie en (3.14) converge uniformemente. Luego, está permitido el intercambio de límite, esto es,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\partial_t W(t+h)\varphi - \partial_t W(t)\varphi}{h} + a^2|D|^2 W(t)\varphi\right\|_{s-2}^2 = 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} \lim_{h\to 0} I_{k,t,h} = 0\,.$$

De modo análogo se prueba:

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\partial_t W(t+h)\varphi - \partial_t W(t)\varphi}{h} + a^2|D|^2 W(t)\varphi\right\|_{r-2}^2 = 0\,,\ \forall r \leq s\,,\ \forall \varphi \in H_{per}^{s-1}\,. \blacksquare$$

Observación 1. *Del Teorema 1 se obtienen los siguientes enunciados:*

1. $W(t) \in L(H_{per}^{s-1}, H_{per}^{s})$ $\forall t \in \mathbb{R}$ *y la aplicación:* $t \in \mathbb{R} \longrightarrow W(t)$ *es fuertemente continua, i.e.* $\forall r \leq s$ *se tiene:*

$$\lim_{t'\to t} \|W(t)\varphi - W(t')\varphi\|_s = 0\ \forall \varphi \in H_{per}^{s-1}\,. \tag{3.16}$$

2. *Además, valen las siguientes convergencias:*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{W(t+h)\varphi - W(t)\varphi}{h} - C(t\varphi\right\|_{s-1} = 0\,, \tag{3.17}$$

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\partial_t W(t+h)\varphi - \partial_t W(t)\varphi}{h} + a^2|D|^2 W(t)\varphi\right\|_{s-2} = 0\,. \tag{3.18}$$

3. *La igualdad (3.17) nos dice que* $\partial_t W(t)\varphi = C(t)\varphi$ *en* H_{per}^{s-1} *y que la igualdad (3.18) dice* $\partial_t^2 W(t)\varphi = -a^2|D|^2 W(t)\varphi$ *en* H_{per}^{s-2}.

Teorema 2. *Sea* $a > 0\,,\ s \in \mathbb{R}$ *fijado y* C *definido en la Proposición 1. Entonces* $C(t) \in L(H_{per}^{s}, H_{per}^{r})$ $\forall r \leq s$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$ *y la aplicación:* $t \in \mathbb{R} \longrightarrow C(t)$ *es fuertemente continua, i.e.*

$$\lim_{t'\to t} \|C(t)\phi - C(t')\phi\|_r = 0\ \forall \phi \in H_{per}^{s}\,,\ \forall r \leq s\,,\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

Además, $\forall r \leq s$ vale las siguientes convergencias:

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{C(t+h)\phi - C(t)\phi}{h} + a|D|sen(a|D|t)\phi\right\|_{r-1} = 0\,, \tag{3.20}$$

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\partial_t C(t+h)\phi - \partial_t C(t)\phi}{h} + a^2|D|^2 C(t)\phi\right\|_{r-2} = 0\,, \tag{3.21}$$

siendo las convergencias uniformemente con respecto a t, donde

$$a|D|sen(a|D|t)\phi := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a|k|sen(a|k|t)\widehat{\phi}(k)\phi_k\ ,\quad a^2|D|^2C(t)\phi := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^2|k|^2cos(a|k|t)\widehat{\phi}(k)\phi_k\,.$$

También, se verifica que la aplicación: $t \in \mathbb{R} \longrightarrow \partial_t C(t)$ es fuertemente continua sobre H^{r-1}_{per}, $\forall r \leq s$.

En particular, $C(t)\phi$ satisface la ecuación de onda:

$$\left|\begin{array}{l} \partial_t^2 C(t)\phi - a^2\partial_x^2 C(t)\phi = 0 \in H^{s-2}_{per} \\ C(0)\phi = \phi \in H^s_{per} \\ \partial_t C(0)\phi = 0 \end{array}\right.$$

con la derivada respecto al tiempo calculado en (3.20) y (3.21) para $r = s$.

Demostración: Primero, probaremos (3.19) para $r = s$. Sea $\phi \in H^s_{per}$ y $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|C(t)\phi - C(t')\phi\|_s^2 &= 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|\{cos(a|k|t) - cos(a|k|t')\}\,\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \Big|\underbrace{\{cos(a|k|t) - cos(a|k|t')\}}_{M_1(t):=}\Big|^2 \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 . \end{aligned} \tag{3.22}$$

Se observa que $\lim_{t\to t'} M_1(t) = 0$. Ahora, necesitamos de la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para eso, tomamos el k-ésimo término de la serie y lo mayoramos por una serie convergente, i.e.

$$I_{k,t} := (1+k^2)^s\,|M_1(t)|^2\left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 = (1+k^2)^s|cos(a|k|t) - cos(a|k|t')|^2|\widehat{\phi}(k)|^2 \leq 4(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2\,.$$

Así, $2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t} \leq 4(2\pi)\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \leq 4\|\phi\|_s^2 < \infty$, y usando el Teorema del M-Test de Weierstrass resulta la convergencia uniforme de la serie. Luego está permitido el intercambio de límite, esto es, $\lim_{t\to t'}\|C(t)\phi - C(t')\phi\|_s^2 = 2\pi\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\lim_{t\to t'} I_{k,t}}_{=0} = 0\,.$

De modo análogo se demuestra que $\lim_{t\to t'}\|C(t)\phi - C(t')\phi\|_r^2 = 0\,,\ \forall r \leq s$.

Ahora, probaremos (3.20) para $r = s$. Sea $\phi \in H^s_{per}$ y $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{C(t+h)\phi - C(t)\phi}{h} + a|D|sen(a|D|t)\phi\right\|_{s-1}^2 = \\ &2\pi\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-1}\left|\underbrace{\left\{\frac{cos(a|k|(t+h)) - cos(a|k|t)}{h} + a|k|sen(a|k|t)\right\}}_{M_1(t,h):=}\right|^2\left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Observamos que $\lim_{h\to 0} M_1(t,h) = 0$. Ahora, necesitamos la convergencia uniforme de la serie para habilitar el intercambio de límites. Para ello procederemos mayorando el k- ésimo término de la serie. Previamente, usando el Teorema del valor medio, aplicado a la función $f(y) = cos(a|k|(t+y))$ en el intervalo

$[0,h]$, con $h>0$, obtenemos que existe $\xi\in[0,h]$ tal que $f(h)-f(0)=hf'(\xi)=-ha|k|sen(a|k|(t+\xi))$. Mayorando $M_1(t,h)$ tenemos

$$|M_1(t,h)|\leq|a|k|sen(a|k|(t+\xi))|+|a|k|sen(a|k|(t))|\leq 2a|k|\,. \tag{3.24}$$

Pasamos a mayorar el k- ésimo término de la serie usando (3.24) y obtenemos

$$\begin{aligned} I_{k,t,h}=(1+k^2)^{s-1}|M_1(t,h)|^2|\widehat{\phi}(k)|^2\leq(1+k^2)^{s-1}4a^2|k|^2|\widehat{\phi}(k)|^2\leq 4a^2(1+k^2)^{s-1}(1+k^2)|\widehat{\phi}(k)|^2\\ =4a^2(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2\,.\end{aligned}$$

Así, $2\pi\displaystyle\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}I_{k,t,h}\leq 8\pi a^2\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2\leq 4a^2\|\phi\|_s^2<\infty$, y usando el Teorema del M-Test de Weierstrass tenemos que la serie en (3.23) converge uniformemente. Luego, está permitido el intercambio de límite, esto es,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{C(t+h)\phi-C(t)\phi}{h}+a|D|sen(a|D|t)\phi\right\|_{s-1}^2=2\pi\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\lim_{h\to 0}I_{k,t,h}}_{=0}=0.$$

De modo análogo se prueba $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left\|\frac{C(t+h)\phi-C(t)\phi}{h}+a|D|sen(a|D|t)\phi\right\|_{r-1}^2=0\,,\ \forall r\leq s\,.$

A seguir probaremos (3.21) para $r=s$. Sea $\phi\in H^s_{per}$ y $t\in\mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial_tC(t+h)\phi-\partial_tC(t)\phi}{h}+a^2|D|^2C(t)\phi\right\|_{s-2}^2&=2\pi\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-2}\left|\widehat{\phi}(k)\right|^2\cdot\\ &\left|\underbrace{\left\{\frac{-a|k|sen(a|k|(t+h))+a|k|sen(a|k|t)}{h}+a^2|k|^2cos(a|k|t)\right\}}_{M_2(t,h):=}\right|^2\,.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Observamos que $\lim_{h\to 0}M_2(t,h)=0$. Ahora, necesitamos la convergencia uniforme de la serie para habilitar el intercambio de límites. Para ello procederemos mayorando el k- ésimo término de la serie. Previamente, usando el Teorema del valor medio, aplicado a la función $f(y)=sen(a|k|(t+y))$ en el intervalo $[0,h]$, con $h>0$, obtenemos que existe $\xi\in[0,h]$ tal que $f(h)-f(0)=hf'(\xi)=ha|k|cos(a|k|(t+\xi))$. Mayorando $M_2(t,h)$ tenemos

$$|M_2(t,h)|\leq|a|k|cos(a|k|(t+\xi))|+|a|k|cos(a|k|(t))|\leq 2a|k|\,. \tag{3.26}$$

Pasamos a acotar el k- ésimo término de la serie usando (3.26) y obtenemos

$$\begin{aligned} I_{k,t,h}&=(1+k^2)^{s-2}a^2|k|^2|M_2(t,h)|^2|\widehat{\phi}(k)|^2\leq(1+k^2)^{s-2}4a^4(k^2)^2|\widehat{\phi}(k)|^2\\ &\leq 4a^4(1+k^2)^{s-2}(1+k^2)^2|\widehat{\phi}(k)|^2=4a^4(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2\,.\end{aligned}$$

Así, $2\pi\displaystyle\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}I_{k,t,h}\leq 8\pi a^4\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2\leq 4a^4\|\phi\|_s^2<\infty$, y usando el Teorema del M-Test de Weierstrass tenemos que la serie en (3.25) converge uniformemente. Luego, está permitido el intercambio de límite, esto es,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\partial_tC(t+h)\phi-\partial_tC(t)\phi}{h}+a^2|D|^2C(t)\phi\right\|_{s-2}^2=2\pi\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\lim_{h\to 0}I_{k,t,h}}_{=0}=0\,.$$

De modo análogo se prueba $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\partial_tC(t+h)\phi-\partial_tC(t)\phi}{h}+a^2|D|^2C(t)\phi\right\|_{r-2}^2=0\,,\ \forall r\leq s\,.$

Finalmente, probaremos

$$\lim_{t'\to t}\|\partial_tC(t)\phi-\partial_tC(t')\phi\|_{s-1}=0\,,\ \forall\phi\in H^s_{per}\,,\ \forall t\in\mathbb{R}\,. \tag{3.27}$$

Sea $\phi \in H^s_{per}$ y $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\|\partial_t C(t)\phi - \partial_t C(t')\phi\|^2_{s-1} = 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1} \left|\{a|k|sen(a|k|t) - a|k|sen(a|k|t')\}\,\widehat{\phi}(k)\right|^2$$

$$= 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1} a^2|k|^2 \left|\underbrace{\{sen(a|k|t) - sen(a|k|t')\}}_{M_3(t):=}\right|^2 \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 . \tag{3.28}$$

Se observa que $\lim_{t\to t'} M_3(t) = 0$. Ahora, necesitamos de la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para eso, tomamos el k-ésimo término de la serie y lo mayoramos por una serie convergente, i.e.

$$I_{k,t} := (1+k^2)^{s-1}a^2|k|^2\,|M_3(t)|^2 \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 = (1+k^2)^s a^2 |sen(a|k|t) - sen(a|k|t')|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2$$
$$\leq 4a^2(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 .$$

Así, $2\pi \sum\limits_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t} \leq 4a^2(2\pi) \sum\limits_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \leq 4a^2\|\phi\|^2_s < \infty$, y usando el Teorema del M-Test de Weierstrass tenemos que la serie converge uniformemente. Luego, está permitido el intercambio de límite, esto es, $\lim\limits_{t\to t'} \|\partial_t C(t)\phi - \partial_t C(t')\phi\|^2_{s-1} = 2\pi \sum\limits_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{t\to t'} I_{k,t}}_{=0} = 0$.

De modo análogo se demuestra que $\lim\limits_{t\to t'} \|\partial_t C(t)\phi - \partial_t C(t')\phi\|^2_{r-1} = 0$, $\forall r \leq s$. ■

Observación 2. *Del Teorema anterior es inmediato:*

1. *La igualdad (3.20) para $r = s$ nos dice que $\partial_t C(t)\phi = -a|D|sen(a|D|t)\phi$ en H^{s-1}_{per}.*
2. *También, la igualdad (3.21) para $r = s$ nos dice $\partial^2_t C(t)\phi = -a^2|D|^2 C(t)\phi$ en H^{s-2}_{per}.*
3. *La familia $\{C(t)\}_{t\in R}$ es conocida como la familia de operadores cosenos.*

4. Existencia de solución global de la ecuación de onda homogénea. A seguir enunciaremos y probaremos que la ecuación de onda homogénea en espacios de Sobolev periódico posee solución.

Teorema 3 (Existencia de Solución). *Sea s un número real fijo y el problema*

$$(P_2)\left|\begin{array}{l} u \in C([0,\infty), H^s_{per}) \cap C^1([0,\infty), H^{s-1}_{per}) \\ \partial^2_t u - a^2\partial^2_x u = 0 \in H^{s-2}_{per} \\ u(0) = \phi \in H^s_{per} \\ \partial_t u(0) = \psi \in H^{s-1}_{per} \end{array}\right.$$

con $a > 0$, entonces existe una única $u \in C([0,\infty), H^s_{per}) \cap C^1([0,\infty), H^{s-1}_{per})$ solución de (P_2).

Demostración: Hacemos la prueba en siete etapas.

1. Primero obtendremos el candidato a solución. Para conseguir ese candidato tomamos la transformada de Fourier a la ecuación $\partial^2_t u = a^2\partial^2_x u$ y conseguimos: $\partial^2_t \hat{u} = -a^2k^2\widehat{u}$, que para cada $k \in \mathbb{Z}$ es una EDO con datos iniciales $\hat{u}(k,0) = \hat{\phi}(k)$ y $\partial_t\hat{u}(k,0) = \hat{\psi}(k)$.

   Así, planteamos un sistema no acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, i. e. los PVI's

$$(\Omega_k)\left|\begin{array}{l} \hat{u} \in C([0,+\infty), l^2_s(\mathbb{Z})) \\ \partial^2_t \hat{u}(k,t) = -a^2k^2\hat{u}(k,t) \\ \hat{u}(k,0) = \hat{\phi}(k) \text{ con } \widehat{\phi} \in l^2_s(\mathbb{Z}) \\ \partial_t\hat{u}(k,0) = \hat{\psi}(k) \text{ con } \widehat{\psi} \in l^2_{s-1}(\mathbb{Z}) , \end{array}\right.$$

   $\forall k \in \mathbb{Z}$, que resolvemos para los siguientes casos:

Caso $k=0$**:** La EDO a resolver es $\partial_t^2\widehat{u}(0,t)=0$, luego la solución es $\widehat{u}(0,t)=ct+d$, con constantes c y d por determinar. Usando el primer dato inicial obtenemos $\widehat{\phi}(0)=\widehat{u}(0,0)=d$. También, como $\partial_t\widehat{u}(0,t)=c$, usando el segundo dato inicial obtenemos $\widehat{\psi}(0)=\partial_t\widehat{u}(0,0)=c$.

Luego, $\widehat{u}(0,t)=\widehat{\psi}(0)t+\widehat{\phi}(0)$.

Caso $k\neq 0$**:** Tenemos $P(r):=r^2+a^2|k|^2$, luego las raices de P (i.e. resolver $P(r)=0$) son $r=\pm a|k|i$. Así, obtenemos $\widehat{u}(k,t)=A_k cos(a|k|t)+B_k sen(a|k|t)$, donde A_k y B_k son constantes por determinar. Usando el primer dato inicial obtenemos $\widehat{\phi}(k)=\widehat{u}(k,0)=A_k$. De la igualdad $\partial_t\widehat{u}(k,t)=-A_k a|k|sen(a|k|t)+B_k a|k|cos(a|k|t)$, con la evaluación en $t=0$ y usando el segundo dato inicial, obtenemos: $\widehat{\psi}(k)=\partial_t\widehat{u}(k,0)=B_k a|k|$.

Ahora, como $k\neq 0$, obtenemos $B_k=\dfrac{\widehat{\psi}(k)}{a|k|}$.

Finalmente, $\widehat{u}(k,t)=\widehat{\phi}(k)cos(a|k|t)+\widehat{\psi}(k)\dfrac{sen(a|k|t)}{a|k|}$.

Resumiendo, hemos conseguido lo siguiente

$$\hat{u}(k,t)=\begin{cases} cos(a|k|t)\widehat{\phi}(k)+\frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\widehat{\psi}(k)\,, & \text{si } k\neq 0\\ \widehat{\phi}(0)+t\widehat{\psi}(0)\,, & \text{si } k=0\end{cases}\,,$$

de donde obtenemos nuestro candidato a solución:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{u}(k,t)\phi_k\\ &= \widehat{\phi}(0)+t\widehat{\psi}(0)+\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}cos(a|k|t)\widehat{\phi}(k)\phi_k+\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}\frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\widehat{\psi}(k)\phi_k\\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}cos(a|k|t)\widehat{\phi}(k)\phi_k+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\widehat{\psi}(k)\phi_k\,, \end{aligned}\tag{4.1}$$

donde estamos denotando $\phi_k(x)=e^{ikx}$ y usando lo que se convencionó en (3.1): $\left.\frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\right|_{k=0}=t$.

2. De (4.1) tenemos: $u(t)=C(t)\phi+W(t)\psi=\partial_t W(t)\phi+W(t)\psi\in H^s_{per}$.
3. Evaluando, obtenemos: $u(0)=C(0)\phi+W(0)\psi=\phi+0=\phi$.
4. Usando los teoremas previos, específicamente las igualdades (3.10) y (3.21) para $r=s$, tenemos que $u(t)=C(t)\phi+W(t)\psi$ satisface en H^{s-2}_{per}:

$$\begin{aligned}\partial_t^2u(t)&=\partial_t^2C(t)\phi+\partial_t^2W(t)\psi=a^2\partial_x^2C(t)\phi+a^2\partial_x^2W(t)\psi\\ &=a^2\partial_x^2\{C(t)\phi+W(t)\psi\}=a^2\partial_x^2u(t)\,.\end{aligned}$$

Esto es, satisface la ecuación de la onda: $\partial_t^2u(t)-a^2\partial_x^2u(t)=0\in H^{s-2}_{per}$ en el sentido:

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\partial_t u(t+h)-\partial_t u(t)}{h}+a^2|D|^2u(t)\right\|_{s-2}=0\,.\tag{4.2}$$

5. También, usando los teoremas previos obtenemos: $\partial_t u(0)=\partial_t C(0)\phi+\partial_t W(0)\psi=0+\psi=\psi$.
6. De (3.8) y (3.19) para $r=s$, obtenemos que $u\in C([0,\infty),H^s_{per})$. En efecto,

$$\begin{aligned}0\le\|u(t)-u(t')\|_s&=\|C(t)\phi+W(t)\psi-\{C(t')\phi+W(t')\psi\}\|_s\\ &=\|\{C(t)\phi-C(t')\phi\}+\{W(t)\psi-W(t')\psi\}\|_s\\ &\le\|C(t)\phi-C(t')\phi\|_s+\|W(t)\psi-W(t')\psi\|_s\,,\end{aligned}$$

tomando límite cuando $t\to t'$ tenemos

$$0\le\lim_{t\to t'}\|u(t)-u(t')\|_s\le\lim_{t\to t'}\|C(t)\phi-C(t')\phi\|_s+\lim_{t\to t'}\|W(t)\psi-W(t')\psi\|_s=0+0=0\,.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{t\to t'}\|u(t)-u(t')\|_s=0$.

7. Similarmente, usando (3.19) para $r = s$, (3.27), la inmersión $H^s_{per} \subset H^{s-1}_{per}$ y que

$$\partial_t u(t) = \partial_t \{C(t)\phi + W(t)\psi\} = \partial_t C(t)\phi + \partial_t W(t)\psi = \partial_t C(t)\phi + C(t)\psi\,,$$

se consigue demostrar que $\partial_t u \in C([0,\infty), H^{s-1}_{per})$. En efecto,

$$\begin{aligned}
0 &\le \|\partial_t u(t) - \partial_t u(t')\|_{s-1} \\
&= \|a|D|sen(a|D|t)\phi + C(t)\psi - \{a|D|sen(a|D|t')\phi + C(t')\psi\}\|_{s-1} \\
&= \|\{a|D|sen(a|D|t)\phi - a|D|sen(a|D|t')\phi\} + \{C(t)\psi - C(t')\psi\}\|_{s-1} \\
&\le \|a|D|sen(a|D|t)\phi - a|D|sen(a|D|t')\phi\|_{s-1} + \|C(t)\psi - C(t')\psi\|_{s-1} \\
&= \|\partial_t C(t)\phi - \partial_t C(t')\phi\|_{s-1} + \|C(t)\psi - C(t')\psi\|_{s-1}\,,
\end{aligned}$$

tomando límite cuando $t \to t'$ tenemos

$$\begin{aligned}
0 \le \lim_{t\to t'} \|\partial_t u(t) - \partial_t u(t')\|_{s-1} &\le \lim_{t\to t'} \|\partial_t C(t)\phi - \partial_t C(t')\phi\|_{s-1} + \lim_{t\to t'} \|C(t)\psi - C(t')\psi\|_{s-1} \\
&= 0 + 0 = 0\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{t\to t'} \|\partial_t u(t) - \partial_t u(t')\|_{s-1} = 0$. ■

En consecuencia tenemos el siguiente resultado

Corolario 1. *La única solución de (P_2) es*

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} cos(a|k|t)\widehat{\phi}(k)e^{ikx} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\widehat{\psi}(k)e^{ikx}\,,$$

donde estamos considerando la convención (3.1): $\left.\frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\right|_{k=0} = t$.

5. Dependencia continua de la solución de (P_2). Obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2. *Sea $T > 0$, la solución de (P_2) satisface:*

$$\|u(t)\|_{H^s_{per}} \le \widetilde{C}\|(\phi,\psi)\|_{H^s_{per}\times H^{s-1}_{per}}\,,\ \forall t \in [0,T]\,, \tag{5.1}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s_{per}} \le \widetilde{C}\|(\phi,\psi)\|_{H^s_{per}\times H^{s-1}_{per}}\,, \tag{5.2}$$

donde $\widetilde{C} := \text{máx}\left\{1, \sqrt{\text{máx}\left\{T^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\right\} > 0$.
Además, se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\|\partial_t u(t)\|_{H^{s-1}_{per}} \le (a+1)\|(\phi,\psi)\|_{H^s_{per}\times H^{s-1}_{per}}\ \forall t \in [0,\infty)\,, \tag{5.3}$$

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|\partial_t u(t)\|_{H^{s-1}_{per}} \le (a+1)\|(\phi,\psi)\|_{H^s_{per}\times H^{s-1}_{per}}\,. \tag{5.4}$$

Demostración: La desigualdad (5.1) se obtiene directamente de $u(t) = C(t)\phi + W(t)\psi$ y las cuentas hechas para probar que $C(t)\phi \in H^s_{per}$ y $W(t)\psi \in H^s_{per}$, para $\phi \in H^s_{per}$ y $\psi \in H^{s-1}_{per}$ respectivamente. Por otro lado, afirmamos que para $\phi \in H^s_{per}$ vale

$$\|\partial_t C(t)\phi\|_{s-1} \le a\|\phi\|_s \quad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{5.5}$$

En efecto, usando que $|k|^2 \le 1 + |k|^2$ $\forall k \in Z$ y que el seno está acotado por 1, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\|\partial_t C(t)\phi\|^2_{s-1} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1}|a|k|sen(a|k|t)\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&= a^2 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1}|k|^2|sen(a|k|t)|^2|\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\le a^2 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s}|\widehat{\phi}(k)|^2 \ = \ a^2\|\phi\|^2_s\,.
\end{aligned}$$

La desigualdad (5.3) sigue de $\partial_t u(t) = \partial_t C(t)\phi + C(t)\psi$ y de la desigualdad (5.5). ■

Corolario 2 (Dependencia continua de la solución sobre Compactos). *La solución de la ecuación de la onda depende continuamente respecto a los datos iniciales, en intervalos compactos $[0,T]$, con $T>0$.*
Además, la aplicación:

$$\begin{aligned} : H^s_{per}\times H^{s-1}_{per} &\longrightarrow C([0,\infty),H^{s-1}_{per}) \\ (\phi,\psi) &\longrightarrow \partial_t u\,,\quad \text{donde } u \text{ es solución de } (P_2)\,, \end{aligned}$$

es continua.
Demostración: Su prueba es consecuencia inmediata de la Proposición anterior. ■

6. La energía asociada a la ecuación de onda. El Lema que estudiaremos nos permitirá deducir la unicidad de solución de la ecuación de onda.

Definición 1 (La energía asociada a la ecuación de onda). *Sea $a>0$, $T>0$ y $u\in C([0,T],H^s_{per})\cap C^1([0,T],H^{s-1}_{per})$ tal que*

$$\partial_t^2 u(t) = a^2\partial_x^2 u(t)\in H^{s-2}_{per} \tag{6.1}$$

con dato inicial en $H^s_{per}\times H^{s-1}_{per}$.

Definimos la energía asociada al sistema (6.1): $E_s(t)=E_s(t,u):=\left\|\frac{1}{a}\partial_t u(t)\right\|^2_{s-2}+\|\partial_x u(t)\|^2_{s-2}$.

Lema 1. $\partial_t E_s(t)=0\ \forall t\in[0,T]$.
Esto implica que $E_s(t)=E_s(0)$, $\forall t\in[0,T]$. Esto es, la energía se conserva.
Demostración: En efecto, calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{E_s(t+h)-E_s(t)}{h} &= \frac{1}{h}\Big\{\|\frac{1}{a}\partial_t u(t+h)\|^2_{s-2}+\|\partial_x u(t+h)\|^2_{s-2} \\
&\qquad -\|\frac{1}{a}\partial_t u(t)\|^2_{s-2}-\|\partial_x u(t)\|^2_{s-2}\Big\} \\
&= \frac{1}{h}\Big\{<\frac{1}{a}\partial_t u(t+h),\frac{1}{a}\partial_t u(t+h)> + <\partial_x u(t+h),\partial_x u(t+h)> \\
&\qquad -<\frac{1}{a}\partial_t u(t),\frac{1}{a}\partial_t u(t)> - <\partial_x u(t),\partial_x u(t)>\Big\} \\
&= <\frac{1}{a}\partial_t u(t+h),\frac{1}{a}\frac{\partial_t u(t+h)}{h}> + <\partial_x u(t+h),\frac{\partial_x u(t+h)}{h}> \\
&\qquad -<\frac{1}{a}\frac{\partial_t u(t)}{h},\frac{1}{a}\partial_t u(t)> - <\frac{\partial_x u(t)}{h},\partial_x u(t)> \\
&= \underbrace{<\frac{1}{a}\partial_t u(t+h),\frac{1}{a}\frac{\partial_t u(t+h)}{h}> - <\frac{1}{a}\frac{\partial_t u(t)}{h},\frac{1}{a}\partial_t u(t)>}_{I_1(h):=} \\
&\qquad + \underbrace{<\partial_x u(t+h),\frac{\partial_x u(t+h)}{h}> - <\frac{\partial_x u(t)}{h},\partial_x u(t)>}_{I_2(h):=}\,.
\end{aligned}\tag{6.2}$$

Analizamos $I_1(h)$:

$$\begin{aligned}
I_1(h) &= <\frac{1}{a}\partial_t u(t+h),\frac{1}{a}\frac{\partial_t u(t+h)\pm\partial_t u(t)}{h}> - <\frac{1}{a}\frac{\partial_t u(t)}{h},\frac{1}{a}\partial_t u(t)> \\
&= <\frac{1}{a}\partial_t u(t+h),\frac{1}{a}\frac{\partial_t u(t+h)-\partial_t u(t)}{h}> \\
&\quad + <\frac{1}{a}\partial_t u(t+h),\frac{1}{a}\frac{\partial_t u(t)}{h}> - <\frac{1}{a}\frac{\partial_t u(t)}{h},\frac{1}{a}\partial_t u(t)> \\
&= <\frac{1}{a}\partial_t u(t+h),\frac{1}{a}\frac{\partial_t u(t+h)-\partial_t u(t)}{h}> + <\frac{1}{a}\frac{\partial_t u(t+h)-\partial_t u(t)}{h},\frac{1}{a}\partial_t u(t)>
\end{aligned}$$

entonces $\lim\limits_{h\to 0} I_1(h) =<\frac{1}{a}\partial_t u(t),\frac{1}{a}\partial_t^2 u(t)> + <\frac{1}{a}\partial_t^2 u(t),\frac{1}{a}\partial_t u(t)>$.
Para el caso real tenemos

$$\lim_{h\to 0} I_1(h) = 2<\frac{1}{a}\partial_t u(t),\frac{1}{a}\partial_t^2 u(t)>= 2<\partial_t u(t),\frac{1}{a^2}\partial_t^2 u(t)>= 2<\partial_t u(t),\partial_x^2 u(t)>\ .$$

Y ahora analizamos $I_2(h)$:

$$\begin{aligned} I_2(h) &= <\partial_x u(t+h), \frac{\partial_x u(t+h) \pm \partial_x u(t)}{h} > - < \frac{\partial_x u(t)}{h}, \partial_x u(t) > \\ &= <\partial_x u(t+h), \frac{\partial_x u(t+h) - \partial_x u(t)}{h} > + <\partial_x u(t+h), \frac{\partial_x u(t)}{h} > - < \frac{\partial_x u(t)}{h}, \partial_x u(t) > \\ &= <\partial_x u(t+h), \frac{\partial_x u(t+h) - \partial_x u(t)}{h} > + < \frac{\partial_x u(t+h) - \partial_x u(t)}{h}, \partial_x u(t) >, \end{aligned}$$

entonces $\lim_{h\to 0} I_2(h) =< \partial_x u(t), \partial_t\partial_x u(t) > + < \partial_t\partial_x u(t), \partial_x u(t) >$.
Para el caso real tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} I_2(h) = 2 < \partial_x u(t), \partial_t\partial_x u(t) >= 2 \lim_{h\to 0} < \partial_x u(t), \frac{\partial_x u(t+h) - \partial_x u(t)}{h} > \\ = -2 \lim_{h\to 0} < \partial_x^2 u(t), \frac{u(t+h) - u(t)}{h} >= -2 < \partial_x^2 u(t), \partial_t u(t) > . \end{aligned}$$

Así, para el caso real, resulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{E_s(t+h) - E_s(t)}{h} = \lim_{h\to 0} I_1(h) + \lim_{h\to 0} I_2(h) = 2 < \partial_t u(t), \partial_x^2 u(t) > -2 < \partial_x^2 u(t), \partial_t u(t) >= 0 . \blacksquare$$

Como consecuencia inmediata de este Lema obtenemos los siguientes resultados de unicidad de solución.

Corolario 3. *Existe a lo más una solución de la ecuación de onda no-homogénea (i.e. con no homogeneidad $F \not\equiv 0$).*

Demostración: Sean $u, \widetilde{u}$ soluciones locales de (P_2^F) entonces $w := u - \widetilde{u}$ es solución de la ecuación de onda homogénea (P_2) con datos iniciales $w(0) = 0$ y $\partial_t w(0) = 0$. Usando el Lema previo tenemos que $\partial_t E_s(t,w) = 0\ \forall t \in [0,T]$, esto es, $E_s(t,w) = E_s(0,w) = \|\frac{1}{a}\partial_t w(0)\|_{s-2}^2 + \|\partial_x w(0)\|_{s-2}^2 = 0$. Luego, $\|\frac{1}{a}\partial_t w(t)\|_{s-2}^2 = 0$ y $\|\partial_x w(t)\|_{s-2}^2 = 0$, de donde tenemos que en H_{per}^{s-2} se tiene $\partial_t w(t) = 0$, $\forall t \in [0,T]$ y $\partial_x w(t) = 0$, $\forall t \in [0,T]$. Así, $w(t) = c$, $\forall t \in [0,T]$, con c constante independiente de t y x. Esto es, $c = w(t) = w(0) = 0 \in H_{per}^s$, luego $u(t) = \widetilde{u}(t)$, $\forall t \in [0,T]$. $\blacksquare$

Corolario 4. *Existe a lo más una solución de la ecuación de onda homogénea ($F \equiv 0$).*

Demostración: Sean $u, \widetilde{u}$ soluciones de (P_2) entonces $w := u - \widetilde{u}$ es también solución de la ecuación de onda homogénea (P_2) con datos iniciales $w(0) = 0$ y $\partial_t w(0) = 0$. Usando el Lema previo tenemos que $\partial_t E_s(t,w) = 0\ \forall t \in [0,T]$, esto es, $E_s(t,w) = E_s(0,w) = \|\frac{1}{a}\partial_t w(0)\|_{s-2}^2 + \|\partial_x w(0)\|_{s-2}^2 = 0$. Luego, $\|\frac{1}{a}\partial_t w(t)\|_{s-2}^2 = 0$ y $\|\partial_x w(t)\|_{s-2}^2 = 0$, de donde tenemos que en H_{per}^{s-2} se tiene $\partial_t w(t) = 0$, $\forall t \in [0,T]$ y $\partial_x w(t) = 0$, $\forall t \in [0,T]$. Así, $w(t) = c$, $\forall t \in [0,T]$, con c constante independiente de t y x. Esto es, $c = w(t) = w(0) = 0$, luego $u(t) = \widetilde{u}(t)$. $\blacksquare$

7. Existencia de solución Particular de la ecuación de onda no homogénea.

A continuación ponemos en evidencia una solución particular de la ecuación de onda no homogénea con datos iniciales nulos.

Teorema 4. *Sea $a > 0$, $s \in \mathbb{R}$ fijado, $\mathcal{G} \in C([0,T], H_{per}^{s-1})$, W definido en proposición 1 y $u_p(t) := \int_0^t W(t-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau$. Entonces $u_p \in C([0,T], H_{per}^r) \cap C^1([0,T], H_{per}^{r-1})$, $\forall r \leq s$.
Consiguiendose obtener: $\partial_t u_p(t) = \int_0^t \partial_t W(t-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau$ con respecto a la norma de H_{per}^{r-1}, $\forall r \leq s$.
Además, $u_p(t)$ satisface*

$$(P_{2,p}) \left| \begin{array}{l} u_p \in C([0,T], H_{per}^s) \cap C^1([0,T], H_{per}^{s-1}) \\ \partial_t^2 u_p(t) - a^2\partial_x^2 u_p(t) = \mathcal{G}(t) \in H_{per}^{s-2} \\ u_p(0) = 0 \\ \partial_t u_p(0) = 0 \end{array} \right.$$

con la segunda derivada calculada en la norma de H_{per}^{s-2}.

Demostración: Probaremos que u_p es continua. En efecto, para $t < t'$ y $\tau \in (t, t')$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|u_p(t) - u_p(t')\|_s &= \left\| \int_0^t W(t-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau - \int_0^{t'} W(t'-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau \right\|_s \\
&\leq \left\| \int_0^t \{W(t-\tau) - W(t'-\tau)\}\mathcal{G}(\tau)d\tau \right\|_s + \left\| \int_t^{t'} W(t'-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau \right\|_s \\
&\leq \int_0^t \|\{W(t-\tau) - W(t'-\tau)\}\mathcal{G}(\tau)\|_s d\tau + \int_t^{t'} \|W(t'-\tau)\mathcal{G}(\tau)\|_s d\tau \,. \qquad (7.1)
\end{aligned}$$

Por otro lado, conseguimos:

$$\int_0^t \|\{W(t-\tau) - W(t'-\tau)\}\mathcal{G}(\tau)\|_s d\tau < \epsilon \int_0^t d\tau = \epsilon t \leq \epsilon T \,, \qquad (7.2)$$

siempre que $|t - t'| < \delta$. También, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_t^{t'} \|W(t'-\tau)\mathcal{G}(\tau)\|_s d\tau &< \int_t^{t'} \sqrt{\text{máx}\{(t'-\tau)^2, \frac{2}{a^2}\}} \|\mathcal{G}(\tau)\|_{s-1} d\tau \\
&\leq \sqrt{\text{máx}\{(t'-t)^2, \frac{2}{a^2}\}} \sup_{\tau \in [0,T]} \|\mathcal{G}(\tau)\|_{s-1} \int_t^{t'} d\tau \\
&\leq \sqrt{\text{máx}\{(t'-t)^2, \frac{2}{a^2}\}} (t'-t) \sup_{\tau \in [0,T]} \|\mathcal{G}(\tau)\|_{s-1} \,. \qquad (7.3)
\end{aligned}$$

Usando (7.2) y (7.3) en (7.1) obtenemos $\lim_{t \to t'} \|u_p(t) - u_p(t')\|_s = 0$.
Vía inmersiones en espacios de Sobolev, probamos análogamente que $\lim_{t \to t'} \|u_p(t) - u_p(t')\|_r = 0 \,, \ \forall r \leq s$.
En segundo lugar, tenemos en H^{s-1}_{per}:

$$\partial_t u_p(t) = \underbrace{W(t-t)\mathcal{G}(t)}_{=0} - W(t-0)\mathcal{G}(0) \cdot 0 + \int_0^t \partial_t W(t-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau = \int_0^t \partial_t W(t-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau \,.$$

Similarmente, vale $\partial_t u_p(t) = \int_0^t \partial_t W(t-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau$ en H^{r-1}_{per}, $\forall r \leq s$.
Ahora, probaremos que $\partial_t u_p$ es continua. Para $t < t'$ y $\tau \in (t, t')$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t')\|_{s-1} \\
&= \left\| \int_0^t \partial_t W(t-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau - \int_0^{t'} \partial_t W(t'-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau \right\|_{s-1} \\
&\leq \left\| \int_0^t \{\partial_t W(t-\tau) - \partial_t W(t'-\tau)\}\mathcal{G}(\tau)d\tau \right\|_{s-1} + \left\| \int_t^{t'} \partial_t W(t'-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau \right\|_{s-1} \\
&\leq \int_0^t \|\{\partial_t W(t-\tau) - \partial_t W(t'-\tau)\}\mathcal{G}(\tau)\|_{s-1} d\tau + \int_t^{t'} \|\partial_t W(t'-\tau)\mathcal{G}(\tau)\|_{s-1} d\tau. \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos:

$$\int_0^t \|\{\partial_t W(t-\tau) - \partial_t W(t'-\tau)\}\mathcal{G}(\tau)\|_{s-1} d\tau < \epsilon \int_0^t d\tau = \epsilon t \leq \epsilon T. \qquad (7.5)$$

siempre que $|t - t'| < \delta$. También, resulta

$$\begin{aligned}
\int_t^{t'} \|\partial_t W(t'-\tau)\mathcal{G}(\tau)\|_{s-1} d\tau \leq \int_t^{t'} \|\mathcal{G}(\tau)\|_{s-1} d\tau &\leq \sup_{\tau \in [0,T]} \|\mathcal{G}(\tau)\|_{s-1} \int_t^{t'} d\tau \\
&\leq (t'-t) \sup_{\tau \in [0,T]} \|\mathcal{G}(\tau)\|_{s-1} \,. \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

Usando (7.5) y (7.6) en (7.4) obtenemos: $\lim_{t \to t'} \|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t')\|_{s-1} = 0$.
Vía inmersiones en H^s_{per}, probamos análogamente que $\lim_{t \to t'} \|\partial_t u_p(t) - \partial_t u_p(t')\|_{r-1} = 0 \,, \ \forall r \leq s$.

Finalmente, tenemos en H^{s-2}_{per}

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u_p(t) &= \underbrace{\partial_t W(t-t)\mathcal{G}(t)}_{=\mathcal{G}(t)} - W(t-0)\mathcal{G}(0)\cdot 0 + \int_0^t \partial_t^2 W(t-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau \\ &= \mathcal{G}(t) + \int_0^t \partial_t^2 W(t-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau = \mathcal{G}(t) + a^2\int_0^t \partial_x^2 W(t-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau \\ &= \mathcal{G}(t) + a^2\partial_x^2 \int_0^t W(t-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau = \mathcal{G}(t) + a^2\partial_x^2 u_p(t)\end{aligned}$$

y evidentemente $u_p(0)=0$ y $\partial_t u_p(0)=0$. ■

8. Existencia de solución local de la ecuación de onda no homogénea. Ahora, estamos listos para enunciar el siguiente Teorema de existencia de solución de la ecuación de onda no homogénea.

Teorema 5 (Existencia de solución local). *Sea $T>0$, $a>0$, $s\in\mathbb{R}$ fijado y $F\in C([0,T],H^s_{per})$*

$$(P_2^F)\left|\begin{array}{l}\partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u = F(t)\in H^{s-2}_{per}\\ u(0)=\phi\in H^s_{per}\\ \partial_t u(0)=\psi\in H^{s-1}_{per}\end{array}\right.$$

entonces existe una única $u\in C([0,T],H^s_{per})\cap C^1([0,T],H^{s-1}_{per})$ solución de (P_2^F).
Mejor aún, $u\in C([0,T],H^r_{per})\cap C^1([0,T],H^{r-1}_{per})$, $\forall r\le s$.

Demostración: La prueba lo haremos del siguiente modo.

1. Primero, obtendremos el candidato a solución. Para conseguir esto, aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación no homogénea (P_2^F): $\partial_t^2 u(t) - a^2\partial_x^2 u(t) = F(t)$ y obtenemos

$$\partial_t^2\widehat{u}(k,t) = a^2(ik)^2\widehat{u}(k,t)+\widehat{F}(k,t) \;=\; -a^2|k|^2\widehat{u}(k,t)+\widehat{F}(k,t)\,,$$

que para cada $k\in\mathbb{Z}$ es una EDO no homogénea con datos iniciales $\widehat{u}(k,0)=\widehat{\phi}(k)$ y $\partial_t\widehat{u}(k,0)=\widehat{\psi}(k)$.

Así, planteamos un sistema no acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no homogéneas.

$$(\Omega_k)\left|\begin{array}{rcl}\widehat{u} &\in& C([0,T],l^2_s(\mathbb{Z}))\\ \partial_t^2\widehat{u}(k,t) &=& -a^2|k|^2\widehat{u}(k,t)+\widehat{F}(k,t)\\ \widehat{u}(k,0) &=& \widehat{\phi}(k)\ \text{con}\ \widehat{\phi}\in l^2_s(\mathbb{Z})\\ \partial_t\widehat{u}(k,0) &=& \widehat{\psi}(k)\ \text{con}\ \widehat{\psi}\in l^2_{s-1}(\mathbb{Z})\end{array}\right.$$

$\forall k\in\mathbb{Z}$, que resolveremos a continuación.
Primero, observamos que la solución de (Ω_k) es de la forma:

$$\widehat{u}(k,t)=\widehat{u_h}(k,t)+\widehat{u_p}(k,t)\,, \tag{8.1}$$

donde $\widehat{u_h}$ es la solución de la ecuación homogénea de (Ω_k), esto es,

$$\left|\begin{array}{rcl}\partial_t^2\widehat{u_h}(k,t) &=& -a^2|k|^2\widehat{u_h}(k,t)\\ \widehat{u_h}(k,0) &=& \widehat{\phi}(k)\\ \partial_t\widehat{u_h}(k,0) &=& \widehat{\psi}(k)\end{array}\right. \tag{8.2}$$

y $\widehat{u_p}$ es la solución particular de la ecuación no homogénea (Ω_k) con datos iniciales nulos, esto es,

$$\left|\begin{array}{rcl}\partial_t^2\widehat{u_p}(k,t) &=& -a^2|k|^2\widehat{u_p}(k,t)+\widehat{F}(k,t)\\ \widehat{u_p}(k,0) &=& 0\\ \partial_t\widehat{u_p}(k,0) &=& 0\,.\end{array}\right. \tag{8.3}$$

Para cada $k \in Z$, la EDO (8.2) fue resuelta cuando estudiamos la ecuación de onda homogénea. Así, la solución es:

$$\widehat{u_h}(k,t) = \begin{cases} cos(a|k|t)\widehat{\phi}(k) + \frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\widehat{\psi}(k) & \text{si } k \neq 0 \\ \widehat{\phi}(0) + t\widehat{\psi}(0) & \text{si } k = 0\,. \end{cases} \tag{8.4}$$

Para resolver (8.3) usamos el método de Variación de Parámetros. Esto es, para $k \neq 0$, la cara de la solución particular $\widehat{u_p}$ es $\widehat{u_p}(k,t) = A_k(t)cos(a|k|t) + B_k(t)sen(a|k|t)$, satisfaciendo:

$$\begin{gathered} A_k'(t)cos(a|k|t) + B_k'(t)sen(a|k|t) = 0 \\ -a|k|A_k'(t)sen(a|k|t) + a|k|B_k'(t)cos(a|k|t) = \widehat{F}(k,t) \end{gathered}$$

y

$$\begin{gathered} \widehat{u_p}(k,0) = 0 \\ \partial_t\widehat{u_p}(k,0) = 0\,, \end{gathered}$$

donde $\forall k \in Z - \{0\}$, A_k y B_k son funciones por determinar.
Ahora, determinaremos las funciones A_k y B_k, $\forall k \in Z - \{0\}$. Iniciamos calculando el Wronskiano cuando $k \neq 0$:

$$\omega = \omega(cos(a|k|(\cdot)), sen(a|k|(\cdot)))(t) = \begin{vmatrix} cos(a|k|t) & sen(a|k|t) \\ -a|k|sen(a|k|t) & a|k|cos(a|k|t) \end{vmatrix} = a|k| \neq 0\,.$$

Usando la Regla de Cramer, cuando $k \neq 0$, obtenemos:

$$A_k'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen(a|k|t) \\ \widehat{F}(k,t) & a|k|cos(a|k|t) \end{vmatrix}}{a|k|} = -\frac{sen(a|k|t)}{a|k|}\widehat{F}(k,t)\,.$$

Análogamente, si $k \neq 0$, obtenemos

$$B_k'(t) = \frac{\begin{vmatrix} cos(a|k|t) & 0 \\ -a|k|sen(a|k|t) & \widehat{F}(k,t) \end{vmatrix}}{a|k|} = \frac{cos(a|k|t)}{a|k|}\widehat{F}(k,t)\,.$$

Luego, para $k \neq 0$ resulta:

$$A_k(t) = -\int_0^t \frac{sen(a|k|\tau)}{a|k|}\widehat{F}(k,\tau)d\tau\,, \qquad B_k(t) = \int_0^t \frac{cos(a|k|\tau)}{a|k|}\widehat{F}(k,\tau)d\tau\,.$$

Así, usando $sen(x-y) = sen(x)cos(y) - cos(x)sen(y)$, para $k \neq 0$ obtenemos

$$\widehat{u_p}(k,t) = \int_0^t \frac{sen(a|k|(t-\tau))}{a|k|}\widehat{F}(k,\tau)d\tau\,.$$

Para $k = 0$ la EDO no homogénea es

$$\left| \begin{array}{rcl} \partial_t^2\widehat{u_p}(0,t) & = & \widehat{F}(0,t) \\ \widehat{u_p}(0,0) & = & 0 \\ \partial_t\widehat{u_p}(0,0) & = & 0\,. \end{array} \right.$$

Iniciamos calculando el Wronskiano de $\{1,t\}$:

$$\omega = \omega(1,t) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

Usando el método de Variación de Parámetros tenemos que $\widehat{u_p}(0,t) = f(t) + tg(t)$, satisfaciendo:

$$\begin{aligned} f'(t) + g'(t)t &= 0 \\ g'(t) &= \widehat{F}(0,t)\,, \end{aligned}$$

donde f y g son las funciones a determinar. Así, $f'(t) = -t\widehat{F}(0,t)$ y $g'(t) = \widehat{F}(0,t)$, de donde obtenemos: $f(t) = -\int_0^t \tau\widehat{F}(0,\tau)d\tau$ y $g(t) = \int_0^t \widehat{F}(0,\tau)d\tau$, respectivamente.

Luego, para $k = 0$, tenemos: $\widehat{u_p}(0,t) = \int_0^t (t-\tau)\widehat{F}(0,\tau)d\tau$, satisfaciendo las condiciones iniciales nulas.

En resumen tenemos

$$\widehat{u_p}(k,t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{sen(a|k|(t-\tau))}{a|k|}\widehat{F}(k,\tau)d\tau & \text{si } k \neq 0 \\ \int_0^t (t-\tau)\widehat{F}(0,\tau)d\tau & \text{si } k = 0\,. \end{cases} \tag{8.5}$$

De (8.4) y (8.5) en (8.1), conseguimos el candidato a solución de (P_2^F):

$$\begin{aligned} u(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(k,t)\phi_k &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{u_h}(k,t) + \widehat{u_p}(k,t)\}\phi_k \\ &= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u_h}(k,t)\phi_k}_{u_h(t):=} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u_p}(k,t)\phi_k}_{u_p(t):=} \end{aligned} \tag{8.6}$$

donde u_h es solución de la ecuación homogénea de (P_2^F), que ya fue probado anteriormente, y u_p es la solución particular de (P_2^F) con condiciones nulas, que fue probado en el teorema previo y consideramos $\mathcal{G} := F \in C([0,T], H^s_{per}) \subset C([0,T], H^{s-1}_{per})$ donde debemos notar que

$$\begin{aligned} u_p(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u_p}(k,t)\phi_k &= \int_0^t (t-\tau)\widehat{F}(0,\tau)d\tau + \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{sen(a|k|(t-\tau))}{a|k|}\widehat{F}(k,\tau)d\tau\phi_k \\ &= \int_0^t (t-\tau)\widehat{F}(0,\tau)d\tau + \int_0^t \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} \frac{sen(a|k|(t-\tau))}{a|k|}\widehat{F}(k,\tau)\phi_k d\tau \\ &= \int_0^t W(t-\tau)F(\tau)d\tau\,. \end{aligned} \tag{8.7}$$

2. Observamos que $u(t) \in H^s_{per}$. Además, como u_h y u_p pertenecen a $C([0,T], H^s_{per})$ entonces $u = u_h + u_p$ pertenece a $C([0,T], H^s_{per})$. Similarmente, como u_h y u_p estan en $C^1([0,T], H^{s-1}_{per})$ entonces $u = u_h + u_p \in C^1([0,T], H^{s-1}_{per})$.

Similarmente, se prueba que $u = u_h + u_p \in C([0,T], H^r_{per}) \cap C^1([0,T], H^{r-1}_{per})$, $\forall r \leq s$. También, u satisface en H^{s-2}_{per}:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t) = \partial_t^2\{u_h(t) + u_p(t)\} = \partial_t^2 u_h(t) + \partial_t^2 u_p(t) &= a^2\partial_x^2 u_h(t) + \{a^2\partial_x^2 u_p(t) + F(t)\} \\ &= a^2\partial_x^2 u(t) + F(t) \end{aligned}$$

satisfaciendo: $u(0) = u_h(0) + u_p(0) = \phi + 0 = \phi$ y $\partial_t u(0) = \partial_t u_h(0) + \partial_t u_p(0) = \psi + 0 = \psi$. ■

Corolario 5. *La única solución de (P_2^F) es*

$$u(t,x) = \widehat{\phi}(0) + t\widehat{\psi}(0) + \int_0^t (t-\tau)\widehat{F}(0,\tau)d\tau + \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{u_h}(k,t) + \widehat{u_p}(k,t)\}e^{ikx}\,,$$

donde $\widehat{u_h}(k,t)$ y $\widehat{u_p}(k,t)$ están expresados en (8.4) y (8.5) respectivamente.

9. Dependencia continua de la solución de (P_2^F). A continuación enunciaremos y probaremos la dependencia continua de la solución de (P_2^F) respecto a los datos iniciales y a la no homogeneidad F.

Teorema 6 (Dependencia continua de la solución respecto a los datos iniciales y a la no homogeneidad). *Sea $T > 0$, $a > 0$, s un número real fijado, $\varphi_j \in H^s_{per}$, $\psi_j \in H^{s-1}_{per}$, $F_j \in C([0,T], H^s_{per})$ y denotemos por u_j a la correspondiente solución de ($P_2^{F_j}$), para $j = 1, 2$. Entonces*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_s \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_s + \sqrt{\text{máx}\left\{T^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\|\psi_1 - \psi_2\|_{s-1} + \sqrt{\text{máx}\left\{T^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\, T\, \|F_1 - F_2\|_{s-1,\infty}\,, \tag{9.1}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{s-1} \leq a\|\varphi_1 - \varphi_2\|_s + \|\psi_1 - \psi_2\|_{s-1} + T\,\|F_1 - F_2\|_{s-1,\infty} \tag{9.2}$$

donde $\|F\|_{s-1,\infty} := \sup_{\tau\in[0,T]} \|F(\tau)\|_{s-1}$.
O mejor aún, $\forall r \leq s$ se verifican las siguientes desigualdades:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_r \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_s + \sqrt{\text{máx}\left\{T^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\|\psi_1 - \psi_2\|_{s-1} + \sqrt{\text{máx}\left\{T^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\, T\, \|F_1 - F_2\|_{s-1,\infty}\,, \tag{9.3}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{r-1} \leq a\|\varphi_1 - \varphi_2\|_s + \|\psi_1 - \psi_2\|_{s-1} + T\,\|F_1 - F_2\|_{s-1,\infty}\,. \tag{9.4}$$

Demostración: Sea u_i solución de ($P_2^{F_i}$) para $i = 1, 2$, entonces

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \widehat{\varphi}_i(0) + t\widehat{\psi}_i(0) + \int_0^t (t-\tau)\widehat{F}_i(0,\tau)d\tau + \sum_{k\neq 0}\{\widehat{u_{ih}}(k,t) + \widehat{u_{ip}}(k,t)\}e^{ikx} \\ &= \underbrace{C(t)\varphi_i + W(t)\psi_i}_{u_{ih}(t)=} + \underbrace{\int_0^t W(t-\tau)F_i(\tau)d\tau}_{u_{ip}(t)=}\,. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Tomando la diferencia de $u_1(t)$ con $u_2(t)$, tenemos en H^s_{per}:

$$u_1(t) - u_2(t) = C(t)(\varphi_1 - \varphi_2) + W(t)(\psi_1 - \psi_2) + \int_0^t W(t-\tau)\{F_1(\tau) - F_2(\tau)\}d\tau\,. \tag{9.6}$$

Ahora, usando la desigualdad triangular de la norma $\|\cdot\|_s$, la inmersión de H^s_{per} en H^{s-1}_{per}, $\|W(t)\psi\|_r \leq \|\psi\|_{s-1}$, $\forall r \leq s$ con $\psi \in H^{s-1}_{per}$ y $\|C(t)\phi\|_r \leq \|\phi\|_s$, $\forall r \leq s$ con $\phi \in H^s_{per}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|u_1(t)-u_2(t)\|_r &\leq \|C(t)(\varphi_1-\varphi_2)\|_r + \|W(t)(\psi_1-\psi_2)\|_r + \left\|\int_0^t W(t-\tau)\{F_1(\tau)-F_2(\tau)\}d\tau\right\|_r \\
&\leq \|C(t)(\varphi_1-\varphi_2)\|_s + \|W(t)(\psi_1-\psi_2)\|_r + \int_0^t \|W(t-\tau)\{F_1(\tau)-F_2(\tau)\}\|_r d\tau \\
&\leq \|\varphi_1-\varphi_2\|_s + \sqrt{\text{máx}\left\{t^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\|\psi_1-\psi_2\|_{s-1} + \\
&\quad \int_0^t \sqrt{\text{máx}\left\{(t-\tau)^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\|F_1(\tau)-F_2(\tau)\|_{s-1}d\tau \\
&\leq \|\varphi_1-\varphi_2\|_s + \sqrt{\text{máx}\left\{t^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\|\psi_1-\psi_2\|_{s-1} + \\
&\quad \left(\sup_{\tau\in[0,T]}\|F_1(\tau)-F_2(\tau)\|_{s-1}\right)\int_0^t \sqrt{\text{máx}\left\{(t-\tau)^2, \frac{2}{a^2}\right\}}d\tau \\
&\leq \|\varphi_1-\varphi_2\|_s + \sqrt{\text{máx}\left\{t^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\|\psi_1-\psi_2\|_{s-1} + \\
&\quad t\cdot\sqrt{\text{máx}\left\{t^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\sup_{\tau\in[0,T]}\|F_1(\tau)-F_2(\tau)\|_{s-1} \\
&\leq \|\varphi_1-\varphi_2\|_s + \sqrt{\text{máx}\left\{T^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\|\psi_1-\psi_2\|_{s-1} + \\
&\quad T\cdot\sqrt{\text{máx}\left\{T^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\sup_{\tau\in[0,T]}\|F_1(\tau)-F_2(\tau)\|_{s-1}\,,
\end{aligned} \tag{9.7}$$

para todo $r \leq s$.
Tomando el supremo en la desigualdad (9.7), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}\|u_1(t)-u_2(t)\|_r \leq \|\varphi_1-\varphi_2\|_s &+ \sqrt{\text{máx}\left\{T^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\|\psi_1-\psi_2\|_{s-1} + \\
&T\cdot\sqrt{\text{máx}\left\{T^2, \frac{2}{a^2}\right\}}\sup_{\tau\in[0,T]}\|F_1(\tau)-F_2(\tau)\|_{s-1}\,,
\end{aligned} \tag{9.8}$$

$\forall r \leq s$.
Usando propiedades de $C(t)$ y $W(t)$, para $i = 1, 2$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\partial_t u_i(t) &= \partial_t C(t)\varphi_i + \partial_t W(t)\psi_i + \int_0^t \partial_t W(t-\tau)F_i(\tau)d\tau \\
&= \partial_t C(t)\varphi_i + C(t)\psi_i + \int_0^t C(t-\tau)F_i(\tau)d\tau\,.
\end{aligned} \tag{9.9}$$

Tomando la diferencia de $\partial_t u_1(t)$ con $\partial_t u_2(t)$, tenemos en H^{s-1}_{per}:

$$\begin{aligned}
\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t) = \partial_t C(t)(\varphi_1-\varphi_2) &+ C(t)(\psi_1-\psi_2) + \\
&\int_0^t C(t-\tau)\{F_1(\tau)-F_2(\tau)\}d\tau\,,
\end{aligned} \tag{9.10}$$

y usando la desigualdad triangular de la norma $\|\cdot\|_{r-1}$ y que $\|C(t)\psi\|_{r-1} \leq \|\psi\|_{s-1}$ $\forall r \leq s$, con $\psi \in H^{s-1}_{per}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{r-1} &\leq \|\partial_t C(t)(\varphi_1 - \varphi_2)\|_{r-1} + \|C(t)(\psi_1 - \psi_2)\|_{r-1} + \\
&\quad \left\| \int_0^t C(t-\tau)\{F_1(\tau) - F_2(\tau)\} d\tau \right\|_{r-1} \\
&\leq \|\partial_t C(t)(\varphi_1 - \varphi_2)\|_{r-1} + \|C(t)(\psi_1 - \psi_2)\|_{r-1} + \\
&\quad \int_0^t \|C(t-\tau)\{F_1(\tau) - F_2(\tau)\}\|_{r-1} d\tau \\
&\leq \|\partial_t C(t)(\varphi_1 - \varphi_2)\|_{r-1} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{s-1} + \\
&\quad \int_0^t \|F_1(\tau) - F_2(\tau)\|_{s-1} d\tau \\
&\leq \|\partial_t C(t)(\varphi_1 - \varphi_2)\|_{r-1} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{s-1} + \\
&\quad \left(\sup_{\tau \in [0,T]} \|F_1(\tau) - F_2(\tau)\|_{s-1} \right) \int_0^t d\tau \\
&\leq \|\partial_t C(t)(\varphi_1 - \varphi_2)\|_{r-1} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{s-1} + \\
&\quad t \cdot \sup_{\tau \in [0,T]} \|F_1(\tau) - F_2(\tau)\|_{s-1} \\
&\leq \|\partial_t C(t)(\varphi_1 - \varphi_2)\|_{r-1} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{s-1} + \\
&\quad T \cdot \sup_{\tau \in [0,T]} \|F_1(\tau) - F_2(\tau)\|_{s-1}\,, \qquad (9.11)
\end{aligned}$$

$\forall r \leq s$.
Por otro lado, $\forall r \leq s$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\|\partial_t C(t)(\varphi_1 - \varphi_2)\|^2_{r-1} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-1} |a|k| sen(a|k|t)\{\widehat{\varphi_1}(k) - \widehat{\varphi_2}(k)\}|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-1} a^2 |k|^2 |sen(a|k|t)|^2 |\widehat{\varphi_1}(k) - \widehat{\varphi_2}(k)|^2 \\
&\leq a^2 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-1} |k|^2 |\widehat{\varphi_1}(k) - \widehat{\varphi_2}(k)|^2 \\
&\leq a^2 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r} |\widehat{\varphi_1}(k) - \widehat{\varphi_2}(k)|^2 \;=\; a^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2_r \\
&\leq a^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2_s\,.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\|\partial_t C(t)(\varphi_1 - \varphi_2)\|_{r-1} \leq a\|\varphi_1 - \varphi_2\|_s\,,\ \forall r \leq s\,. \qquad (9.12)$$

Usando (9.12) en (9.11) resulta:

$$\|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{r-1} \leq a\|\varphi_1 - \varphi_2\|_s + \|\psi_1 - \psi_2\|_{s-1} + T \cdot \sup_{\tau \in [0,T]} \|F_1(\tau) - F_2(\tau)\|_{s-1}\,, \qquad (9.13)$$

$\forall r \leq s$.
Tomando supremo en la desigualdad (9.13), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0,T]} \|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{r-1} &\leq a\|\varphi_1 - \varphi_2\|_s + \|\psi_1 - \psi_2\|_{s-1} + \\
&\quad T \cdot \sup_{\tau \in [0,T]} \|F_1(\tau) - F_2(\tau)\|_{s-1}\,, \qquad (9.14)
\end{aligned}$$

$\forall r \leq s\,.$ ■

Corolario 6. *(P^F_2) posee una única solución.*
Demostración: Es consecuencia de la desigualdad (9.1). ■

10. Conclusiones. En nuestro estudio de la ecuación de onda en espacios de Sobolev periódico tanto en el caso homogéneo (P_2) como en el correspondiente problema no homogéneo (P_2^F) hemos obtenido importantes resultados, entre los cuales destacamos:

1. Usando la Teoría de Fourier, demostramos la existencia y unicidad de solución del modelo (P_2), así como la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial en intervalos compactos $[0, T]$, $T > 0$.
2. Probamos la regularidad de la solución de (P_2).
3. Introduciendo familias de operadores fuertemente continuos, reescribimos la solución del problema (P_2), obteniendo resultados elegantes.
4. Probamos que la energía asociada a la ecuación de onda es conservativa. Este resultado nos permite obtener la unicidad de solución de la ecuación de onda no homogénea.
5. Usando la Teoría de Fourier y la familia de operadores fuertemente continuos probamos la existencia de solución local y unicidad de solución del modelo no homogéneo (P_2^F).
6. También, obtenemos la dependencia continua de la solución de (P_2^F) respecto al dato inicial y a la parte no homogénea del problema.

ORCID and License

Yolanda Santiago Ayala https://orcid.org/0000-0003-2516-0871
Santiago Rojas Romero https://orcid.org/0000-0002-5354-8059

Referencias

[1] Benjamin T. *Internal Waves of Permanent Form in Fluids of Great Depth*. J. Fluid Meek. 1967; **29**: 559-592.
[2] Courant R, Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. Interscience, Wile, New York. 1962; 2.
[3] Folland G, Sitaram A. *The uncertainty principle: a mathematical survey*. J. Fourier Anal. Appl. 1997; **3**: 207-238.
[4] Iorio R, Iorio V. *Fourier Analysis and partial differential equation*. Cambridge University, 2001.
[5] Santiago Y, Rojas S, Quispe T. *Espacios de Sobolev periódico y un problema de Cauchy asociado a un modelo de ondas en un fluido viscoso*. Theorema, Segunda Época. 2016; **3(4)**: 7-23.
[6] Santiago Y, Rojas S. *Existencia y Regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev Periódico*. Journal Selecciones Matemática. 2019; **06(01)**: 49-65.
[7] Santiago Y, Rojas S. *Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit*. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; **32(2)**: 207-230.