Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2020; Vol. 7(1): 42-51.

Existencia de Soluciones Radiales para Problemas Semilineales Elípticos Indefinidos

Existence of radial solutions for indefinite semilinear elliptic equations

Marco Calahorrano and Israel Cevallos

Received, Dec. 31, 2019 *Accepted, Mar. 20, 2020*

How to cite this article:
Calahorrano M, Cevallos I. *Existencia de Soluciones Radiales para Problemas Semilineales Elípticos Indefinidos*. Selecciones Matemáticas. 2020;7(1):42–51. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.01.05

Resumen

Se estudia la existencia de soluciones radiales de problemas semilineales elípticos indefinidos sobre la bola unidad de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) con condiciones de frontera de Dirichlet, cuyo término no lineal es de la forma $\lambda m(|x|)f(u)$ donde $m(|\cdot|)$ es radialmente simétrica, discontinua y cambia de signo. Este estudio se realiza utilizando técnicas variacionales y en especial el "Lema del Paso de Montaña" de Ambrosetti-Rabinowitz.

Palabras clave. Ecuación semilineal, Problema a valores en la frontera, Solución radial, Dominio simétrico, Bola unidad, Cambio de signo.

Abstract

We study the existence of radial solutions of indefinite semilinear elliptic equations in the unit ball in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) with Dirichlet boundary conditions, whose nonlinear term has the form $\lambda m(|x|)f(u)$ where $m(|\cdot|)$ is radially symmetric, discontinuous and changes sign. This study is realized using variational tecniques and especially the Ambrosetti-Rabinowitz's "Mountain Pass Lemma".

Keywords . Semilinear equation, Boundary value problem, Radial solution, Symmetric domain, Unit ball, Change of sign.

1. Introducción. El interés de este trabajo es demostrar la existencia de soluciones radiales débiles para problemas semilineales elípticos indefinidos, de forma específica se busca la solución del problema semilineal elíptico de la forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda m(|x|)f(u) & x \in B \\ u = 0 & x \in \partial B \end{cases} \tag{1.1}$$

mediante el uso de las técnicas del análisis no lineal (ver [6, 23]). Lo que conocemos como análisis no lineal ha jugado un papel muy importante en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales no lineales y en particular de las semilineales elípticas. De forma más específica se desea resolver el problema (1.1) mediante la utilización de la teoría de puntos críticos. La teoría variacional mencionada ha tenido un impresionante desarrollo a partir del trabajo de Antonio Ambrosetti y Paul H. Rabinowitz [5], donde los autores logran demostrar el denominado Lema del "Paso de montaña" que ha proporcionado un teorema general de existencia de soluciones no nulas para ciertos problemas no lineales.

Problemas semilineales elípticos indefinidos con condiciones de Dirichlet han sido estudiados con gran entusiasmo en las últimas décadas por matemáticos como Stanley Alama y Manuel del Pino [1], los cuales aportan soluciones no triviales a este tipo de problemas donde el término no lineal es de la forma $\lambda u + h(x)f(u)$ con h que cambia de signo y f tiene crecimiento supercuadrático. Los profesores Stanley

*Dpto. de Mat., Facultad de Ciencias, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador (marco.calahorrano@epn.edu.ec).
†Facultad de Ciencias, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador (israel.cevallos@epn.edu.ec).

Alama y Gabriella Tarantello [2] estudian problemas cuyo término no lineal es de la forma $W(x)f(u)$ donde $W(x)$ es una función peso continua y que cambia de signo, en este caso los autores buscan soluciones positivas, además de demostrar la multiplicidad.

El principal interés de este trabajo es extender los trabajos realizados por [3] [8], [9], [11], [15] y [19] y en consecuencia conocer como resolver este tipo de problemas; en este sentido se aporta con nuevos resultados referentes a la resolución de problemas semilineales elípticos. Además debe señalarse que problemas semilineales elípticos aparecen en diferentes campos de la física, química, etc., por ejemplo en física de plasma (ver [12]) y en astrofísica (ver [13] y [14]). Un ejemplo de este tipo de ecuaciones semilineales es el problema de Hill (ver [20] y [21]). Para otras aplicaciones referirse a las citas de [22].

2. Hipótesis y formulación variacional. En este trabajo se estudia la existencia de soluciones radiales para el problema semilineal

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda m(|x|)f(u) & x \in B \\ u = 0 & x \in \partial B \end{cases} \tag{2.1}$$

donde se busca $u : \overline{B} \to \mathbb{R}$ con $B := B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, la bola abierta de centro cero y radio uno en $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, f una función no lineal y $m(|\cdot|)$ una función que cambia de signo y que es discontinua.

2.1. Hipótesis. Se consideran las siguientes hipótesis para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(f1) f es no negativa, precisamente:

$$f(s) = 0 \quad \text{para} \quad s \leq 0 \quad \text{y} \quad f(s) > 0 \quad \text{para} \quad s > 0. \tag{2.2}$$

(f2) f es continua

$$f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \tag{2.3}$$

(f3) Existen constantes $a_1, a_2 \geq 0$ tal que

$$|f(s)| \leq a_1 + a_2|s|^p \tag{2.4}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, donde $1 < p < 2^* - 1$ y 2^* es el exponente crítico, $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

(f4) Sea $r > 0$, $2 < \mu < 2^*$ y $d_1, d_2 > 0$ constantes tal que

$$0 < sf(s) - \mu F(s) \leq d_1|s|^2 + d_2, \qquad \forall s \geq r, \tag{2.5}$$

donde F está definida por

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt. \tag{2.6}$$

(f5) Comportamiento de f en una vecindad de 0,

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{s} = 0. \tag{2.7}$$

Además se consideran las siguientes hipótesis sobre $m(|\cdot|) : \overline{B} \to \mathbb{R}$:

(m1)

$$m \in L^\infty(B). \tag{2.8}$$

(m2)

$$m \quad \text{discontinua} \quad \text{en} \quad |x| = \gamma \quad \text{donde} \quad 0 < \gamma < 1. \tag{2.9}$$

(m3)

$$m(|x|) > 0 \quad \text{para} \quad |x| < \gamma \quad \text{y} \quad m(|x|) < 0 \quad \text{para} \quad \gamma < |x| < 1. \tag{2.10}$$

En particular se tomará el caso donde $m(|\cdot|)$ esta definida por:

$$m(|x|) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq |x| < \gamma \\ -1 & \text{si } \gamma < |x| < 1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Observación 1. *Por cambio de escala se podría tomar $B_R = B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ con $R \in \mathbb{R}_+$.*

2.2. Formulación variacional. Diremos que $u \in E := H_0^1(B)$ es solución débil de (2.1) si

$$\int_B \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_B m(|x|) f(u) v dx \qquad \forall v \in H_0^1(B). \tag{2.12}$$

Por otro lado, el funcional asociado al problema (2.1) es:

$$\begin{aligned} I: E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_B m(|x|) F(u) dx, \end{aligned} \tag{2.13}$$

con derivada de Fréchet dada por:

$$dI(u)v = \int_B \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_B m(|x|) f(u) v dx \qquad \forall v \in H_0^1(B).$$

En consecuencia es fácil determinar que las soluciones débiles de (2.1) son los puntos críticos de (2.13).

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

3.1. Existencia de soluciones. De la hipótesis 2.2 se tiene que $f(0) = 0$, en consecuencia el problema (2.1) admite la solución trivial $u = 0$. Además, $u = 0$ es un punto crítico de I con $I(0) = 0$ y $dI(0) = 0$.

3.1.1. Lemas auxiliares.

Lema 1. *El funcional I es $C^1(E, \mathbb{R})$.*

Demostración: Sea B la bola abierta centrada en cero y de radio 1, es decir, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Nótese que B es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con frontera, ∂B, definida por $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. ∂B es suave.

El funcional I es de la forma

$$\begin{aligned} I: E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \Phi(u). \end{aligned}$$

con $\Phi(u)$ definido por:

$$\begin{aligned} \Phi: E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \Phi(u) = \int_B m(|x|) F(u) dx. \end{aligned}$$

Es claro que el primer término del funcional I es $C^\infty(E, \mathbb{R})$ y por tanto solo falta demostrar que Φ es $C^1(E, \mathbb{R})$.

Para esto, llamemos:

$$g(x, s) = m(|x|) f(s).$$

Ahora, por la hipótesis 2.3 la función f es continua y por la hipótesis 2.9 se tiene que la función $m(|\cdot|)$ es discontinua sobre el conjunto de medida nula $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \gamma, 0 < \gamma < 1\}$, gracias a lo cual

$$s \mapsto g(x, s) \text{ es continua respecto a } s \in \mathbb{R} \text{ casi todo } x \in B,$$

y por la hipótesis 2.8 se sigue que la función $m(|\cdot|)$ es medible y dado que f es una función continua, por lo tanto

$$x \mapsto g(x, s) \text{ es medible respecto a } x \in B \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Entonces se deduce que la función g cumple con la condición de Carathéodory (Ca).

Luego, por la hipótesis 2.8 se tiene que $m \in L^\infty(B)$ con $\|m\|_{L^\infty(B)} = 1$ y de 2.4 se sigue que

$$|g(x, s)| \leq a_1 + a_2 |s|^p, \qquad a_1, a_2 > 0$$

con $1 < p < (n+2)/(n-2) = 2^* - 1$. Gracias a todo esto el funcional Φ es $C^1(E, \mathbb{R})$ y finalmente se obtiene el resultado deseado.

Lema 2. *Sea Ω un conjunto abierto y acotado. Dada la sucesión $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ de elementos en $H_0^1(\Omega)$, si*

$$\|u_k\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx < C$$

para todo k y $C > 0$ una constante que no depende de k. Entonces existe una subsucesión de $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ (también notada por $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$) y $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

1. *$u_k \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$,*
2. *$u_k \to u$ en $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, 2n/(n-2))$,*
3. *$u_k(x) \to u(x)$ c.t.p. en Ω.*
   Además existe $w \in L^q(\Omega)$ tal que
4. *$|u_k(x)| \leq w(x)$ c.t.p. en Ω y para todo k.*

Demostración: Ver [16, pág. 17] Lema 3.2.

Lema 3. *El funcional I verifica $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, es decir:*
Si toda sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de E satisface

1. *$I(u_k) \to c$ (en $\mathbb{R}$) cuando $k \to \infty$, y*
2. *$dI(u_k) \to 0$ (en E') cuando $k \to \infty$*

para todo $c \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente (en E).

Demostración: Sea $c \in \mathbb{R}$ y sea $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Palais-Smale de nivel c, entonces de 1 se tiene que $\{I(u_k)\}_{k=1}^{\infty}$ es acotada, es decir, existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$|I(u_k)| \leq C_1$$

y de 2 se tiene que $dI(u_k) \in E'$, de donde existe $C_2 > 0$ tal que

$$|dI(u_k)u_k| \leq C_2 \|u_k\|$$

para todo k. Gracias a esto se tiene que para $2 < \mu < 2^*$

$$\begin{aligned} I(u_k) - \frac{1}{\mu} dI(u_k)u_k &\leq |I(u_k) - \frac{1}{\mu} dI(u_k)u_k| \\ &\leq C_1 + \frac{C_2}{\mu}\|u_k\| \\ &\leq C(1 + \|u_k\|) \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $C = \max\{C_1, C_2\}$. Por otro lado se tiene que

$$I(u_k) - \frac{1}{\mu} dI(u_k)u_k = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_k\|^2 + \frac{\lambda}{\mu} \int_B m(|x|)(f(u_k)u_k - \mu F(u_k))dx. \tag{3.2}$$

Luego, gracias a la hipótesis 2.5 con $2 < \mu < 2^*$, se sigue que

$$I(u_k) - \frac{1}{\mu} dI(u_k)u_k \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} - \frac{d_1\lambda}{\mu\lambda_1}\right) \|u_k\|^2 - \lambda \left(C_3 + \frac{D_2}{\mu}\right). \tag{3.3}$$

De las desigualdades (3.1) y (3.3) se obtiene que

$$C(1 + \|u_k\|) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda d_1}{\mu\lambda_1}\right) \|u_k\|^2 - \lambda \left(C_3 + \frac{D_2}{\mu}\right)$$

de donde

$$\|u_k\| \leq \left(\frac{2C\mu\lambda_1 + 2C_3\mu\lambda\lambda_1 + 2D_2\lambda\lambda_1}{\mu\lambda_1 - 2\lambda_1 - 2d_1\lambda} + \left(\frac{C\mu\lambda_1}{\mu\lambda_1 - 2\lambda_1 - 2d_1\lambda}\right)^2\right)^{1/2} + \frac{C\mu\lambda_1}{\mu\lambda_1 - 2\lambda_1 - 2d_1\lambda}, \tag{3.4}$$

es decir, $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en E si y solo si

$$\mu\lambda_1 - 2\lambda_1 - 2d_1\lambda > 0$$

de lo cual se obtiene la siguiente estimación para λ

$$\lambda^* = \frac{\lambda_1}{d_1}\left(\frac{\mu}{2} - 1\right) > \lambda.$$

Gracias a esto y al Lema 2 se tiene que existe $u \in E$ y una subsucesión de $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ (también notada por $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$) tal que

1. $u_k \rightharpoonup u$ en E,
2. $u_k \to u$ en $L^q(B)$ para todo $q \in [1, 2^*)$,
3. $u_k(x) \to u(x)$ c.t.p. en B.
   Además existe $w \in L^q(B)$ tal que
4. $|u_k(x)| \leq w(x)$ c.t.p. en B y para todo k.

Finalmente se probará que la sucesión $u_k \to u$ en E, una consecuencia de $1 < p < 2^* - 1$. Ahora, dado que $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Palais-Smale de nivel c, se sigue que $dI(u_k) \to 0$ y por el Lema 2 se tiene $u_k \rightharpoonup u$ en E, de donde se obtiene

$$dI(u_k)(u_k - u) \to 0 \text{ y } dI(u)(u_k - u) \to 0$$

y entonces

$$(dI(u_k) - dI(u))(u_k - u) = o(1). \tag{3.5}$$

Luego, por la hipótesis 2.3 y 2.4 junto con los resultados del Lema 2 y al teorema de convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$\int_B m(|x|)f(u_k)u_k dx \to \int_B m(|x|)f(u)udx.$$

Otra vez por los mismo argumentos anteriores se obtiene que

$$\int_B m(|x|)f(u_k)udx \to \int_B m(|x|)f(u)udx.$$

De lo cual se puede deducir que

$$\begin{aligned}(dI(u_k) - dI(u))(u_k - u) &= \|u_k - u\|_E^2 - \ldots \\ &\int_B m(|x|)(f(u_k) - \ldots \\ &f(u))(u_k - u)dx \ldots \\ &= \|u_k - u\|_E^2 + o(1).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Finalmente de (3.5) y (3.6) se tiene que

$$u_k \to u \text{ en } E.$$

Lo cual demuestra que I satisface $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Lema 4. *El funcional I satisface la condición:*

$$\text{existen constantes } \rho, \alpha > 0 \text{ tales que } I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha. \tag{3.7}$$

Demostración: Sea $\lambda_1 > 0$ el primer valor propio asociado al operador $-\Delta$ con condiciones homogéneas de Dirichlet sobre B. Fijando $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{\lambda_1}{4\lambda} > \varepsilon \tag{3.8}$$

de donde se tiene que

$$\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon\lambda}{\lambda_1} > \frac{1}{4}.$$

Luego, gracias a la hipótesis 2.7 y utilizando la regla de l'Hôpital se sigue que

$$\lim_{s\to 0} \frac{F(s)}{s^2} = 0$$

y por lo tanto, para ε en (3.8), existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(s)| < \varepsilon s^2 \quad \text{si} \quad |s| < \delta.$$

Ahora por la hipótesis 2.4 se obtiene

$$|F(s)| < C(s + |s|^{p+1}),$$

con $2 < p + 1 < 2^*$. De las dos últimas desigualdades se sigue que

$$|F(s)| \leq \varepsilon s^2 + C|s|^{p+1}, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Gracias a esto se tiene que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_B m(|x|)F(u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_B F(u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda\varepsilon}{\lambda_1}\|u\|^2 - C\lambda\|u\|^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{4}\|u\|^2 - C\lambda\|u\|^{p+1} \\ &\geq \|u\|^2 \left(\frac{1}{4} - C\lambda\|u\|^{p-1}\right) \end{aligned}$$

donde C no depende de u ni de λ. Finalmente, para obtener la condición 3.7 basta tomar

$$0 < \rho_\lambda < \left(\frac{1}{4\lambda C}\right)^{1/(p-1)}$$

y

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{4}(\rho_\lambda)^2 - C\lambda(\rho_\lambda)^{p+1}.$$

Observación 2. *Dado que* $p - 1 > 0$ *y*

$$I(u) \geq \|u\|^2 \left(\frac{1}{4} - C\lambda\|u\|^{p-1}\right)$$

para $u \in E = H_0^1(B)$ *con norma suficientemente pequeña, se tiene que*

$$I(u) > 0 = I(0),$$

es decir, $u = 0$ *es un mínimo local de* I *y por lo tanto un punto crítico del funcional.*

Lema 5. *El funcional* I *satisface la condición:*

$$\text{existe} \quad \text{un} \quad e \in E \setminus \overline{B}_\rho \quad \text{tal} \quad \text{que} \quad I(e) \leq 0. \tag{3.9}$$

Demostración: De la hipótesis 2.5 se tiene que para $r > 0$, $2 < \mu < 2^*$ y

$$sf(s) \geq \mu F(s), \qquad \forall s \geq r$$

de donde por integración se tiene que existe $C > 0$ tal que

$$F(s) \geq C|s|^\mu, \qquad \forall s \geq r.$$

Luego, tomando $\psi \in C_c^\infty(B)$ tal que $\psi \geq 0$ y $supp(\psi) \subset B^+ := \{x \in B : m(|x|) > 0\}$. Si se toma $e = t\psi$ con $t > 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} I(e) &= I(t\psi) \\ &= \frac{t^2}{2}\|\psi\|^2 - \lambda \int_B m(|x|)F(t\psi)dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|\psi\|^2 - \lambda \int_{B^+} F(t\psi)dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|\psi\|^2 - \lambda \int_{B^+ \cap \{t\psi \geq r\}} F(t\psi)dx - \lambda C_1 \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|\psi\|^2 - \lambda t^\mu \int_{B^+ \cap \{t\psi \geq r\}} C|\psi|^\mu dx - \lambda C_1 \\ &\longrightarrow -\infty \end{aligned}$$

cuando $t \to +\infty$. Gracias a lo cual, para obtener la condición 3.9 basta tomar t suficientemente grande.

En el siguiente teorema hacemos un resumen de los resultados obtenidos en esta subsección obteniendo así la solución no nula para el problema (2.1).

Teorema 1. *Suponga que f verifica las hipótesis 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 y 2.7. Y suponga que $m(|\cdot|)$ está definida por (2.11). Entonces para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, con*

$$\lambda^* = \frac{\lambda_1}{d_1}\left(\frac{\mu}{2} - 1\right),$$

el problema (2.1) tiene al menos una solución no trivial.

Demostración: De la Hipótesis 2.2 se obtiene que $I(0) = 0$ y por el Lema 1 el funcional I es $C^1(E, \mathbb{R})$. Por otro lado, por el Lema 3 se demuestra que el funcional I satisface la condición $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Luego, gracias a los Lemas 4 y 5 se sigue que el funcional I cumple con las condiciones geométricas 3.7 y 3.9. Del Teorema del "Paso de Montaña" de Ambrosetti-Rabinowitz. (Ver [4, pág. 118] Teorema 8.2.) se puede concluir que existe al menos una solución no nula.

Observación 3. *Notar que $u = 0$ también es una solución del problema (2.1) y se tiene que el problema al menos tiene dos soluciones, una solución nula de mínimo local y una solución no nula de tipo Paso de Montaña.*

3.2. Soluciones radiales. Puesto que se está trabajando sobre un dominio simétrico, con simetría radial, el cual es de la forma $B := B(0, 1)$ y como la función $m(\cdot)$ es una función que depende radialmente de la variable sobre el dominio B y no de su ángulo, es lógico buscar soluciones radiales, es decir, independientes del ángulo, para el problema en estudio y en consecuencia se puede suponer que la solución $v(x)$ es de la forma

$$v(x) = u(|x|)$$

y el problema (2.1) será:

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda m(|x|) f(v) & x \in B \\ v = 0 & x \in \partial B \end{cases} \tag{3.10}$$

el cual puede ser escrito como:

$$\begin{cases} -\Delta u(|x|) = \lambda m(|x|) f(u(|x|)) & x \in B \\ u(|x|) = 0 & x \in \partial B. \end{cases} \tag{3.11}$$

Además si se hace el cambio de variable $r = |x|$, es decir, $v(x) = u(|x|) = \widetilde{u}(r)$ se tiene que el problema (3.10) se escribe como la ecuación diferencial ordinaria más la condición de borde siguiente

$$\begin{cases} -\widetilde{u}'' - \dfrac{n-1}{r}\widetilde{u}' = \lambda m(r) f(\widetilde{u}) & r \in (0, 1) \\ \widetilde{u}(1) = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Adicionalmente en (3.12) se puede imponer la condición $\widetilde{u}'(0) = 0$ o la condición $\widetilde{u}(0) = \sigma$ con $\sigma \in \mathbb{R}_+$, si se busca soluciones no negativas.

Observación 4. *Se observa que la ecuación (3.12) no depende del ángulo puesto que $\widetilde{u}$ es independiente del mismo.*

Ahora como se desea encontrar soluciones radiales es lógico buscarlas en el espacio funcional $H^1_{0,rad}(B)$, el cual está definido por

$$H^1_{0,rad}(B) := \{u \in H^1_0(B) : u \ es \ radial\}$$

dotado de la misma norma de $H^1_0(B)$, la cual esta notada por

$$\|u\|_r := \left(\int_B |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}, \qquad u \in H^1_{0,rad}(B).$$

Nota 3.1. *El espacio $H^1_{0,rad}(B)$ es la completación del subconjunto de funciones radialmente simétricas en $C^\infty_c(B)$. Para mayores detalles ver [19] y [7].*

Se tiene la mayoración punto a punto

$$|u(|x|)| \leq C\frac{\|u\|_r}{|x|^{(n-2)/2}}.$$

Por otro lado se tiene que el espacio $H^1_{0,rad}(B)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(u|\phi)_r := \int_B \nabla u \nabla \phi dx \qquad \forall u, \phi \in H^1_{0,rad}(B).$$

Además, la inmersión de $H^1_{0,rad}(B)$ en $L^p(|x|^\beta dx)$ es compacta para $p < 2^* - 1 + 2\beta/(n-2)$ con $\beta > 0$.

Observación 5. *Notar que el término $|x|^\beta$ es acotado sobre B.*

Ahora utilizando la misma técnica de la sección anterior, se busca resolver el problema

$$\begin{cases} -\Delta u(|x|) = \lambda |x|^\beta m(|x|) f(u(|x|)) & x \in B \\ u(|x|) = 0 & x \in \partial B. \end{cases}$$

De aquí en adelante se utilizará la notación $v := u(|x|)$. Entonces el problema se reescribe como

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda |x|^\beta m(|x|) f(v) & x \in B \\ v = 0 & x \in \partial B \end{cases} \tag{3.13}$$

donde $m(|\cdot|)$ está definida por (2.11).

Ahora, diremos que $v \in E := H^1_0(B)$ es la solución débil de (3.13) si

$$\int_B \nabla v \nabla \phi dx = \lambda \int_B |x|^\beta m(|x|) f(v) \phi dx, \qquad \forall \quad \phi \in H^1_{0,rad}(B).$$

El problema (3.13) tiene como funcional asociado a:

$$\begin{aligned} I_r : H^1_{0,rad}(B) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto I_r(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2_r - \lambda \Phi_r(v), \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde

$$\Phi_r(v) = \int_B |x|^\beta m(|x|) F(v) dx.$$

Además, la derivada en el sentido de Fréchet del funcional I_r es

$$dI_r(v)\phi = \int_B \nabla v \nabla \phi dx - \lambda \int_B |x|^\beta m(|x|) f(v) \phi dx, \qquad \forall \quad \phi \in H^1_{0,rad}(B);$$

y en consecuencia las soluciones débiles de (3.13) son los puntos críticos de (3.14) y viceversa.

Observación 6. *Se debe observar que la correcta elección del espacio para el funcional I_r permitirá encontrar la solución radial deseada, puesto que la condición de radialidad está incorporada al espacio.*

3.2.1. Lemas auxiliares. De la hipótesis 2.2 se tiene que $f(0) = 0$, gracias a lo cual el problema (3.13) admite la solución trivial $v = 0$. Además, se puede concluir que $v = 0$ es un punto crítico de I_r con $I_r(0) = 0$ y $dI_r(0) = 0$.

Observación 7. *Las demostraciones de los lemas siguientes se obtienen de forma similar que en la sección anterior con pequeñas variacioes. Para mayor detalle ver [16].*

Lema 6. *El funcional I_r definido por (3.14) es $C^1(H^1_{0,rad}(B), \mathbb{R})$.*

Lema 7. *Sea $B = B(0,1)$ definido por $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Dada la sucesión $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H^1_{0,rad}(B)$, si*

$$\|v_k\|^2_r = \int_B |\nabla v_k|^2 dx < C$$

para todo k y $C > 0$ una constante que no depende de k. Entonces existe una subsucesión de $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ (también notada por $\{v_k\}_{k=1}^\infty$) y $v \in H^1_{0,rad}(B)$ tal que

1. $v_k \rightharpoonup v$,
2. $v_k \to v$ en $L^q(|x|^\beta dx)$ para todo $q \in [1, (n+2)/(n-2) + 2\beta/(n-2))$,
3. $v_k(x) \to v(x)$ c.t.p. en B.
   Además existe $w \in L^q(|x|^\beta dx)$ tal que
4. $|v_k(x)| \le w(x)$ c.t.p. en B y para todo k.

Sea $\lambda_1[_{|x|^\beta}] > 0$ el primer valor propio asociado al operador $-\Delta$ con condiciones homogéneas de Dirichlet sobre B (en $H^1_{0,rad}(B)$), es decir, $\lambda_1[_{|x|^\beta}]$ el primer valor propio asociado al problema

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda |x|^\beta v & x \in B \\ v = 0 & x \in \partial B. \end{cases}$$

Además, de este problema se puede deducir que

$$\lambda_1[_{|x|^\beta}] \int_B |x|^\beta |v|^2 dx \le \int_B |\nabla v|^2 dx.$$

Lema 8. *El funcional I_r verifica $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, es decir:*
Si toda sucesión $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset H^1_{0,rad}(B)$ que satisface
1. *$I_r(v_k) \to c$ (en $\mathbb{R}$) cuando $k \to \infty$, y*
2. *$dI_r(v_k) \to 0$ (en $(H^1_{0,rad}(B))'$) cuando $k \to \infty$*

para todo $c \in \mathbb{R}$, entonces esta tiene una subsucesión convergente (en $H^1_{0,rad}(B)$).

Lema 9. *El funcional I_r satisface la siguiente condición:*

(3.15) $$[I_1] \quad \text{existen constantes } \rho, \alpha > 0 \text{ tales que } I_r|_{\partial B_\rho} \ge \alpha.$$

Lema 10. *El funcional I_r satisface la siguiente condición:*

(3.16) $$[I_2] \quad \text{existe un } e \in H^1_{0,rad}(B) \setminus \overline{B}_\rho \text{ tales que } I_r(e) \le 0.$$

Ahora se presenta el Teorema principal de esta subsección

Teorema 2. *Suponga que f verifica las hipótesis (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) y (2.7). Ahora, suponga que $m(|\cdot|)$ está definida por (2.11). Entonces para todo $\lambda \in (0, \tilde{\lambda})$ con*

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_1[_{|x|^\beta}]}{d_1}\left(\frac{\mu}{2} - 1\right)$$

el problema (3.13) tiene al menos una solución radial y no trivial.

Demostración: De la Hipótesis 2.2 se obtiene que $I(0) = 0$ y por el Lema 6 el funcional I_r es $C^1(H^1_{0,rad}(B), \mathbb{R})$. Por otro lado, por el Lema 8 se demuestra que el funcional I_r satisface la condición $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Luego, gracias a los Lemas 9 y 10 se sigue que el funcional I_r cumple con las condiciones geométricas 3.15 e 3.16. Del Teorema del "Paso de Montaña" de Ambrosetti-Rabinowitz. (Ver [4, pág. 118] Teorema 8.2.) se puede concluir que existe al menos una solución radial no nula.

4. Observaciones finales.

1. Se ha demostrado que el problema en estudio tiene al menos una solución radial no nula.
2. El término $|x|^\beta$ es muy importante puesto que permite ganar compacidad y obtener las soluciones radiales buscadas.
3. Puesto que $m(|\cdot|)$ cambia de signo se debe hacer un estudio diferente al clásico, es decir, aquel que se suele encontrar en los textos.
4. La discontinuidad de $m(|\cdot|)$ en $|x| = \gamma$ lleva a problemas diferentes de los estudiados en la literatura.

5. Reconocimientos. La investigación realizada por Marco Calahorrano ha sido parcialmente financiada por la Escuela Politécnica Nacional, Proyecto Semilla PIS 17-01, el primer autor agradece a la Escuela Politécnica Nacional por el soporte.

ORCID and License

Marco Calahorrano https://orcid.org/0000-0002-5710-1393
Israel Cevallos https://orcid.org/0000-0001-7933-5660

Referencias

[1] Alama S, Del Pino M. *Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via Morse theory and linking*. Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire. 1996; **13**:95–115.

[2] Alama S, Tarantello G. *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 1993; **1**:439–475.

[3] Alama S, Tarantello G. *Elliptic Problems with Nonlinearities Indefinite in Sign*. Journal of Functional Analysis. 1996; **141**:159-215.

[4] Ambrosetti A, Malchiodi A. *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*. Cambridge University Press, 2007.

[5] Ambrosetti A, Rabinowitz P. *Dual variational methods in critical point theory and applications*. Journal of Functional Analysis. 1973; **14**:349-381.

[6] Badiale M, Serra E. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach*. Springer, 2011.

[7] Barutello V, Secchi S, Serra E. *A note on the radial solutions for the supercritical Hénon equation*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008; **341**:720-728.

[8] Berestycki He, Capuzzo-Dolcetta I, Nirenberg L. *Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems*. Topological Methods in Nonlinear Analysis. 1994; **4**:59-78.

[9] Berestycki H, Capuzzo-Dolcetta I, Nirenberg L. *Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems*. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA. 1995; **2**:553–572.

[10] Brezis H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Berlin: Springer; 2010.

[11] Calahorrano M. *Existencia de soluciones positivas para problemas no lineales con discontinuidades indefinidas*. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 2007; **13**:95-101.

[12] Calahorrano M. El problema del plasma confinado. Multiplicidad de soluciones cuando las no linealidades son indefinidas, *Memorias del X Encuentro de Matemática y sus Aplicaciones* **1**; 2006; 1-15.

[13] Calahorrano M, Dobarro F. *Multiple solutions for Inhomogeneous Elliptic Problems Arising in Astrophysics*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 1993; **3**:217-230.

[14] Calahorrano M, Mena H. *Multiple solutions for inhomogeneous nonlinear elliptic problems arising in astrophysics*. Electronic Journal of Differential Equations. 2004; **49**:1-10.

[15] Calahorrano M, Yangari M. *Sistemas de ecuaciones diferenciales nolineales indefinidas*. Revista Politécnica. 2010; **29**:133-137.

[16] Cevallos I. *Existencia de Soluciones Radiales para Problemas Semilineales Elípticos Indefinidos*. Proyecto de titulación, Escuela Politécnica Nacional; 2017.

[17] Evans L. *Partial Differential Equations*. Rhode Island: American Mathematical Society. Providence; 1997.

[18] Gidas B, Ni Wei Ming, Nirenberg L. *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Communications in Mathematical Physics. 1979; **68**:209-243.

[19] Ni WM. *A nonlinear Dirichlet Problem on the Unit Ball and Its Applications*. Indiana University Mathematics Journal. 1982; **31**:801-807.

[20] Papini D, Zanolin F. *Periodic Points and Chaotic-like Dynamics of Planar Maps Associated to Nonlinear Hill's Equations with Indefinite Weigh*. Georgian Mathematical Journal. 2002; **9(2)**:339-366.

[21] Papini D, Zanolin F. *Some results on periodic points and chaotic dynamics arising from the study of the nonlinear Hill equations*. Rendiconti del seminario matematico, Università e Politecnico di Torino. 2007; **65(1)**:115-157.

[22] Qing-Liu Y, Qin-Sheng M. *Existence of positive radial solutions for some semilinear elliptic equations in annulus*. Applied Mathematics and Mechanics. 2002; **23**:1452–1457.

[23] Rabinowitz P. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. New York: Conference Board of the Mathematical Science, AMS; 1986.