Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2020; Vol. 7(2): 314-322.

REVIEW

Sobre grupos clásicos de la física matemática

On the classical groups of mathematical physics

Edgar Vera Saravia

Received, May. 05, 2020 *Accepted, Set. 30, 2020*

How to cite this article:
Vera Saravia E. *Sobre Grupos Clásicos de la física matemática*. Selecciones Matemáticas. 2020;7(2):314–322. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.02.13

Resumen
Comenzando con las matrices introducidas por Pauli y Dirac en 1928, presentamos una versión amigable y unificada de los grupos clásicos de la Física Matemática como subgrupos de álgebras geométricas reales creadas por Clifford en 1879, la versión primigenia de las álgebras de Clifford.

Palabras clave. Álgebras geométricas, encaje de álgebras reales, encaje de grupos.

Abstract
Starting from Pauli and Dirac matrices of 1928 we present a friendly and unified version of the classical groups of mathematical physics as subgroups of subálgebras of real geometric algebras, created and presented for Clifford in 1879, the prior concept of Clifford algebras.

Keywords . Geometric algebras, nested of geometric real algebras, nested of groups.

1. Introducción. A inicios de siglo XX, la Teoría de la Relatividad y los requerimientos matemáticos de la Física para trabajar con el espacio de Minkowski, plantearon la necesidad de sustituir el *álgebra vectorial*: En 1920 Heisenberg manifiesta que la Física requiere de una Matemática completamente nueva que incluya álgebras no conmutativas apropiadas.

A partir de 1928 Pauli y Dirac publican trabajos sobre el uso de las álgebras reales no conmutativas de matrices complejas $\mathbb{C}^{2\times 2}$ y $\mathbb{C}^{4\times 4}$ respectivamente.

No se tomó en cuenta que esto significaba un retorno al siglo XIX porque $\mathbb{C}^{2\times 2}$ y $\mathbb{C}^{4\times 4}$ son representaciones matriciales de las álgebras geométricas AG(3) y AG(3,1) respectivamente ... ¿álgebras geométricas? ... sucede que, conjugando los cuaterniones creados por Hamilton en 1843 para algebrizar las rotaciones en $\mathbb{R}^3$, con el álgebra exterior creada por Grassman en 1844 para algebrizar la geometría, Clifford crea las álgebras geométricas entre los años 1873-1879, buscando un proceso amigable para algebrizar la geometría con el objetivo de divulgar y aplicar lo hecho por Hamilton y Grassman.

En estas notas damos una idea de como el Álgebra Geométrica permite abstraer el contexto de Pauli y unificar el estudio de Complejos y Cuaterniones, simplificando la algebrización y aplicaciones de los espacios euclideanos $\mathbb{R}^{(2,0)}$ y $\mathbb{R}^{(3,0)}$. El paso siguiente es indagar una extensión, abstrayendo el contexto de Dirac, que incluya los espacios de Minkowski $\mathbb{R}^{(3,1)}$ e hiperbólico $\mathbb{R}^{(1,1)}$.

2. Sobre las matrices de Pauli. Pauli utilizó matrices de $\mathbb{C}^{2\times 2}$ que ahora llevan su nombre:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

*Facultad de Ciencias Matemáticas - Universidad Nacional Mayor de San marcos, Av. Venezuela s.n., Lima, Perú (everas@unmsm.edu.pe).

Con ellas y la matriz identidad, σ_0, se construye la siguiente tabla multiplicativa:

	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_0	$\sigma_1\sigma_2$	$\sigma_1\sigma_3$
σ_2	$-\sigma_1\sigma_2$	σ_0	$\sigma_2\sigma_3$
σ_3	$-\sigma_1\sigma_3$	$-\sigma_2\sigma_3$	σ_0

Tabla 2.1: Producto de Matrices de Pauli.

Esta tabla inicia el retorno a las ≪álgebras de matrices sin matrices≫ de Clifford porque:

- Permite ser ampliada sin emplear explícitamente matrices: Utilizando exclusivamente la tabla 2.1 y la asociatividad del producto de matrices se obtiene la siguiente tabla:

	$\sigma_1\sigma_2$	$\sigma_3\sigma_1$	$\sigma_2\sigma_3$
$\sigma_1\sigma_2$	$-\sigma_0$	$\sigma_2\sigma_3$	-$\sigma_3\sigma_1$
$\sigma_3\sigma_1$	$-\sigma_2\sigma_3$	$-\sigma_0$	$\sigma_1\sigma_2$
$\sigma_2\sigma_3$	$\sigma_3\sigma_1$	$-\sigma_1\sigma_2$	$-\sigma_0$

Tabla 2.2: Producto de bimatrices de Pauli.

- Las tablas 2.1 y 2.2 permiten construir el álgebra geométrica AG(3), asociada al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, de modo que su representación matricial es $\mathbb{C}^{2\times 2}$.
- Análogamente, con las matrices de Pauli σ_1 y σ_2, se construye el álgebra geométrica AG(2) asociada al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, con representación matricial $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
- Como $\mathbb{R}^{2\times 2}$ es subálgebra de $\mathbb{C}^{2\times 2}$; es decir, $\mathbb{R}^{2\times 2} < \mathbb{C}^{2\times 2}$, resulta que AG(2) es subálgebra geométrica de AG(3); es decir, $\mathbb{R}^{2\times 2} \equiv AG(2) < AG(3) \equiv \mathbb{C}^{2\times 2}$.

En [10] presentamos el álgebra geométrica AG(2), que tiene a $\mathbb{R}^2$ como subespacio vectorial, de tal modo que el producto de AG(2) determina su métrica euclideana:

$$v \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow vv = ||v||^2 \geq 0. \tag{2.2}$$

AG(3) se presenta y emplea de modo similar.

3. Unificando dos algebrizaciones clásicas. Esto es posible porque podemos reemplazar el clásico encaje de álgebras de matrices

$$\mathbb{R}^{2\times 2} < \mathbb{C}^{2\times 2}. \tag{3.1}$$

por un mejor encaje con las correspondientes álgebras de geométricas:

$$\mathbb{R} < \mathbb{C} < AG(2) < AG(3). \tag{3.2}$$

que resulta más versátil debido a:

- Las matrices no ofrecen la invarianza de referenciales que requiere la Física.
- La tabla 2.1 resulta equivalente a las condiciones de Grassmann-Clifford para matrices de Pauli:

$$\sigma_i\sigma_i = \sigma_0 \quad \text{y} \quad \sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i \quad \text{con} \quad i,j \in \{1,2,3\} \quad \text{y} \quad i<j, \tag{3.3}$$

  que se abstrae en la versión algebraica del concepto de base ortonormal en $\mathbb{R}^3$.
- Los complejos $\mathbb{C}$ y los cuaterniones $\mathbb{H}$ se identifican con subálgebras de AG(2) y AG(3) respectivamente, llamadas *subálgebras pares*, que mejoran el encaje (3.2):

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & < & AG(2) & < & AG(3) \\ || & & \vee & & \vee \\ \mathbb{R} & < & \mathbb{C} & < & \mathbb{H} \end{array}$$

Esto sutenta la siguiente presentación unificada de complejos y cuaterniones que veremos a seguir.

3.1. El álgebra de los Cuaterniones. Es la subálgebra par del álgebra geométrica AG(3), que se presenta como:

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k; \quad a_\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha = 0,1,2,3\},$$

un espacio vectorial real de polinomios en las variables $i,\ j$ y k cuyo producto es definido mediante una forma $\mathbb{R}$-bilineal asociativa pero no conmutativa

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H},$$

que se procesa utilizando la distributividad establecida por la bilinealidad, la asociatividad y la siguiente Tabla Multiplicativa (que incluye la no conmutatividad,)

1	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

Tabla 3.1: Producto de cuaterniones.

Esta tabla es la tabla de las bimatrices de Pauli (2.2), si utilizamos las identificaciones:

$$\sigma_1\sigma_2 \equiv i, \quad \sigma_3\sigma_1 \equiv j \quad \text{y} \quad \sigma_2\sigma_3 \equiv k.$$

Denotando el conjugado de $\mathfrak{q} = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$ mediante

$$\bar{\mathfrak{q}} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k \in \mathbb{H},$$

se puede explicitar el grupo de los cuaterniones unimodulares:

$$\mathbb{H}_u = \{\mathfrak{q} \in \mathbb{H}; \quad \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}} = 1\}.$$

3.2. El álgebra de los Complejos. Es la subálgebra par del álgebra geométrica AG(2), que se presenta como:

$$\mathbb{C} = \{a_0 + a_1 i; \quad a_\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha = 0,1\}$$

un espacio vectorial real de polinomios en la variable i, cuyo producto es definido mediante una forma $\mathbb{R}$-bilineal asociativa y conmutativa

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

que se procesa utilizando la distributividad establecida por la bilinealidad, la asociatividad, la conmutatividad y la siguiente tabla multiplicativa:

1	i
i	-1

Tabla 3.2: Producto de complejos.

Esta tabla es parte de la tabla de los cuaterniones (3.2), luego $\mathbb{C}$ es subálgebra de $\mathbb{H}$:

$$\mathbb{R} < \mathbb{C} < \mathbb{H}. \tag{3.4}$$

Definiendo el conjugado de $z = a_0 + a_1 i \in \mathbb{C}$ mediante $\bar{z} = a_0 - a_1 i \in \mathbb{C}$ se explicita el grupo de los complejos unimodulares, subgrupo de $\mathbb{H}_u$:

$$\mathbb{C}_u = \{z \in \mathbb{C}; \quad z\bar{z} = 1\} < \mathbb{H}_u.$$

4. Buscando la unificación.

4.1. Sobre las matrices de Dirac. Utilizando las matrices de Pauli, Dirac consideró matrices de $\mathbb{C}^{4\times 4}$ que llevan su nombre:

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} \odot & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \odot \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} \odot & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \odot \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{bmatrix} \odot & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \odot \end{bmatrix} \quad y \quad \gamma_4 = \begin{bmatrix} \odot & -\sigma_0 \\ \sigma_0 & \odot \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

donde $\odot \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ indica la matriz nula.

Procediendo con las matrices de Dirac de modo similar a lo hecho con las matrices de Pauli y denotando con γ_0 la correspondiente matriz identidad, se obtiene la tabla multiplicativa:

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
γ_1	γ_0	$\gamma_1\gamma_2$	$\gamma_1\gamma_3$	$\gamma_1\gamma_4$
γ_2	$-\gamma_1\gamma_2$	γ_0	$\gamma_2\gamma_3$	$\gamma_2\gamma_4$
γ_3	$-\gamma_1\gamma_3$	$-\gamma_2\gamma_3$	γ_0	$\gamma_3\gamma_4$
γ_4	$-\gamma_1\gamma_4$	$-\gamma_2\gamma_4$	$-\gamma_3\gamma_4$	$-\gamma_0$

Tabla 4.1: Producto de matrices de Dirac.

Continuemos el retorno a las ≪álgebras de matrices sin matrices≫ de Clifford. De un lado utilizando exclusivamente la tabla 4.1 y la asociatividad del producto de matrices se obtiene la siguiente tabla:

	$\gamma_1\gamma_2$	$\gamma_3\gamma_1$	$\gamma_2\gamma_3$	$\gamma_4\gamma_1$	$\gamma_4\gamma_2$	$\gamma_4\gamma_3$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$
$\gamma_1\gamma_2$	$-\gamma_0$	$\gamma_2\gamma_3$	$-\gamma_3\gamma_1$	$-\gamma_4\gamma_2$	$\gamma_4\gamma_1$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$	$\gamma_4\gamma_3$
$\gamma_3\gamma_1$	$-\gamma_2\gamma_3$	$-\gamma_0$	$\gamma_1\gamma_2$	$\gamma_4\gamma_3$	$-\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$	$-\gamma_4\gamma_1$	$\gamma_4\gamma_2$
$\gamma_2\gamma_3$	$\gamma_3\gamma_1$	$-\gamma_1\gamma_2$	$-\gamma_0$	$-\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$	$-\gamma_4\gamma_3$	$\gamma_4\gamma_2$	$\gamma_4\gamma_1$
$\gamma_4\gamma_1$	$\gamma_4\gamma_2$	$-\gamma_4\gamma_3$	$-\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$	γ_0	$\gamma_1\gamma_2$	$-\gamma_3\gamma_1$	$\gamma_2\gamma_3$
$\gamma_4\gamma_2$	$-\gamma_4\gamma_1$	$-\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$	$\gamma_4\gamma_3$	$-\gamma_1\gamma_2$	γ_0	$\gamma_2\gamma_3$	$\gamma_3\gamma_1$
$\gamma_4\gamma_3$	$-\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$	$\gamma_4\gamma_1$	$-\gamma_4\gamma_2$	$\gamma_3\gamma_1$	$-\gamma_2\gamma_3$	γ_0	$\gamma_1\gamma_2$
$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$	$\gamma_4\gamma_3$	$\gamma_4\gamma_2$	$\gamma_4\gamma_1$	$-\gamma_2\gamma_3$	$-\gamma_3\gamma_1$	$-\gamma_1\gamma_2$	$-\gamma_0$

Tabla 4.2: Producto de bimatrices de Dirac.

De otro lado, la construcción de las matrices de Dirac en base de las matrices de Pauli amplía el encaje $\mathbb{R}^{2\times 2} < \mathbb{C}^{2\times 2}$ al ≪casi encaje≫ de álgebras de matrices:

$$\mathbb{R}^{2\times 2} < \mathbb{C}^{2\times 2} < \mathbb{C}^{4\times 4}, \tag{4.2}$$

decimos ≪casi≫ porque en el último caso no hay un contenido estricto.

Tenemos además que:

- $\mathbb{C}^{4\times 4}$ es la representación matricial del ágebra geométrica AG(3,1), asociada al espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{(3,1)}$.
- Desconocemos una subálgebra de $\mathbb{C}^{4\times 4}$ que esté asociada al espacio hiperbólico $\mathbb{R}^{(1,1)}$, que es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{(3,1)}$, pero si se tiene el álgebra geométrica AG(1,1), que es subálgebra de AG(3,1) y está asociada a $\mathbb{R}^{(1,1)}$.
- El álgebra geométrica permite reemplazar el casi encaje (4.2) por dos encajes de álgebras geométricas:

$$\mathbb{R} < AG(2) < AG(3) < AG(3,1) > AG(1,1) > \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

En realidad se tienen tres encajes dobles y algunas relaciones adicionales:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{R} & < & AG(2) & < & AG(3) & < & AG(3,1) & > & AG(1,1) & > & \mathbb{R} \\
\| & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \| \\
\mathbb{R} & < & \mathbb{C} & < & \mathbb{H} & < & \mathbb{O}^a & > & \mathcal{H}^a & > & \mathbb{R} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\mathbb{R}_u & < & \mathbb{C}_u & < & \mathbb{H}_u & < & \mathbb{O}^a_u & > & \mathcal{H}^a_u & > & \mathbb{R}_u
\end{array}$$

donde:

- En el segundo encaje doble participan *las subálgebras pares* de aquellas consideradas en los encajes (4.3); es decir, los complejos $\mathbb{C}$, los cuaterniones $\mathbb{H}$, los octoniones asociativos $\mathbb{O}^a$ y los hiperbólicos asociativos $\mathcal{H}^a$.
- En el tercer encaje doble participan los respectivos *grupos unimodulares*; es decir, $\mathbb{C}_u$, $\mathbb{H}_u$, $\mathbb{O}^a_u$ y $\mathcal{H}^a_u$.
- Además, las subálgebras pares hacen posible abstraer y algebrizar conceptos y resultados geométricos parcialmente obtenidos con matrices, como la tabla (4.1) que es equivalente a las condiciones de Grassmann-Clifford para matrices de Dirac:

$$\begin{array}{ll} \gamma_4\gamma_4 = -\gamma_0 \quad y \quad \gamma_i\gamma_i = \gamma_0 \quad si \quad i \in \{1,2,3\}, & \text{además} \\ \gamma_i\gamma_j = -\gamma_j\gamma_i \quad si \qquad i,j \in \{1,2,3,4\} \quad y \quad i<j. & \end{array} \tag{4.4}$$

que corresponde a la versión algebraica del concepto de base ortonormal en $\mathbb{R}^{(3,1)}$.

4.2. Producto geométrico y métrica. Debemos resaltar que el álgebra geométrica AG(3) (AG(3,1) respectivamente), identifica vectores de $\mathbb{R}^{(3,0)}$ ($\mathbb{R}^{(3,1)}$ respectivamente) con sus correspondientes ≪vectores matriciales≫, lo que permite establecer:

Dado un vector $v \in \mathbb{R}^{(3,0)}$ ($v \in \mathbb{R}^{(3,1)}$ resp.), el producto vv determina su longitud, precisamente:

- De un lado: $\mathbb{R}^{(3,0)} \ni v \equiv a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3$, entonces se tiene

  $vv = ... = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = ||v||^2$, con la métrica euclideana.
- De otro lado: $\mathbb{R}^{(3,1)} \ni v \equiv a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 + a_4\gamma_4$, luego también se tiene

  $vv = ... = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 = ||v||^2$, con la métrica minkowskiana.

4.3. El álgebra de los octoniones asociativos. Es la *subálgebra par* del álgebra geométrica AG(3,1) que se presenta como:

$$\mathbb{O}^a = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + a_4 l + a_5 m + a_6 n + a_7 o; \;\; a_\alpha \in \mathbb{R}\},$$

una familia de polinomios en las variables i, j, k, l, m, n y o, con la estructura de espacio vectorial real usual y un producto definido mediante una forma $\mathbb{R}$-bilineal asociativa pero no conmutativa $\mathbb{O}^a \times \mathbb{O}^a \longrightarrow \mathbb{O}^a$, que se procesa utilizando la distributividad establecida por la bilinealidad, la asociativi-

1	i	j	k	*l*	m	n	o
i	-1	k	-j	-m	l	o	n
j	-k	-1	i	n	o	-l	m
k	j	-i	-1	o	-n	m	l
l	m	-n	-o	1	i	-j	k
m	-l	-o	n	-i	1	k	j
n	-o	l	-m	j	-k	1	i
o	n	m	l	-k	-j	-i	-1

Tabla 4.3: Producto de octoniones asociativos.

dad, la que se puede ver en la tabla multiplicativa 4.3 (que incluye la no conmutatividad).

Sobre la tabla 4.3 debemos resaltar que:

- Es la tabla (4.2), de las bimatrices de Dirac, si usamos las identificaciones:

$$\gamma_1\gamma_2 = i, \quad \gamma_3\gamma_1 = j, \quad \gamma_2\gamma_3 = k, \quad \gamma_4\gamma_1 = l, \quad \gamma_4\gamma_1 = m, \quad \gamma_4\gamma_2 = n, \quad \text{y} \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = o.$$

- Permite verificar que $\mathbb{O}^a$ es un álgebra real, asociativa y no conmutativa.
- $\mathbb{H}$ es subálgebra de $\mathbb{O}^a$ porque la tabla (3.2) es parte de la tabla (4.3) y el encaje(3.4) se amplía al encaje:

$$\mathbb{R} < \mathbb{C} < \mathbb{H} < \mathbb{O}^a \tag{4.5}$$

- Definiendo el conjugado de $\mathfrak{o} = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + a_4 l + a_5 m + a_6 n + a_7 o$, mediante

$$\bar{\mathfrak{o}} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k - a_4 l - a_5 m - a_6 n - a_7 o$$

podemos explicitar el grupo de los octoniones asociativos unimodulares:

$$\mathbb{O}^a_u = \{\mathfrak{o} \in \mathbb{O}^a; \quad \mathfrak{o}\bar{\mathfrak{o}} = 1\}.$$

4.4. El álgebra de los números hiperbólicos asociativos. Es la *subálgebra par* del álgebra geométrica $AG(1,1) < AG(3,1)$, se presenta como

$$\mathcal{H}^a = \{a_0 + a_4 l; \quad a_\alpha \in \mathbb{R}\} < \mathbb{O}^a.$$

Su tabla multiplicativa es

1	1
1	1

Tabla 4.4: Producto de hiperbólicos asociativos.

Esto permite verificar que $\mathcal{H}^a$ es una subálgebra asociativa y conmutativa de $\mathbb{O}^a$. Además, definiendo el conjugado de $\mathfrak{h} = a_0 + a_4 l$ mediante

$$\bar{\mathfrak{h}} = a_0 - a_4 l,$$

tenemos el grupo de los números hiperbólicos unimodulares:

$$\mathcal{H}^a_u = \{\mathfrak{h} \in \mathcal{H}^a; \quad \mathfrak{h}\bar{\mathfrak{h}} = 1\} < \mathbb{O}^a_u.$$

En el XIII-Inter-Fast-2020, realizado en la Universidad Nacional de Trujillo, presentamos un avance de este proceso de unificación empleando los octoniones como álgebra madre.

5. Conclusiones.

5.1. Sobre el álgebra de los complejos.

- Existe una biyección entre 2-espinores y los complejos

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (r_1, r_2) \quad \leftrightarrow \quad r_1 + r_2 i \in \mathbb{C}.$$

- Existe un isomorfismo de grupos entre $U(1)$ y $\mathbb{C}_u$:

$$\mathbb{R}^{2\times 2} \supset U(1) \ni \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \mathfrak{e}^{\theta\imath} \in \mathbb{C}_u \subset AG(2). \tag{5.1}$$

- La acción del grupo $\mathbb{C}_u$ en $\mathbb{R}^2$

$$z \in \mathbb{C}_u \longrightarrow (v \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow w = zv\bar{z} \in \mathbb{R}^2),$$

preserva la métrica del espacio cartesiano $\mathbb{R}^2$; en efecto, utilizando la asociatividad,

$$\mathbb{R} \ni ||w||^2 = ww = zv\bar{z}zv\bar{z} = ... = vv = ||v||^2 \in \mathbb{R}.$$

- Tenemos un modo unificado de presentar, tres de las cuatro álgebras clásicas, sus subálgebras pares y sus subgrupos unimodulares:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & < & AG(2) & < & AG(3) \\ || & & \vee & & \vee \\ \mathbb{R} & < & \mathbb{C} & < & \mathbb{H} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \mathbb{R}_u & < & \mathbb{C}_u & < & \mathbb{H}_u \end{array}.$$

5.2. Sobre el álgebra de los cuaterniones.

- Existe una biyección entre 3-espinores (espinores de Pauli) y cuaterniones

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (z_1, z_2) \quad \leftrightarrow \quad z_1 + z_2 j \in \mathbb{H}, \tag{5.2}$$

basta considerar $z_1 = a_0 + a_1 i, \quad z_2 = a_2 + a_3 i$ y utilizar:

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k; \quad a_\alpha \in \mathbb{R}\} = \{(a_0 + a_1 i) + (a_2 + a_3 i)j; \quad a_\alpha \in \mathbb{R}\}.$$

- Existe un isomorfismo de grupos entre SU(2) y los cuaterniones unimodulares

$$\mathbb{H}_u = \{\mathfrak{q} \in \mathbb{H}; \quad \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}} = 1\} :$$

$$\mathbb{C}^{2\times 2} \supset SU(2) \ni \begin{bmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad z_1 + z_2 j \in \mathbb{H}_u \subset AG(3). \tag{5.3}$$

- La acción del grupo $\mathbb{H}_u$ en $\mathbb{R}^3$

$$\mathfrak{q} \in \mathbb{H}_u \longrightarrow (v \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow w \equiv \mathfrak{q}v\bar{\mathfrak{q}} \in \mathbb{R}^3),$$

preserva la métrica del espacio euclideano $\mathbb{R}^3$; en efecto, utilizando la asociatividad,

$$\mathbb{R} \ni ||w||^2 = ww = \mathfrak{q}v\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}v\bar{\mathfrak{q}} = ... = vv = ||v||^2 \in \mathbb{R}.$$

5.3. Sobre el álgebra de los hiperbólicos asociativos.

- Existe una biyección entre (1,1)-espinores (boost) y números hiperbólicos asociativos

$$\mathbb{R}^{1,1} \ni (a_0, a_4) \quad \leftrightarrow \quad a_0 + a_4 l \in \mathcal{H}^a.$$

- Existe un isomorfismo de grupos entre $\mathcal{U}(1)$ y los hiperbólicos unimodulares $\mathcal{H}^a_u$

$$\mathbb{R}^{2\times 2} \supset \mathcal{U}(1) \ni \begin{bmatrix} cosh\theta & -senh\theta \\ senh\theta & cosh\theta \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \mathfrak{e}^{\theta l} \in \mathcal{H}^a_u \subset AG(1,1). \tag{5.4}$$

- La acción del grupo $\mathcal{H}^a_u$ en $\mathbb{R}^{(1,1)}$ (que a cada $\mathfrak{h}$ asocia el morfismo)

$$v \in \mathbb{R}^{(1,1)} \longrightarrow w \equiv \mathfrak{h}v\bar{\mathfrak{h}} \in \mathbb{R}^{(1,1)},$$

preserva la métrica del espacio de Minkowki $\mathbb{R}^{(1,1)}$; en efecto,
usando la asociatividad,

$$\mathbb{R} \ni ||w||^2 = ww = \mathfrak{h}v\bar{\mathfrak{h}}\mathfrak{h}v\bar{\mathfrak{h}} = vv = ||v||^2 \in \mathbb{R}.$$

5.4. Sobre el álgebra de los octoniones asociativos. El álgebra real de los octoniones asociativos $\mathbb{O}^a$, que abstrae y amplía lo hecho por Pauli y Dirac, diseña una presentación unificada e integradora de las álgebras más conocidas y de utilidad en la Física, planteando la existencia de:

- Dos encajes de álgebras geométricas

$$\mathbb{R} < AG(2) < AG(3) < AG(3,1) > AG(1,1) > \mathbb{R}.$$

- Dos encajes de álgebras reales:

$$\mathbb{R} < \mathbb{C} < \mathbb{H} < \mathbb{O}^a > \mathcal{H}^a > \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

- Dos encajes de grupos unimodulares:

$$\mathbb{R}_u < \mathbb{C}_u < \mathbb{H}_u < \mathbb{O}^a_u > \mathcal{H}^a_u > \mathbb{R}_u.$$

- Una biyección entre (3,1)-espinores (espinores de Dirac) y el álgebra de los octoniones asociativos.

$$\mathbb{H}^2 \ni (q_1, q_2) \quad \leftrightarrow \quad q_1 + q_2 l \in \mathbb{O}^a, \tag{5.6}$$

$$\text{donde} \quad q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad y \quad q_2 = a_4 + a_5 i + a_6 j + a_7 k.$$

- Un isomorfismo de grupos entre SU(3,1) y los octoniones asociativos unimodulares $\mathbb{O}^a_u$:

$$\mathbb{H}^{2\times 2} \supset SU(3,1) \ni \begin{bmatrix} q_1 & -\bar{q}_2 \\ q_2 & \bar{q}_1 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad q_1 + q_2 l \in \mathbb{O}^a_u \subset AG(3,1). \tag{5.7}$$

- La acción del grupo $\mathbb{O}^a_u$ en $\mathbb{R}^{(3,1)}$

$$v \in \mathbb{R}^{(3,1)} \longrightarrow w \equiv \mathfrak{o} v \bar{\mathfrak{o}} \in \mathbb{R}^{(3,1)},$$

  que preserva la métrica del espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{(3,1)}$; en efecto, utilizando la asociatividad,

$$\mathbb{R} \ni ||w||^2 = ww = \mathfrak{o} v \bar{\mathfrak{o}} \mathfrak{o} v \bar{\mathfrak{o}} = vv = ||v||^2 \in \mathbb{R}.$$

- Una biyección entre (3,1)-espinores y el álgebra de los octoniones asociativos $\mathbb{O}^a$.
- Un isomorfismo de grupos entre SU(3,1) y los octoniones unimodulares $\mathbb{O}^a_u$.

5.5. Sobre la unificación ampliada.

- Sucede que los resultados obtenidos sobre Octoniones e Hiperbólicos asociativos encajan en el modelo clásico del siglo XX, pero no concuerdan con un olvidado resultado matemático del siglo XIX:
  En 1898, Hurwitz estableció (ver [9]):
  > Las únicas álgebras de división normadas son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y los **octoniones no asociativos** $\mathbb{O}$,
- Lo anterior obliga a diseñar una alternativa a la introducción y empleo del álgebra real de matrices $\mathbb{C}^{4\times 4}$, su abstracción AG(3,1), las álgebras de los octoniones asociativos $\mathbb{O}^a$ y los hiperbólicos asociativos $\mathcal{H}^a$.
- En este siglo XXI se ha planteado con argumentos físicos, trabajar con los octoniones no asociativos; en efecto, en 2011 John Baez y John Huerta conjeturan en [1]:
  > Un sistema numérico concebido en el siglo XIX podría explicar por qué la teoría de cuerdas exige un espacio-tiempo de diez dimensiones.

  En [11] pueden verse argumentos recientes.
- En el presente caso significa tratar de obtener una versión no asociativa de AG(3,1).

Agradecimientos. Reiteramos nuestro agradecimineto al Comité Editor de SELECCIONES MATEMÁTICAS por su gentil acogida.

ORCID and License

Edgar Vera Saravia https://orcid.org/0000-0002-3634-8549

Referencias

[1] Baez J, Huerta J. Octoniones y Teoría de Cuerdas. Investigación y Ciencia. 2011; 418:38-43.
[2] Hestenes D. Space-Time Algebra. New York: Gordon and Breach; 1966.
[3] Hestenes, D. New Foundations for Classical Mechanics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 1993.
[4] Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge: Cambridge University Press; 2001.
[5] Prewass C. Geometric Algebra with Applications in Engineering;Springer, 2009.
[6] Shapiro D. Composition of Quadratic Forms. Berlin: Gruyter Verlag; 2000.
[7] Snigg J. Clifford Algebra, A Computacional tool for Physicists. Oxford: Oxford University Press; 1997.
[8] Sobczyk G. Matrix Gateway to Geometric Algebra. Cambridge: Spacetime and Spinors; 2019.
[9] Vera E. ¿Física Teórica y Octoniones?. Rev. de Investigación de Física. 2018; 21(1):27-30.
[10] Vera E. Sobre un álgebra de matrices sin matrices. Selecciones Matemáticas. 2019; 6(2):311-319.
[11] Wood Ch. The Strange Numbers That Birthed Modern Algebra. Quantamagazine[Internet]; 2018;[access abril 2020]; disponible en: https://www.quantamagazine.org/the-strange-numbers-that-birthed-modern-algebra-20180906/.