



## Mathematical model on the dynamics of youth play in Perú

### Modelo matemático sobre la dinámica de juego juvenil en el Perú

Heydy Mayummy Carrasco Huaccha<sup>lib</sup> and Frank Henry Acasiete Quispe<sup>lib</sup>

Received, May. 07, 2020

Accepted, Jul. 30, 2021



#### How to cite this article:

Carrasco H, Acasiete F. *Modelo matemático sobre la dinámica de juego juvenil en el Perú*. *Selecciones Matemáticas*. 2022;9(1):184–195. <http://dx.doi.org/10.17268/SEL.MAT.2022.01.16>

#### Abstract

*This paper proposes a simple mathematical model that represents the dynamics of youth play for adolescents from 11 to 18 years. This model is defined by a system of 3 differential equations, which are based on continuous processes. The specification of the classes of our model is based on the group classification of the state of gravity of the problem given in [10]. Then we proceed to find the equilibrium points of the system and its analysis. For our numerical simulation we estimate all the parameters of the model using the research work [6] and we apply the Runge kutta algorithm of order 4. As a result and conclusion it is determined that the problem with the game is endemic among young people. In addition, the prevalence of problems with the game is lower in students aged 15 to 18 than in students aged 11 to 14.*

**Keywords** . Mathematical model, reproductive number, sensitivity index, stability analysis, youth gambling.

#### Resumen

*En este trabajo se propone un modelo matemático simple que representa la dinámica de juego juvenil para adolescentes de 11 a 18 años. Este modelo se encuentra definido por un sistema de 3 ecuaciones diferenciales; las cuales se fundamentan en procesos de tipo continuo. La especificación de las clases de nuestro modelo se basa en la clasificación grupal del estado de gravedad del problema dado en [10]. Luego se procede a encontrar los puntos de equilibrio del sistema y su análisis. Para nuestra simulación numérica estimamos todos los parámetros del modelo utilizando el trabajo de investigación [6] y aplicamos el algoritmo de Runge kutta de orden 4. Como resultado y conclusión se determina que el problema con el juego es endémico entre los jóvenes. Además que la prevalencia de problemas con el juego es menor en los estudiantes de 15 a 18 años que en los estudiantes de 11 a 14 años.*

**Palabras clave**. Modelo matemático, número reproductivo, índice de sensibilidad, análisis de estabilidad, juego juvenil.

**1. Introducción.** La tecnología con el paso de los años, ha logrado ocupar un lugar importante en el interior de los hogares. Hoy en día es imposible pasar un día sin el apoyo de un celular o de un computador, estos son instrumentos que nos brindan diversos beneficios, pero que, de usarlo mal, puede afectar la salud de algún integrante de su familia.

Aunque en el país no existen datos certeros para graficar la dimensión del problema, todo indica que tiende a crecer. El Instituto Nacional de Salud Mental (INSM) calcula el 5 % de la población de Lima Metropolitana tiene complicaciones asociadas a la ludopatía [2].

Según la evaluación [3] realizada en 53 colegios de la región Junín; se encontró 13,379 casos de problemas psicosociales entre los cuales destacó la ludopatía, enfermedad patológica que altera progresivamente

\*Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú. ([heydy.carrasco.huaccha@gmail.com](mailto:heydy.carrasco.huaccha@gmail.com)).

†Laboratorio Nacional de Computación Científica, MCTIC, Petrópolis, Brasil. ([frankhaq@lncc.br](mailto:frankhaq@lncc.br)).

el comportamiento de las personas.

Según [5] este es un mal que ha sido detectado en el Perú; afecta en su gran mayoría, a adolescentes y jóvenes entre 11 y 23 años. Esta situación no solo sucede en el Perú sino también en otros países. En las cuales por ejemplo tomaron como medida prohibir que las casas de apuestas estén a menos de 700 metros de un colegio [7]. Según la especialista Ly Guevara Cardeña, psicóloga clínica y docente de la Universidad Autónoma del Perú existen tres factores claves para que una persona se convierta en ludópata: La familia, el paciente y el entorno [5]. Los mismos que serán estudiados durante el tratamiento para combatir este trastorno.

A continuación este trabajo busca analizar la dinámica de juego entre los estudiantes de 11 a 18 años a través del análisis de estabilidad y un número reproductivo básico.

Para tal propósito se introdujo un modelo matemático que represente a este hecho.

La especificación de las clases se basa en la clasificación grupal del estado de gravedad del problema utilizado por Winters [10].

**2. Modelo a estudiar.** Nuestra población se divide en tres clases:

- Juego sin problemas. Denotada por  $N$ , contiene a personas que juegan sin ningún problema o que no juegan.
- Juego de riesgo. Denotada por  $A$ , contiene a personas que tienen síntomas menores de problemas de juego y corren el riesgo de desarrollar un juego excesivo.
- Juego problemático. Denotada por  $P$ , contiene a personas adictas al juego o sufren de juego frecuente o excesivo.

La especificación de las clases se basa en la clasificación grupal del estado de gravedad del problema utilizado por Winters [10] para lo cual se aplica una puntuación SOGS-RA/SOGS.

Hay 12 elementos idénticos en SOGS-RA y SOGS que evalúan la gravedad del problema de juego.

Por ende en el modelo se definen  $N$ ,  $A$  y  $P$  con puntajes de 0 o 1, 2 o 3, y 4 o más, respectivamente, en el SOGS-RA/SOG de 12 ítems.

El modelo tiene como base las siguientes consideraciones:

- Suponemos que no ocurre muerte por el juego, por lo que la población total  $S = N + A + P$  es una constante.
- La clase de juego problemático incluye el juego patológico.
- La tasa de rotación en la población, que es la tasa a la que los individuos entran y salen del sistema, se modela utilizando una tasa per cápita (por individuo)  $\mu$ .
- Todas las tasas de transición son per cápita. Los trastornos del juego ocurren en un continuo.

**2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias del modelo.** La dinámica del modelo, propuesto en el presente trabajo, sigue el flujo del siguiente diagrama de compartimientos.

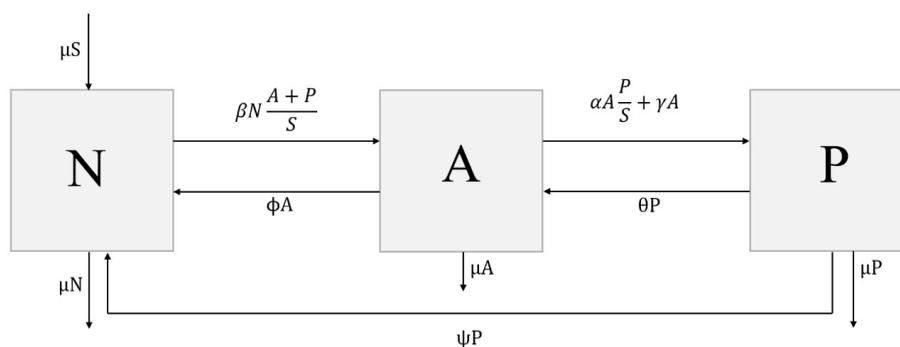


Figura 2.1: Modelo NAP

Con las consideraciones anteriores, la variable de estado del modelo es:

$$X(t) = (N(t), A(t), P(t)). \quad (2.1)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, que representa la dinámica del juego juvenil es:

$$X'(t) = g(t, N(t), A(t), P(t)). \quad (2.2)$$

Donde  $g : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}_3^+ \rightarrow \mathbb{R}_3^+$  es una función continuamente diferenciable. El dominio de  $g$  en  $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}_3^+$  indica las condiciones de no negatividad de cada uno de sus argumentos y los valores de  $g$  representan la razón de cambio de la población en los estados considerados. Lo anterior evidencia la rapidez con la que los individuos entran y salen de un estado a otro a través del tiempo, afectando la población de cada uno de ellos de acuerdo a los siguientes lineamientos:

La razón de cambio de la densidad de la población de Juego sin problemas ( $N$ ) es:

$$\frac{dN}{dt} = \mu S - \beta N \frac{A+P}{S} + \phi A + \psi P - \mu N, \quad (2.3)$$

donde  $\mu$  tasa de rotación en la población,  $\beta$  tasa de presión de grupo; que está directamente relacionada con la proporción de jugadores en riesgo y jugadores con problemas que ya existen entre la población  $(A+P)/S$ ,  $\phi$  tasa de recuperación (cuando un jugador de riesgo se recupera a un jugador sin problemas),  $\psi$  tasa de recuperación (cuando un jugador problemático se recupera a un jugador sin problemas).

La razón de cambio de la densidad de la población de Juego de riesgo ( $A$ ) es:

$$\frac{dA}{dt} = \beta N \frac{A+P}{S} + \theta P - \alpha A \frac{P}{S} - (\gamma + \phi + \mu)A, \quad (2.4)$$

donde  $\beta$  tasa de presión de grupo; que está directamente relacionada con la proporción de jugadores en riesgo y jugadores con problemas que ya existen entre la población  $(A + P)/S$ ,  $\theta$  tasa per cápita constante; el cual indica que al reducir la gravedad del problema de juego; un jugador problemático se recupera a un jugador de riesgo,  $\alpha$  indica la influencia de los compañeros, que está directamente relacionada con la proporción de jugadores con problemas que ya existen entre la población  $P/S$ ,  $\gamma$  factor que indica la neurobiología, la psicología, el juego de los padres y/o patrones de comportamiento delincuente,  $\psi$  tasa de recuperación (cuando un jugador de riesgo se recupera a un jugador sin problemas) y  $\mu$  tasa de rotación en la población.

Finalmente, la razón de cambio de la densidad de la población de Juego problemático ( $P$ ) es:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha A \frac{P}{S} + \gamma A - (\theta + \psi + \mu)P. \quad (2.5)$$

Donde  $\alpha$  indica la influencia de los compañeros, que está directamente relacionada con la proporción de jugadores con problemas que ya existen entre la población  $P/S$ ,  $\gamma$  tasa que indica la neurobiología, la psicología, el juego de los padres y/o patrones de comportamiento delincuente,  $\theta$  tasa per cápita constante; el cual indica que al reducir la gravedad del problema de juego; un jugador problemático se recupera a un jugador de riesgo,  $\psi$  tasa de recuperación (cuando un jugador problemático se recupera a un jugador sin problemas) y  $\mu$  tasa de rotación en la población.

**2.2. Preliminares.** Enunciamos el siguiente teorema para el desarrollo de nuestro trabajo.

**Teorema 2.1. (Linealización de Lyapunov - Poincaré)**

*Un punto crítico de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal de primer orden es asintóticamente estable sí y sólo sí, los valores propios de la matriz jacobiana poseen parte real negativa.*

*Un punto crítico de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden es inestable, sí y sólo sí, la matriz jacobiana del sistema posee al menos un valor propio con parte real positiva.*

**3. Planteamiento del modelo.** Ahora podemos escribir un sistema de tres ecuaciones diferenciales y el modelo de comportamiento de gobierno de la siguiente manera:

Por lo anterior, la función  $g$  describe la dinámica de juego juvenil y de acuerdo al diagrama de la fig. 5.1, se define el siguiente Sistema de Ecuaciones Diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \mu S - \beta N \frac{A+P}{S} + \phi A + \psi P - \mu N, \\ \frac{dA}{dt} = \beta N \frac{A+P}{S} + \theta P - \alpha A \frac{P}{S} - (\gamma + \phi + \mu)A, \\ \frac{dP}{dt} = \alpha A \frac{P}{S} + \gamma A - (\theta + \psi + \mu)P. \end{cases} \quad (3.1)$$

Teniendo en cuenta nuestra población constante, entonces

$$S = N + A + P. \quad (3.2)$$

Y las condiciones iniciales son:

$$\begin{cases} N(0) = N_0, \\ A(0) = A_0, \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Los parámetros cumplen con la condición de no negatividad y fueron obtenidos de estos trabajos [4, 9, 8].

**3.1. Existencia y unicidad de las soluciones.** Para mostrar la existencia y unicidad de las soluciones del sistema, trabajaremos con las funciones  $F_i$  para cada  $i = 1, 2, 3$  definidas por las ecuaciones se cumple lo siguiente:

$$\Omega^0 = \{(N, A, P) \in \mathbb{R}^3 : N > 0, A > 0, P > 0\}.$$

Consideremos  $U = \Omega^0$ , y la función

$$\begin{aligned} U \subseteq \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (N, A, P) &\rightarrow g(t, N, A, P), \end{aligned}$$

donde

$$g(t, N, A, P) = (F_1(N(t), A(t), P(t)), F_2(N(t), A(t), P(t)), F_3(N(t), A(t), P(t))),$$

y  $X(t) = (N(t), A(t), P(t))$ ; así tenemos el siguiente PVI asociado a  $X$  y  $g$ .

$$X'(t) = g(t, X(t)), \quad (3.4)$$

$$X(0) = (N(0), A(0), P(0)), \quad (3.5)$$

con  $N(0) > 0$ ,  $A(0) > 0$  y  $P(0) > 0$ . Notamos que el PVI es equivalente al sistema (3.1).

Para la función  $g$  notamos que:

$$\frac{\partial}{\partial N} F_1(N, A, P) = -\beta(A + P) - \mu, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial A} F_1(N, A, P) = -\beta N + \phi, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial P} F_1(N, A, P) = -\beta N + \psi, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial N} F_2(N, A, P) = \beta(A + P), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial A} F_2(N, A, P) = \beta N - \alpha P - \omega, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial P} F_2(N, A, P) = \beta N + \theta - \alpha A, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial N} F_3(N, A, P) = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial A} F_3(N, A, P) = \alpha P + \gamma, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial P} F_3(N, A, P) = \alpha A - \kappa. \quad (3.14)$$

Es decir para todo  $X = (N, A, P) \in U$  existen derivadas parciales  $\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(X)$  con  $1 \leq i, j \leq 3$  los cuales son continuas en  $U$  por lo tanto  $g$  es de clase  $C^1$  en las variables espaciales  $(N, A, P)$  y por ende es localmente Lipschitz.

También notamos:

$$\begin{aligned}
 F_1(0, A_0, P_0) &= \mu(A_0 + P_0) + \phi A_0 + \psi P_0 \geq 0 \quad \text{donde } A_0 > 0, P_0 > 0, \\
 F_2(N_0, 0, P_0) &= \beta N_0 \frac{P_0}{N_0 + P_0} + \theta P_0 \geq 0 \quad \text{donde } N_0 > 0, P_0 > 0, \\
 F_3(N_0, A_0, 0) &= \gamma A_0 \geq 0 \quad \text{donde } N_0 > 0, A_0 > 0.
 \end{aligned}$$

Luego por teorema existe una única solución del PVI en algún intervalo  $[0, T >]$ .

**4. Dinámica del modelo.** Para reescalar el sistema (3.2) de modo que el modelo sea independiente del tamaño de la población  $S$ , elegimos las variables adimensionales  $N = nS$ ,  $A = aS$  y  $P = pS$  y obtenemos el modelo:

$$n' = \mu - \beta n(a + p) + \phi a + \psi p - \mu n, \quad (4.1)$$

$$a' = \beta n(a + p) + \theta p - \alpha a p - (\gamma + \phi + \mu)a, \quad (4.2)$$

$$p' = \alpha a p + \gamma a - (\theta + \psi + \mu)p, \quad (4.3)$$

$$1 = n + a + p. \quad (4.4)$$

Para facilidad de manejo de datos se reemplaza nuevamente  $n = N$ ,  $a = A$  y  $p = P$  quedando del siguiente modo:

$$N' = \mu - \beta N(A + P) + \phi A + \psi P - \mu N, \quad (4.5)$$

$$A' = \beta N(A + P) + \theta P - \alpha A P - (\gamma + \phi + \mu)A, \quad (4.6)$$

$$P' = \alpha A P + \gamma A - (\theta + \psi + \mu)P, \quad (4.7)$$

$$1 = N + A + P. \quad (4.8)$$

Para simplificar estas expresiones, denotamos las tasas de todos los flujos de salida de  $A$  y  $P$  por  $\omega$  y  $\sigma$ , respectivamente:

$$\omega = \gamma + \phi + \mu, \quad \kappa = \theta + \psi + \mu. \quad (4.9)$$

**4.1. Matriz Jacobiana.** En esta sección se linealizará el sistema (2.2) de tal forma que, para puntos cercanos a un punto de equilibrio se pueda aproximar a un sistema lineal.

Sean:

$$F_1(N, A, P) = \mu - \beta N(A + P) + \phi A + \psi P - \mu N,$$

$$F_2(N, A, P) = \beta N(A + P) + \theta P - \alpha A P - (\gamma + \phi + \mu)A,$$

$$F_3(N, A, P) = \alpha A P + \gamma A - (\theta + \psi + \mu)P.$$

Usamos las derivadas parciales dadas en (3.6)-(3.14).

Por lo tanto, el sistema queda definido por la siguiente matriz jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix}
 -\beta(A + P) - \mu & -\beta N + \phi & -\beta N + \psi \\
 \beta(A + P) & \beta N - \alpha P - \omega & \beta N + \theta - \alpha A \\
 0 & \alpha P + \gamma & \alpha A - \kappa
 \end{pmatrix}.$$

Hallando el polinomio característico:

$$P(\lambda) = \det(J - \lambda I) = 0.$$

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix}
 -\beta(A + P) - \mu - \lambda & -\beta N + \phi & -\beta N + \psi \\
 \beta(A + P) & \beta N - \alpha P - \omega - \lambda & \beta N + \theta - \alpha A \\
 0 & \alpha P + \gamma & \alpha A - \kappa - \lambda
 \end{pmatrix}.$$

**4.2. Puntos de equilibrio y estabilidad.** En esta sección del capítulo se determinarán los puntos de equilibrio del sistema con el fin de asegurar que las clases consideradas en el modelo coexistan en equilibrio. Se analizarán aquellos que tengan sentido y que se cumplan las condiciones de no negatividad naturales en las poblaciones de individuos.

$$\mu - \beta N(A + P) + \phi A + \psi P - \mu N = 0, \quad (4.10)$$

$$\beta N(A + P) + \theta P - \alpha A p - \omega A = 0, \quad (4.11)$$

$$\alpha AP + \gamma A - \kappa P = 0. \quad (4.12)$$

Considerando  $\phi = 0$  debido a que no se considerara la influencia de los compañeros para que un jugador de riesgo pase a pertenecer a jugador problemático.

Por (4.12):

$$\gamma A - \kappa P = 0.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \gamma A &= \kappa P, \\ \frac{A}{P} &= \frac{\kappa}{\gamma} = m^*. \end{aligned}$$

Donde  $m^*$  es no negativo; debido a que  $\kappa$  y  $\gamma$  son no negativos, por lo tanto:

$$A = m^* P. \quad (4.13)$$

Por (4.11):

$$\begin{aligned} \beta N(A + P) + \theta P - \omega A &= 0, \\ \beta N(A + P) &= \omega A - \theta P, \\ \beta N(m^* P + P) &= \omega m^* P - \theta P, \\ \beta NP(m^* + 1) &= P(\omega m^* - \theta). \end{aligned}$$

$$N = \frac{\omega m^* - \theta}{\beta(m^* + 1)}. \quad (4.14)$$

Entonces

$$(N, A, P) = \left( \frac{\omega m^* - \theta}{\beta(m^* + 1)}, m^* P, P \right), \quad (4.15)$$

$$(N, A, P) = \frac{\omega m^* - \theta}{\beta(m^* + 1)} (1, 0, 0) + P(0, m^*, 1). \quad (4.16)$$

Definamos  $P = 0$ . Por ende (4.15) quedará del siguiente modo:

$$(N, A, P) = \frac{\omega m^* - \theta}{\beta(m^* + 1)} (1, 0, 0) + 0(0, m^*, 1), \quad (4.17)$$

$$(N, A, P) = \frac{\omega m^* - \theta}{\beta(m^* + 1)} (1, 0, 0). \quad (4.18)$$

Entonces el punto de equilibrio es:

$$P_1 = (N, A, P) = (1, 0, 0).$$

El punto de equilibrio  $P_1$  indica el momento en que toda la población se encuentra en la clase de Juego sin problemas.

Ahora bien, desde un interés netamente matemático se analizará la estabilidad en  $P_1$ .

La matriz jacobiana evaluada en  $P_1$ :

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} -\mu - \lambda & -\beta + \phi & -\beta + \psi \\ 0 & \beta - \omega - \lambda & \beta + \theta \\ 0 & \gamma & -\kappa - \lambda \end{pmatrix},$$

$$P(\lambda) = (-\mu - \lambda) \begin{pmatrix} \beta - \omega - \lambda & \beta + \theta \\ \gamma & -\kappa - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$P(\lambda) = (-\mu - \lambda) [(\beta - \omega - \lambda)(-\kappa - \lambda) - \gamma(\beta + \theta)] = 0,$$

$$P(\lambda) = (-\mu - \lambda) [(\lambda + \omega - \beta)(\lambda + \kappa) - \gamma(\beta + \theta)] = 0,$$

$$P(\lambda) = (-\mu - \lambda) [\lambda^2 + \lambda(\kappa - \beta + \omega) + \omega\kappa - \beta\kappa - \theta\gamma - \beta\gamma] = 0.$$

Valores propios de  $P(\lambda)$ :

$$\lambda_{1,2} = -(\kappa + \omega - \beta) \pm \sqrt{(\kappa - \beta + \omega)^2 - 4(1)(\omega\kappa - \beta\kappa - \theta\gamma - \beta\gamma)},$$

$$\lambda_3 = -\mu.$$

Analizaremos:  $\sqrt{b^2 - 4ac}$

$$= (\kappa - \beta + \omega)^2 - 4(1)(\omega\kappa - \beta\kappa - \theta\gamma - \beta\gamma),$$

$$= (\kappa - \beta - \omega)^2 + 4\theta + 4\gamma.$$

Por ende los valores propios de  $P(\lambda)$  quedan del siguiente modo:

$$\lambda_{1,2} = -(\kappa + \omega - \beta) \pm \sqrt{(\kappa - \beta - \omega)^2 + 4\theta + 4\gamma},$$

$$\lambda_3 = -\mu.$$

Para los autovalores propios de  $\lambda_{1,2}$  consideraremos 2 casos:

**Primer Caso:**  $\kappa + \omega > \beta$  entonces  $\kappa + \omega - \beta > 0$ .

Sabemos que :

$$\kappa + \omega > \kappa - \omega,$$

$$\kappa + \omega - \beta > \kappa - \omega - \beta,$$

$$(\kappa + \omega - \beta)^2 > (\kappa - \omega - \beta)^2.$$

Considerando que  $4\theta + 4\gamma$  son valores muy pequeños (tienden a 0) debido a que toda la población se encuentra en la clase  $N$  (Juego sin problemas) (A.1).

$$(\kappa + \omega - \beta)^2 > (\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma,$$

$$(\kappa + \omega - \beta) > \sqrt{(\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma},$$

$$0 > -(\kappa + \omega - \beta) + \sqrt{(\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma}.$$

Entonces nuestros autovalores quedan del siguiente modo:

$$\lambda_1 = -(\kappa + \omega - \beta) + \sqrt{(\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma} < 0,$$

$$\lambda_2 = -(\kappa + \omega - \beta) - \sqrt{(\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma} < 0,$$

$$\lambda_3 = -\mu < 0.$$

Como se puede observar, los valores propios  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  asociados a  $P(\lambda)$  son reales negativos. Por el teorema de Lyapunov el punto de equilibrio  $P(\lambda)$  es estable.

**Segundo Caso:**  $\kappa + \omega < \beta$  entonces  $\kappa + \omega - \beta < 0$ .

Análogamente del caso anterior y con la consideración antes mencionada (A.1) se cumple que:

$$\begin{aligned}(\kappa + \omega - \beta)^2 &> (\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma, \\(\kappa + \omega - \beta) &> \sqrt{(\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma}, \\-(\kappa + \omega - \beta) &< -\sqrt{(\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma}, \\-(\kappa + \omega - \beta) - (\kappa + \omega - \beta) &< -\sqrt{(\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma} - (\kappa + \omega - \beta), \\-2(\kappa + \omega - \beta) &< -\sqrt{(\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma} - (\kappa + \omega - \beta).\end{aligned}$$

Por pertenecer al segundo caso se cumple.:

$$\begin{aligned}\kappa + \omega - \beta &< 0, \\2(\kappa + \omega - \beta) &< 2(0), \\-2(\kappa + \omega - \beta) &> 0.\end{aligned}$$

Por lo cual el caso anterior se queda del siguiente modo:

$$\begin{aligned}0 &< -2(\kappa + \omega - \beta) < -\sqrt{(\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma} - (\kappa + \omega - \beta), \\0 &< -\sqrt{(\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma} - (\kappa + \omega - \beta).\end{aligned}$$

Entonces nuestros autovalores quedan del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -(\kappa + \omega - \beta) + \sqrt{(\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma} > 0, \\ \lambda_2 &= -(\kappa + \omega - \beta) - \sqrt{(\kappa - \omega - \beta)^2 + 4\theta + 4\gamma} > 0, \\ \lambda_3 &= -\mu < 0.\end{aligned}$$

Como se puede observar, los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  tienen con parte real positiva y  $\lambda_3$  es real negativo asociados a  $P(\lambda)$  son reales negativos. Por el teorema (2.1) de Lyapunov el punto crítico  $P(\lambda)$  es inestable.

Se concluye entonces que el punto de equilibrio (1,0,0) es estable cuando  $\kappa + \omega > \beta$ .

**5. Modelado computacional.** En esta sección mostramos los resultados de las simulaciones numéricas que realizamos.

Para el PVI (3.4) definimos el método de Runge-Kutta de cuarto orden mediante el siguiente esquema:

$$\begin{aligned}w_0 &= w(0), \\ K_1 &= hF(t_i, w_i), \\ K_2 &= hF(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}K_1), \\ K_3 &= hF(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}K_2), \\ K_4 &= hF(t_i + \frac{h}{2}, w_i + K_3), \\ t_{i+1} &= t_i + h.\end{aligned}$$

Para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Para el análisis de este modelo usaremos Matlab y el método de Runge Kutta de 4to Orden.

**5.1. Escenarios .** Para la simulación numérica, necesitamos estimar valores para los parámetros del modelo.

Usaremos el estudio de Ochoa realizado en la I.E Sagrado Corazón de Jesús Chota-2014 [6].El cual toma como muestra a 262 estudiantes. Se utilizó el Cuestionario de juego patológico de South Oaks (SOGS) Lesieur y Blume [1] y una Ficha de recolección de datos.

El cuestionario constó de 13 preguntas, de las cuales: Del ítem 1 al 3 eran datos personales y del ítem 4 al 13 eran preguntas concretas que estaban dirigidas a determinar la predisposición a la Ludopatía.

Cabe indicar que este trabajo describe a través de la simulación la gravedad de los problemas de juego juvenil basándose en la información obtenida por [6].

A continuación veremos 2 casos e interpretaremos las soluciones del modelo.

### 5.1.1. Estudiantes de 11 a 14 años..

Ahora usaremos los siguientes parámetros:  
 $\mu = 0,189$  ,  $\beta = 0,412$  ,  $\phi = 0,093$  ,  $\psi = 0,042$  ,  $\theta = 0,052$  ,  $\alpha = 0,019$  ,  $\gamma = 0,04$  y la condición inicial  $N(0) = 100$ ,  $A(0) = 0$  y  $P(0) = 43$ .

El resultado es el siguiente:

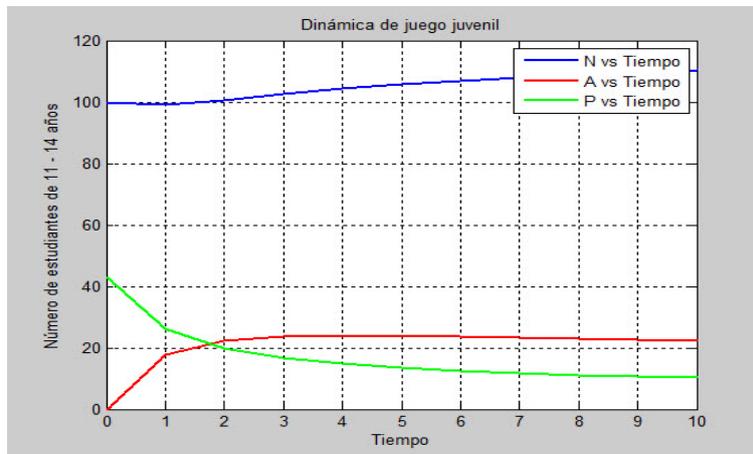


Figura 5.1: Predisposición a la ludopatía de los adolescentes de la I.E "Sagrado Corazón de Jesús", Chota-2014.

Usando los datos  $(N, A, P) = (100, 0, 43)$  como condición inicial y los valores de los parámetros para estudiantes de 11 a 14 años; de la figura 5.1 se desprende claramente que el número de jugadores en riesgo aumentó considerablemente, de acuerdo con los datos reportados por el estudio [6].

También se observa que se disminuye el número de jugadores con problema para luego pasar a ser prevalente. Se observa que la cantidad de estudiantes con riesgo y con problema de juego serán iguales cuando los estudiantes se encuentren en el intervalo de 11 a 12 años. Se estima que al pasar los años la clase de estudiantes sin problemas tendrá un ligero crecimiento.

### 5.1.2. Estudiantes de 15 a 18 años.

Para este caso usaremos los siguientes parámetros:  
 $\mu = 0,571$  ,  $\beta = 0,953$  ,  $\phi = 0,266$  ,  $\psi = 0$  ,  $\theta = 0,143$  ,  $\alpha = 1,88$  ,  $\gamma = 0,18$  y la condición inicial  $N(0) = 84$ ,  $A(0) = 0$  y  $P(0) = 35$ .

El resultado es el siguiente:

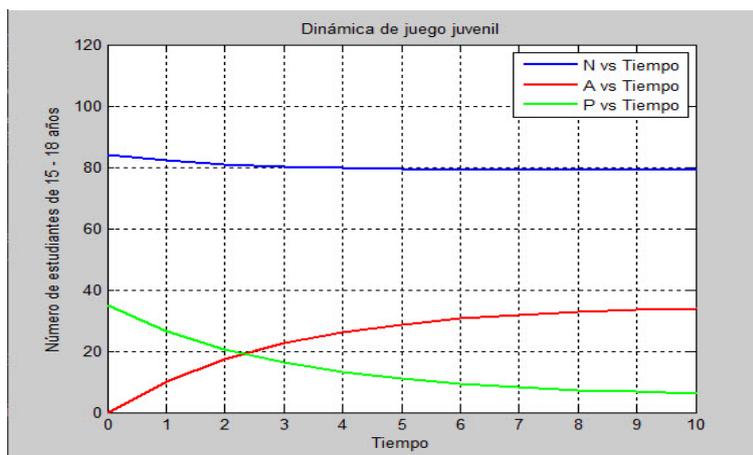


Figura 5.2: Predisposición a la ludopatía de los adolescentes de la I.E "Sagrado Corazón de Jesús", Chota-2014.

Mostramos las simulaciones numéricas utilizando los valores de los parámetros para adolescentes y

la condición inicial  $(N, A, P) = (84, 0, 35)$ , de la figura 5.2 se desprende claramente que el número de jugadores en riesgo aumentó considerablemente, para este caso usamos también los datos del estudio [6].

Se observa un comportamiento similar al caso anterior. Se observa que la cantidad de estudiantes con riesgo y con problema de juego serán iguales cuando los estudiantes se encuentre en el intervalo de 17 a 18 años. Se estima que al pasar los años la clase de estudiantes sin problemas tendrá un ligero decrecimiento.

Si realizamos un cálculo de  $R_0$  para ambos casos este nos resulta mayor a la unidad y considerando que en nuestro modelo  $\alpha = 0$  se concluye que solo hay un equilibrio endémico; es decir, cualquier solución que comience lo suficientemente cerca del punto de equilibrio endémico se acerca a ella, aunque no pudimos confirmar esto analíticamente.

Por ende los dos casos antes mencionados nos dicen que el problema con el juego es frecuente entre los estudiantes pero irá decreciendo para luego ser prevalente. Caso contrario a la clase de juego de Riesgo que crecerá y luego será prevalente.

## 6. Conclusiones.

De este trabajo podemos obtener las siguientes conclusiones:

- El juego de riesgo y el juego problemático son endémicos entre los estudiantes.
- La prevalencia de problemas de juego entre los estudiantes es estable al pasar un determinado tiempo.
- La prevalencia del juego problemático entre los estudiantes de 11 a 14 años es menor que la de 15 a 18 años, lo que nos indica que es más común de que el juego problemático sea más frecuente entre los estudiantes de 11 a 14 años.
- El juego de riesgo entre los estudiantes ha aumentado.
- La clase de juego sin riesgo se incrementa cuando los estudiantes son más jóvenes (11 a 14 años) caso contrario en el otro rango de 15 a 18 años.

Se concluye también que durante la educación escolar se debe incorporar estrategias de prevención y control para el juego.

## ORCID and License

Heydy Mayumy Carrasco Huaccha <https://orcid.org/0000-0002-0279-4962>

Frank Henry Acasiete Quispe <https://orcid.org/0000-0002-3380-3606>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

## Referencias

- [1] Echeburua E. Cuestionario de Juego Patológico de South Oaks (SOGS): validación española[Internet]. Análisis y Modificación de conducta. 1994; 20(1):769-791. Recuperado de [researchgate.net/publication/234736399](https://researchgate.net/publication/234736399).
- [2] Guzman I. Alarma por el crecimiento de ludopatías en el país[Internet]. Periódico Correo. may 2015 [accesado el 31 may 2015]. Disponible en: [diariocorreo.pe/peru/alarma-por-el-crecimiento-de-ludopatas-en-el-pais-607437](https://diariocorreo.pe/peru/alarma-por-el-crecimiento-de-ludopatas-en-el-pais-607437).
- [3] Janampa E. Juegos en red atrapan a más de 13 mil menores en la región incrementando la ludopatía[Internet]. Periódico Correo. may 2019. [accesado el 31 may 2019]. Disponible en: [n9.cl/fmdb](https://n9.cl/fmdb).
- [4] Langhinrichsen-Rohling J, Rohde P, Seeley JR. Individual, family, and peer correlates of adolescent gambling. J. of Gambling Studies. 2004; 20(1):23-46.
- [5] Mendoza R. Ludopatía digital: trastorno que pone en peligro a los más pequeños del hogar[Internet].[periódico Correo]. 2018 [accesado el 25 ene 2018]. Disponible en: [diariocorreo.pe/tecnologia/ludopatia-digital-trastorno-peligro-pequenos-hogar-799621/](https://diariocorreo.pe/tecnologia/ludopatia-digital-trastorno-peligro-pequenos-hogar-799621/).
- [6] Ochoa, UE. Predisposición a la ludopatía y su relación con el rendimiento académico de los adolescentes de la I.E Sagrado corazón de Jesús Chota[Tesis de Licenciatura]. Programa de enfermería, Universidad Nacional de Cajamarca. 2014.
- [7] Pardo I. Jóvenes ludopatías[Internet]. Radio València, 2019: [Accesado ] 20/12/2019]. Disponible en [cadenaser.com/emisora/2019/12/20/radio\\_valencia/1576869148\\_888753.html](https://cadenaser.com/emisora/2019/12/20/radio_valencia/1576869148_888753.html).
- [8] Shaffer HJ, Korn DA. Gambling and related mental disorders: a public health analysis. Annu. Rev. Publ. Health. 2002; 23:171-212.
- [9] Tae S, Young S. A Differential Equation Model for the Dynamics of Youth Gambling. Osong Public Health Res Perspect. 2014; 5(4):233-241.
- [10] Winters KC, Stinchfield RD, Botzet A. Pathways of youth gambling problem severity. Psychology of Addictive Behaviors. 2005; 19(1):104-107.
- [11] Winters KC, Stinchfield RD, Botzet A. A prospective study of youth gambling behaviors. Psychology of Addictive Behaviors. 2002; 16(1):3-9.

### Apéndice A. Algunos conceptos básicos.

Mostramos los siguientes resultados que son usados en el desarrollo de nuestro trabajo.

Solo hay un posible estado final para este modelo, el equilibrio libre del problema de juego  $(n, a, p) = (1, 0, 0)$ , cuál es el estado más deseable. Si las personas abandonan el grupo de edad más rápido de lo que se convierten en jugadores en riesgo, no surgirá ningún problema de juego en la población. Establecemos esto matemáticamente en la siguiente proposición y en los siguientes resultados y sus pruebas dados en [10].

**Proposición A.1.** *Si  $\beta < \mu$ , el equilibrio libre del problema de juego es globalmente estable, es decir, todas las soluciones se aproximan  $(1,0,0)$ .*

*Demostración:* Definimos la función de Lyapunov  $V = a + p$  y denotamos  $(1,0,0)$  por  $x^*$ . Entonces  $V(x^*) = 0$  y  $V(\vec{x} > 0)$  para todos  $V(\vec{x} \neq x^*)$ . Queda por demostrar que  $dV/dt < 0$  para  $\beta < \mu$ .

$$V' = a' + p' = \beta n(a + p) - (\eta + \mu)a - (\psi + \mu)p \leq \beta(a + p) - \mu(a + p),$$

que es negativo si  $\beta < \mu$ .

Esto implica que las mejores estrategias que controlan el juego problemático reducen  $\beta$  a este nivel. Aunque  $\beta < \mu$  es demasiado ambicioso para lograrlo, mostramos más tarde que reducir  $\beta$  sigue siendo la mejor estrategia para reducir la prevalencia de juego de riesgo y problemas de juego.  $\square$

Procedemos a encontrar el número reproductivo básico,  $R_0$ . En modelos epidemiológicos,  $R_0$  se interpreta como el número promedio de casos secundarios causados por un individuo infectado típico.

Por lo tanto, la enfermedad se propaga si  $R_0 > 1$  y se extingue si  $R_0 < 1$ . Un término sociológico para esto es el punto de inflexión, que es el punto en el que un sistema estable cambia a uno inestable o viceversa, que es una condición umbral.

**Proposición A.2.** *El número reproductivo básico es*

$$R_0 = \frac{\beta(\theta + \psi + \mu) + \beta\gamma + \gamma\theta}{(\gamma + \eta + \mu)(\theta + \psi + \mu)}.$$

*Si  $R_0 < 1$ , el equilibrio del juego libre es localmente asintóticamente estable, es decir, soluciones que comienzan un enfoque lo suficientemente cercano  $(1,0,0)$ .*

*Demostración:* El jacobiano de  $n, a$  y  $p$  evaluado en el equilibrio libre del problema de juego  $(1,0,0)$  es

$$J = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta + \eta & -\beta + \psi \\ 0 & \beta - (\gamma + \eta + \mu) & \beta + \theta \\ 0 & \gamma & -(\theta + \psi + \mu) \end{pmatrix}.$$

Usamos las anotaciones  $\omega$  and  $\kappa$  definido en (5). Todos los valores propios son negativos si  $\beta - \omega - \kappa$  y

$$(\beta - \omega)(-\kappa) - (\gamma)(\beta + \theta) > 0. \quad (\text{A.1})$$

Tenga en cuenta que si la desigualdad (A.1) se cumple,  $\beta - \omega - \kappa < 0$ . Por lo tanto, definimos

$$R_0 = \frac{\beta\kappa + \beta\gamma + \gamma\theta}{\omega\kappa}. \quad (\text{A.2})$$

Tenga en cuenta que si  $R_0 < 1$ , la desigualdad (A.1) se cumple, lo que completa la prueba.

Para interpretar el punto de inflexión  $R_0$ , reescribimos (A.2) como

$$R_0 = \frac{\beta}{\omega} + \frac{\beta}{\omega} \frac{\gamma}{\kappa} + \frac{\gamma}{\kappa} \frac{\theta}{\omega}.$$

El primer término,  $\beta/\omega$ , expresa la noción de que los individuos ingresan a la clase A a una tasa de  $\beta$  y se van después de un tiempo promedio de  $1/\omega$ . El segundo término,  $(\beta/\omega)(\gamma/\kappa)$ , es la proporción de individuos en riesgo que se convierten en jugadores problemáticos.

Finalmente,  $(\gamma/\kappa)(\theta/\omega)$  es la proporción de jugadores con problemas que regresan a la clase de juego en riesgo. Por lo tanto, si la suma de estas cantidades es inferior a 1, el juego en riesgo y el juego problemático se controlarán siempre que no haya una entrada repentina y enorme de jugadores en riesgo y jugadores

problemáticos en la población, es decir, la población es Localmente estable. Ahora discutimos si tenemos un equilibrio endémico si  $R_0 > 1$ .  $\square$

Tenga en cuenta que  $R_0$  es independiente de  $\alpha$ , por lo que investigamos el papel de  $\beta$  en lo siguiente.

**Proposición A.3.**

Si  $R_0 > 1$ , tenemos uno o tres equilibrios endémicos. Si  $R_0 < 1$ , tenemos ninguno o dos equilibrios endémicos. Si  $\alpha = 0$ , es decir, los jugadores en riesgo se convierten en jugadores problemáticos solo por razones distintas a la presión de grupo, solo hay un equilibrio endémico si  $R_0 > 1$ , y ninguno de lo contrario. Múltiples equilibrios endémicos, si los hay, solo existen para un  $\alpha$  limitado positivo. Demostración: Usamos (4.8) para reemplazar  $N$  por  $N = 1 - A - P$ . Resolvemos el valor de equilibrio  $P^*$  en la ecuación (4.7) para obtener

$$P^* = \frac{\gamma A}{\kappa - \alpha A}. \quad (\text{A.3})$$

Sustituir esto en la ecuación (4.6) para expresar un  $A'$  términos de  $A$ :

$$A' = \beta \left( 1 - A + \frac{\gamma A}{\alpha A - \kappa} \right) \left( A - \frac{\gamma A}{\alpha A - \kappa} \right) - \frac{\theta \gamma A}{\alpha A - \kappa} + \frac{\alpha A^2 \gamma}{\alpha A - \kappa} - \omega A. \quad (\text{A.4})$$

Multiplicando esta ecuación por  $(\alpha A - \kappa)^2/A$ , obtenemos que  $A'$  es un polinomio cúbico de  $A$ :

$$\begin{aligned} f(A) &= c_3 A^3 + c_2 A^2 + c_1 A + c_0, \text{ donde} \\ c_3 &= -\beta \alpha^2, \\ c_2 &= \alpha(\beta(\alpha + 2\kappa + 2\gamma) + \alpha(\gamma - \omega)), \\ c_1 &= 2\alpha\kappa(-\beta + \omega) - \beta(\alpha\gamma + \kappa^2 + 2\kappa\gamma + \gamma^2) - \gamma\alpha(\theta + \kappa), \\ c_0 &= \kappa^2(\beta - \omega) + \kappa\gamma(\beta + \theta). \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que el término constante  $c_0$  es positivo si  $R_0 > 1$ , y  $c_3$  siempre es negativo, por lo que las gráficas de  $f$  disminuyen a medida que aumenta. Como  $P^*$  debería ser positivo, se requiere  $\kappa - \alpha A > 0$  (A.3), lo que implica que  $a < \kappa/\alpha$ , por lo que evaluamos  $f$  en  $\kappa/\alpha$  y obtenemos un valor negativo,

$$f\left(\frac{\kappa}{\alpha}\right) = -\frac{\kappa\beta\gamma^2}{\alpha}. \quad (\text{A.5})$$

Con la continuidad de  $f$ ,  $f(0) = c_0 > 0$ ,  $f(\kappa/\alpha) < 0$  y  $c_3 < 0$ , el análisis gráfico indica la existencia de al menos uno o tres equilibrios endémicos si  $R_0 > 1$ . Sin embargo, si  $R_0 < 1$ , luego  $f(0) < 0$  y las gráficas posibles muestran que no tenemos ninguno o dos equilibrios endémicos.

Suponga que  $\alpha = 0$  y después de sustituir en la ecuación (A.4), multiplicar por  $-\kappa$  y dividir por  $A$ . Entonces obtenemos una función lineal,

$$A' = g(A) = -\beta(\kappa^2 + 2\kappa\gamma + \gamma^2)A + d_0. \quad (\text{A.6})$$

Donde

$$d_0 = \kappa(\gamma\beta + \beta\kappa + \gamma\theta - \kappa\omega). \quad (\text{A.7})$$

La pendiente de  $g$  siempre es negativa y

$$g(0) = d_0 > 0 \Leftrightarrow R_0 > 1. \quad (\text{A.8})$$

Por lo tanto, si los jugadores en riesgo se convierten en jugadores problemáticos debido a factores distintos de los jugadores problemáticos, entonces solo hay un equilibrio endémico si  $R_0 > 1$ , y ninguno de otro modo.

Suponga que  $\alpha$  es arbitrariamente grande. Entonces vemos que  $P^* = 0$  de (A.3), lo que implica que  $A^* = 0$ , como se ve en la ecuación (4.6), y por lo tanto no existe una solución de equilibrio endémico. Por lo tanto, no existen equilibrios endémicos si  $\alpha$  es arbitrariamente grande.  $\square$