






**Cálculo del aparato de Frenet Serret de curvas dadas por la intersección de dos Superficies Implícitas en  $\mathbb{R}^3$  utilizando el software Wolfram Mathematica v.11.2.**

**Calculation of the Frenet Serret apparatus of curves given by the intersection of two Implicit Surfaces in  $\mathbb{R}^3$  using Wolfram Mathematica v.11.2 software.**

Graciela Burgos N.\* , Judith Jiménez V.† , and Yecsy Ascate R.‡ 

Received, Jul. 22, 2019

Accepted, Set. 20, 2019



**How to cite this article:**

Burgos G., et. al. *Cálculo del aparato de Frenet Serret de curvas dadas por la intersección de dos Superficies Implícitas en  $\mathbb{R}^3$  utilizando el software Wolfram Mathematica v.11.2.* Selecciones Matemáticas. 2019; 6(2):338-347. <http://dx.doi.org/10.17268/SEL.MAT.2019.02.20>

**Resumen**

La mayoría de los textos de Geometría Diferencial elemental aborda el estudio del aparato de Frenet-Serret de curvas espaciales a partir de una parametrización de las mismas. Sin embargo, es posible calcular el aparato de Frenet-Serret de curvas espaciales dadas como la intersección de dos superficies expresadas en forma cartesiana. En este trabajo se presenta el nuevo paquete, FSApparatus, codificado en el lenguaje del software científico Mathematica v. 11.2. Las salidas obtenidas son enteramente compatibles con los comandos propios del Mathematica. Este paquete podría constituirse en una herramienta en el proceso de enseñanza aprendizaje del curso geometría diferencial de pre-grado.

**Palabras clave.** Aparato de Frenet Serret, curvas espaciales, intersección de superficies.

**Abstract**

Most elementary Differential Geometry texts address the study of Frenet-Serret apparatus of spatial curves from a parameterization thereof. However, it is possible to calculate the Frenet-Serret apparatus of given spatial curves as the intersection of two surfaces expressed in Cartesian form. In this work the new package, FSApparatus, coded in the language of the scientific software is presented Mathematica v. 11.2. The outputs obtained are entirely compatible with the own commands of Mathematica. This package could become a tool in the process of Teaching course learning differential geometry of undergraduate.

**Keywords.** Frenet Serret apparatus, space curves, surface intersection.

**1. Introducción.** La obtención del aparato de Frenet-Serret de curvas espaciales dadas como la intersección de dos superficies ha sido completamente estudiado en un primer artículo [6], el artículo presenta algoritmos para calcular las propiedades de la geometría diferencial de las curvas resultantes de la intersección de dos superficies donde las ecuaciones de las superficies pueden estar expresadas en forma paramétrica-paramétrica, implícita-implícita y paramétrico-implícita. En el artículo [5] considerado como una continuación de Ye y Maekawa [6] nos presenta algoritmos para calcular las propiedades de geometría diferencial de los aparatos Frenet y derivadas de orden superior de las curvas de intersección de superficies implícitas y paramétricas en  $\mathbb{R}^3$  para obtener una clasificación de las

\*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Piura, Urb. Miraflores S/N, Castilla, Piura-Perú. (gburgosn@unp.edu.pe).

†Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Piura, Urb. Miraflores S/N, Castilla, Piura-Perú. (jjimenezv@unp.edu.pe).

‡Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Piura, Urb. Miraflores S/N, Castilla, Piura-Perú. (yecsigabriela@hotmail.com).

singularidades en la curva de intersección.

En ambos artículos de investigación no utilizan el Software Científico Mathematica, sin embargo en este trabajo se presenta el nuevo paquete, FSAParatus, codificado en el lenguaje del Software Científico Mathematica v.11.2. Esto se consigue empleando los paradigmas de las programaciones funcional, gráfica y basada en reglas propias del Mathematica. De esta manera se aprovechan, en algunos casos, los comandos incorporados en el Mathematica para crear nuevos comandos que permitan obtener los resultados esperados. En otros casos el lenguaje simbólico es de suma importancia para implementar nuevos comandos que se basan en las fórmulas directas del objeto a estudiar. Las salidas obtenidas son enteramente compatibles con los comandos propios del Mathematica. Este paquete podría constituirse en una herramienta en el proceso de enseñanza y aprendizaje del curso de geometría de pre-grado [?, 4].

**2. Preliminares.** Una superficie  $S$  en el sistema de coordenadas  $OXYZ$  tiene la ecuación.

$$(2.1) \quad S : F(x, y, z) = 0$$

Se cumple la siguiente condición: el punto  $M(x, y, z) \in S$  si y solo si sus coordenadas  $x, y, z$  satisfacen la ecuación (2.1). Si en particular  $F(x, y, z) = f(x, y) - z$  entonces (2.1) puede ser escrita de la forma:  $S : z = f(x, y)$ . En este caso  $S$  coincide con la gráfica de la función de dos variables  $f(x, y)$ .

**Una curva  $C$  en el espacio.** Se define, en el caso general como la intersección de ciertas superficies  $S_1$  y  $S_2$  (definidas de manera no unívoca) es decir, prefijando un sistema de dos ecuaciones.

$$C : \begin{cases} S_1 : F_1(x, y, z) = 0 \\ S_2 : F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

*Ejemplo.*

1. Investigar la forma de la curva  $C$  y la forma de su proyección sobre el plano  $OXY$ , dada por las ecuaciones:

$$(2.2) \quad C : \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

*Solución:* La intersección de las superficies es  $C = S_1 \cap S_2$ , dadas por la gráfica.

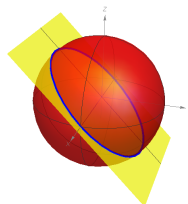


FIGURA 2.1. Intersección de las dos superficies

La proyección de  $C$  sobre el plano  $OXY$  es una elipse, se obtiene eliminando  $z$  del sistema (2.2),  $C' : \frac{(x-1)^2}{36} + \frac{y^2}{18} = 1$

**Función Vectorial de una variable real.** es una función cuyo dominio es un subconjunto de números reales y el rango es un conjunto de vectores del espacio, es decir:

$$T : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V \\ t \rightarrow \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

donde  $x = x(t); y = y(t); z = z(t)$  son funciones reales de variable real  $t$ , llamadas **funciones coordenadas de  $T$** .

**Representación gráfica de una función vectorial.** Para  $\forall t \in I$  se obtiene un vector  $\vec{r}(t)$ , que es el vector posición del punto  $\vec{P} = (x(t), y(t), z(t))$ . Si la función vectorial es continua en  $I$ , es decir sus funciones componentes  $x, y, z$  son continuas en  $I$ , define una curva  $C$  en el espacio formada por las coordenadas del vector  $\vec{r}(t)$ .

**Interpretación geométrica de la derivada de una función vectorial.** Supongamos que  $\vec{r}(t)$  sea el vector posición del punto  $\vec{P}$ , entonces la derivada  $\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$  es el vector tangente a la curva  $C$  en el punto  $\vec{P}$ , siempre que  $\vec{r}'(t)$  existe y  $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ . Se escribe como  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$ , de igual manera  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left( \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right)$

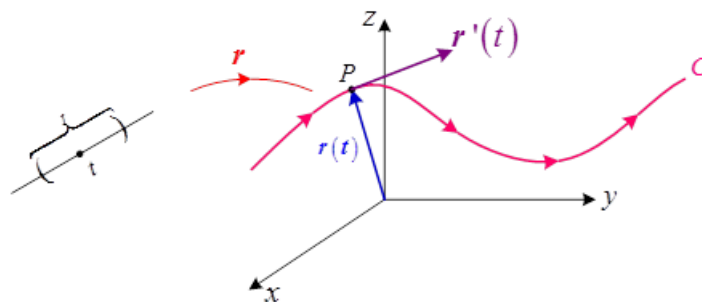


FIGURA 2.2. Derivada de la función vectorial.

**2.1. Vectores Unitarios: Tangente, Binormal, Normal Principal.** Sea la curva espacial  $C: \vec{r} = \vec{r}(t)$ , recordemos que:

El vector tangente unitario a  $C$  en el punto  $P(x, y, z)$ , El vector binormal unitario a  $C$  en el punto  $P(x, y, z)$  y El vector normal principal a  $C$  en el punto  $P(x, y, z)$  están dados por:

$$\vec{T}(t) = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|}, \quad \vec{B}(t) = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right\|}, \quad \vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t)$$

**2.2. Rectas: Tangente, Normal y Binormal a una curva espacial.** Sea  $\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva de clase  $C^2$ ,  $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ .

**Recta Tangente.** a una curva  $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$  en el punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , tiene ecuación:

$$L_T: \frac{x - x_0}{\frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_0}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_0}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dt} \Big|_{t=t_0}}$$

**Recta Normal Principal.** a la curva  $c$  en el punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  esta dada por:

$$L_N = \frac{x - x_0}{N_x} = \frac{y - y_0}{N_y} = \frac{z - z_0}{N_z}$$

donde  $N_x, N_y, N_z$  son las coordenadas del vector normal  $\vec{N}$ .

**Recta Binormal.** a la curva  $C$  en el punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  esta dada por:

$$L_B: \frac{x - x_0}{B_x} = \frac{y - y_0}{B_y} = \frac{z - z_0}{B_z}$$

donde  $B_x, B_y, B_z$  son las coordenadas del vector binormal  $\vec{B}$ .

### 2.3. Plano Osculador, Normal y Rectificante.

**Plano Osculador.** Es el plano generado por  $\vec{T}$  y  $\vec{N}$  con normal  $\vec{B}$  en  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , cuya ecuación es:

$$P_O: B_x(x - x_0) + B_y(y - y_0) + B_z(z - z_0) = 0$$

**Plano Normal Principal.** Es el plano generado por  $\vec{N}$  y  $\vec{B}$  con normal  $\vec{T}$  en  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , cuya ecuación es:

$$P_N: (x - x_0) \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_0} + (y - y_0) \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_0} + (z - z_0) \frac{dz}{dt} \Big|_{t=t_0} = 0$$

**Plano Rectificante.** Es el plano generado por  $\vec{T}$  y  $\vec{B}$  con normal  $\vec{N}$  en  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  cuya ecuación es:

$$P_R: N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) + N_z(z - z_0) = 0$$

**La curvatura.** se define como  $k = \left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\|$ , parametrizada por longitud de arco. Si la curva  $c : \vec{r} = \vec{r}(t)$ , la curvatura se tiene:

$$k = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

**La torsión.** está dada por:

$$\tau = \frac{\left( \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right) \cdot \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}}{\left\| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right\|^2}, \text{ en un parámetro arbitrario tenemos } \tau = \frac{\left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right\|^2}$$

Las fórmulas de Frenet Serret para una curva de rapidez unitaria son:

$$(2.3) \quad \vec{T}' = k\vec{N}, \quad \vec{T}' = k\vec{N}, \quad \vec{N}' = -k\vec{T} + \tau\vec{B}\vec{B}' = -\tau\vec{N}.$$

**3. Resultados.**

**Ejemplo 1.** Sea la curva  $C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$

- a) Hallar las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante en su punto  $M(1, 1, 2)$ .
- b) Hallar la curvatura y torsión en  $M(1, 1, 2)$ .

**Solución.:**

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \Rightarrow F(x, y, z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow G(x, y, z) = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Si se aplican diferenciales a las funciones  $F(x, y, z)$  y  $G(x, y, z)$ , obtenemos:

$$\begin{cases} xdx + ydy + zdz = 0 \dots\dots(I) \\ xdx - ydy + zdz = 0 \dots\dots(II) \end{cases}$$

La suma entre las ecuaciones (I) y (II) se tiene:  $2xdx + 2zdz = 0$  y de ello  $dz = -\frac{x}{z}dx$  Reemplazando en la ecuación

(I).  $xdx + ydy + z\left(-\frac{x}{z}\right)dx = 0$  y de ello  $dy = 0$ .

Considerando "x" como una variable independiente, y verificando que  $d^2x = 0$  en (I) y (II) se tiene.

$$\begin{cases} (dx)^2 + xd^2x + (dy)^2 + yd^2y + (dz)^2 + zd^2z = 0 \\ (dx)^2 + xd^2x - (dy)^2 - yd^2y + (dz)^2 + zd^2z = 0 \end{cases}$$

es decir  $d^2z = \frac{-(z^2 + x^2)}{z^3}(dx)^2$

Para  $x = 1, y = 1, z = 2$  entonces:  $\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{5}{8} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ . Si  $dy = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = 0$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \left( 1, 0, -\frac{x}{z} \right) \frac{dx}{dt} \text{ en el punto } (1,1,2) \text{ se tiene } \frac{d\vec{r}}{dt} = \left( 1, 0, -\frac{1}{2} \right) \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left( \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right) = \left( 0, 0, -\frac{5}{8} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

**Vectores Unitarios.**

$$\vec{T} = \frac{(1, 0, -\frac{1}{2})}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right), \quad \vec{B} = \frac{\left( 0, \frac{5}{8}, 0 \right)}{\frac{5}{8}} (0, 1, 0),$$

$$\vec{N} = (0, 1, 0) \times \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \left( -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

**Rectas tangente, normal y binormal.**

$$L_T : \frac{x-1}{1} = \frac{z-2}{-\frac{1}{2}} \wedge y = 1 \quad L_N : \frac{x-1}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{z-2}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} \wedge y = 1, \quad x = 1 \wedge z = 2$$

**Plano Osculador.**  $P_O : (y - 1) = 0 \Rightarrow y = 1$ **Plano Rectificante.**  $P_R : -\frac{1}{\sqrt{5}}(x - 1) - \frac{2}{\sqrt{5}}(z - 2) = 0, \quad P_R : x + 2z - 5 = 0$ **Plano Normal.**

$$P_N : (x - 1)(1) + (y - 1)(0) + (z - 2)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0; \quad P_N : 2x - z = 0$$

**Curvatura.**

$$k = \frac{\left\| \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right) \times \left(0, 0, -\frac{5}{8}\right) \right\|}{\left\| \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right) \right\|^3} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{5\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

**Torsión.**

$$\tau = \frac{\left[ \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right) \times \left(0, 0, -\frac{5}{8}\right) \right] \cdot \left(0, 0, \frac{92}{64}\right)}{\left\| \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right) \times \left(0, 0, -\frac{5}{8}\right) \right\|^2} = \frac{0}{\frac{5}{8}} = 0$$

**3.1. Programacion en Mathematica.** En esta sección, a partir del ejemplo anterior, se calcula el aparato de Frenet Serret de las curvas espaciales a través de un paquete FSAParatus.

```
In[1]:=SetOptions[ContourPlot3D, BoxRatios -> Automatic, Boxed -> False,
  AxesOrigin -> {0, 0, 0}, AxesLabel -> {"X", "Y", "Z"},
  ViewPoint -> {2.76, 1.24, 1.51}, ViewVertical -> {0.26, 0.11, 1.53},
  Mesh -> {{0}}, MeshStyle -> Gray, BoundaryStyle -> None];
In[2]:= $n[v_] := Sqrt[v.v];
In[3]:= FSAParatus[{{S1_Equal, S2_Equal}, {x_Symbol, y_Symbol, z_Symbol},
  OptionsPattern[{IndVar -> x, Point -> Automatic}]] :=
Module[{p = OptionValue[Point], iv = OptionValue[IndVar], sol1, aux,
  sol2, sol3,
  dx, dy, dz, d2x, d2y, d2z, d3x, d3y, d3z, ap, a2p, a3p, t, n, b},

Off[Solve::svars];
sol1 = Solve[
  Dt[{{S1, S2}} /. {Dt[x] -> dx, Dt[y] -> dy, Dt[z] -> dz} /.
  If[p === Automatic, {}, MapThread[Rule, {{x, y, z}, p}]],
  {dx, dy, dz}][[1]];
aux = Dt[Dt[{{S1, S2}}] /. {Dt[Dt[x]] -> d2x, Dt[Dt[y]] -> d2y,
  Dt[Dt[z]] -> d2z,
  Dt[x] -> dx, Dt[y] -> dy, Dt[z] -> dz} /.
  Which[iv === x, d2x -> 0, iv === y, d2y -> 0, iv === z,
  d2z -> 0] /. sol1;
sol2 =
  Solve[aux /.
  If[p === Automatic, {}, MapThread[Rule, {{x, y, z}, p}]],
  {d2x, d2y, d2z}][[1]];
aux = Dt[Dt[Dt[{{S1, S2}}]] /.
  {Dt[Dt[Dt[x]]] -> d3x, Dt[Dt[Dt[y]]] -> d3y,
  Dt[Dt[Dt[z]]] -> d3z,
  Dt[Dt[x]] -> d2x, Dt[Dt[y]] -> d2y, Dt[Dt[z]] -> d2z,
```

```

Dt[x] -> dx, Dt[y] -> dy, Dt[z] -> dz} /.
Which[iv === x, {d2x -> 0, d3x -> 0},
iv === y, {d2y -> 0, d3y -> 0},
iv === z, {d2z -> 0, d3z -> 0}] /. sol1 /. sol2;
sol3 =
Solve[aux /.
If[p === Automatic, {}, MapThread[Rule, {{x, y, z}, p}]],
{d3x, d3y, d3z}][[1]];
On[Solve::svars];

ap = {dx, dy, dz} /. sol1 /. {dx -> 1, dy -> 1, dz -> 1};
a2p = {d2x, d2y, d2z} /.
Which[iv === x, d2x -> 0, iv === y, d2y -> 0, iv === z,
d2z -> 0] /.
sol2 /. {dx -> 1, dy -> 1, dz -> 1, d2x -> 1, d2y -> 1,
d2z -> 1};
a3p = {d3x, d3y, d3z} /. Which[iv === x, {d2x -> 0, d3x -> 0},
iv === y, {d2y -> 0, d3y -> 0},
iv === z, {d2z -> 0, d3z -> 0}] /.
sol3 /. {dx -> 1, dy -> 1, dz -> 1, d2x -> 1, d2y -> 1,
d2z -> 1, d3x -> 1, d3y -> 1, d3z -> 1};
t = ap/$n[ap]; b = Cross[ap, a2p]/$n[Cross[ap, a2p]];
n = Cross[b, t]/$n[Cross[b, t]];

{t, n, b, $n[Cross[ap, a2p]]/$n[ap]^3,
Cross[ap, a2p].a3p/$n[Cross[ap, a2p]]^2}

] /; Union[Cases[{S1, S2}, _Symbol, Infinity], {x, y, z}] === {x,
y, z}

```

**Del ejemplo anterior:** Con los siguientes comandos observaremos las superficies y las curvas generadas por su intersección.

```

In[4]:=Show[
ContourPlot3D[{x^2 + y^2 + z^2 == 6,
x^2 - y^2 + z^2 == 4}, {x, -3.5, 3.5}, {y, -Sqrt[6], Sqrt[
6]}, {z, -3.5, 3.5}, ContourStyle -> None, Mesh -> None,
BoundaryStyle -> {1 -> None,
2 -> None, {1, 2} -> {Blue, AbsoluteThickness[2]}}],
ContourPlot3D[{x^2 + y^2 + z^2 == 6,
x^2 - y^2 + z^2 == 4}, {x, -3.5, 3.5}, {y, -Sqrt[6], Sqrt[
6]}, {z, -3.5, 3.5},
ContourStyle -> {Directive[Green, Opacity[0.7],
Specularity[White, 30]}],
Directive[LightRed, Opacity[0.7], Specularity[White, 30]]}
], ContourPlot3D[{x^2 + y^2 + z^2 == 6,
x^2 - y^2 + z^2 == 4}, {x, -3.5, 3.5}, {y, -Sqrt[6], Sqrt[
6]}, {z, -3.5, 3.5}, ContourStyle -> None, Mesh -> None,
BoundaryStyle -> {1 -> None,
2 -> None, {1, 2} -> {Blue, AbsoluteThickness[2]}}]}
Out[4]:= Visualizar Figura 3.1

```

**Ingresando los datos correspondientes se obtiene el vector tangente, normal y binormal con curvatura y torsión.**

```

In[5]:=FSAparatus[{x^2 + y^2 + z^2 == 6, x^2 - y^2 + z^2 == 4}, {x, y,
z}] // Simplify
Out[5]:={{1/Sqrt[1 + x^2/z^2],
0, -(x/(Sqrt[1 + x^2/z^2]
z))}, {-(x (x^2 + z^2))/(Sqrt[1 + x^2/z^2]
z^4 \[Sqrt][(x^2 + z^2)^2/z^6])},
0, -(Sqrt[1 + x^2/z^2]/(z Sqrt[(x^2 + z^2)^2/z^6]))}, {0, (

```

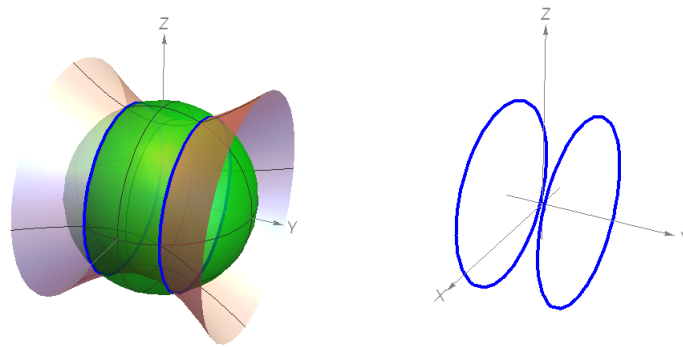


FIGURA 3.1. Intersección de las dos superficies.

```

x^2 + z^2)/(z^3 Sqrt[(x^2 + z^2)^2/z^6]),
0}, Sqrt[(x^2 + z^2)^2/z^6]/(1 + x^2/z^2)^(3/2), 0}
In[6]:= sis = {x^2 + y^2 + z^2 == 6, x^2 - y^2 + z^2 == 4}; p = {1, 1, 2};
In[7]:= {t, n, b, \[Kappa], \[Tau]} = FSAparatus[sis, {x, y, z}, Point -> p]
Out[7]:= {{2/Sqrt[5], 0, -(1/Sqrt[5])}, {-(1/Sqrt[5]), 0, -(2/Sqrt[5])}, {0, 1,
0}, 1/Sqrt[5], 0}

```

En un punto en específico  $M(1, 1, 2)$ , se encuentra los vectores unitarios, Curvatura y Torsión.

```

In[8]:= sis = {x^2 + y^2 + z^2 == 6, x^2 - y^2 + z^2 == 4};
p = {1, 1, 2};

In[9]:= {t, n, b, \[Kappa], \[Tau]}
= DiffGeo[sis, {x, y, z}, Point -> p]

Out[9]:= {{2/Sqrt[5], 0, -(1/Sqrt[5])},
{-(1/Sqrt[5]), 0, -(2/Sqrt[5])}, {0, 1, 0},
1/Sqrt[5], 0}
In[10]:= Show[
ContourPlot3D[
sis // Evaluate, {x, -3.5, 3.5}, {y, -Sqrt[6],
Sqrt[6] + 1}, {z, -3.5, 3.5}, ContourStyle -> None, Mesh -> None,
BoundaryStyle -> {1 -> None, 2 -> None, {1, 2} -> {Blue}},
Graphics3D[{AbsolutePointSize[5], Point[p]}],
Graphics3D[{{Red, Arrow[{p, p + 2 Normalize[t]}]},
{Green, Arrow[{p, p + 2 Normalize[b]}]}, {Cyan,
Arrow[{p, p + 2 Normalize[n]}]}}}]]
]

```

Luego visualizamos las curvas espaciales, con sus respectivos vectores unitarios.

```

In[11]:= Show[
ContourPlot3D[
sis // Evaluate, {x, -3.5, 3.5}, {y, -Sqrt[6],
Sqrt[6] + 1}, {z, -3.5, 3.5}, ContourStyle -> None,
Mesh -> None, BoundaryStyle -> {1 -> None, 2 -> None,
{1, 2} -> {Blue}}, Graphics3D[{AbsolutePointSize[5], Point[p]}],
Graphics3D[{{Red, Arrow[{p, p + 2 Normalize[t]}]},
{Green, Arrow[{p, p + 2 Normalize[b]}]}, {Cyan,
Arrow[{p, p + 2 Normalize[n]}]}}}]]
]
Out[11]:= Visualizar Figura 3.2

```

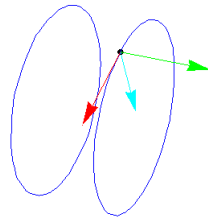


FIGURA 3.2. Curvas espaciales y sus Vectores unitarios.

**3.2. Ejemplo 2.** Sea la curva  $C$  : 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = z \\ x^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

- Hallar las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante en su punto  $M(2, \sqrt[4]{3}, \sqrt{3})$ .
- Hallar la curvatura y torsión en  $M(2, \sqrt[4]{3}, \sqrt{3})$ .

**Solución.:** Ingresar superficies en Mathematica.

```
In[12]:=S1 = z == x^2 + y^2 - 4;
```

```
S2 = x^2 - z^2 == 1;
```

Visualizar la intersección de las superficies y las curvas espaciales generadas.

```
In[13]:= {Show[
  ContourPlot3D[{S1, S2} // Evaluate, {x, -4, 4}, {y, -6, 5}, {z, -4,
    5}, ContourStyle -> None, Mesh -> None,
  BoundaryStyle -> {1 -> None,
    2 -> None, {1, 2} -> {Blue, AbsoluteThickness[2]}}],
  ContourPlot3D[{S1, S2} // Evaluate, {x, -4, 4}, {y, -6, 5}, {z, -4,
    5}, ContourStyle -> {Directive[Green, Opacity[0.7],
    Specularity[White, 30]]},
  Directive[Pink, Opacity[0.7], Specularity[White, 30]]}],
  ContourPlot3D[{S1, S2} // Evaluate, {x, -4, 4}, {y, -6,
    5}, {z, -4, 5}, ContourStyle -> None, Mesh -> None,
  BoundaryStyle -> {1 -> None,
    2 -> None, {1, 2} -> {Blue, AbsoluteThickness[2]}}]}
```

```
Out[13]:= Vizualizar Figura 3.3
```

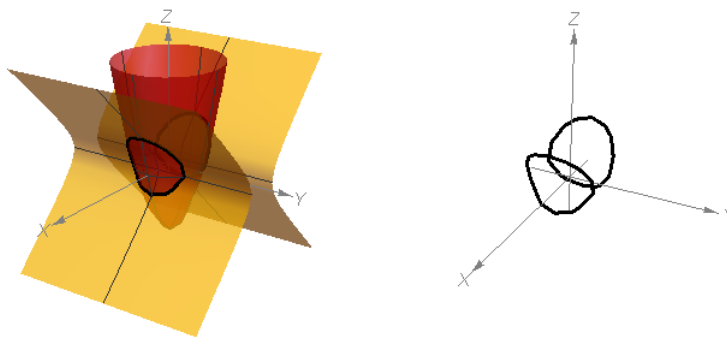


FIGURA 3.3. Curvas Espaciales a través de la intersección de superficies.

Obtener los vectores unitarios, la curvatura y torsión.

```
In[14]:=FSAparatus[{S1, S2}, {x, y, z}] // Simplify
```

```
Out[14]:={{1/Sqrt[1 + (x^2 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2))/(4 y^2 z^2)], (x - 2 x z)/(
  y z Sqrt[(x^2 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 4 y^2 z^2)/(y^2 z^2)]}, x/(
  Sqrt[1 + (x^2 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2))/(4 y^2 z^2)]
  z)}, {-((4 y^2 + (1 - 2 z)^2) (2 x y^2 z^2 -
```



$$\frac{x^3 (2 y^2 + z - 2 z^2)}{(y^4 z^4 \sqrt{(x^2 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 4 y^2 z^2)})} \left( \frac{1}{y^2 z^2} \right) \sqrt{(1/(y^6 z^6)) (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) (x^6 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 4 y^4 z^4 - 4 x^2 y^2 z^2 (2 y^2 + z - 2 z^2) + x^4 (4 y^4 - 4 y^2 (-1 + z) z + (1 - 2 z)^2 z^2))} \right), -((2 (x^4 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 2 y^2 z^3 (-1 + 2 z) + x^2 z (2 y^2 + (1 - 2 z)^2 z)))/(y^3 z^4 \sqrt{(x^2 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 4 y^2 z^2)})} \left( \frac{1}{y^2 z^2} \right) \sqrt{(1/(y^6 z^6)) (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) (x^6 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 4 y^4 z^4 - 4 x^2 y^2 z^2 (2 y^2 + z - 2 z^2) + x^4 (4 y^4 - 4 y^2 (-1 + z) z + (1 - 2 z)^2 z^2))} \right), (-8 x^2 y^4 z + 8 y^4 z^3 - x^4 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) (-1 + 2 z))/(y^4 z^4 \sqrt{(x^2 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 4 y^2 z^2)})} \left( \frac{1}{y^2 z^2} \right) \sqrt{(1/(y^6 z^6)) (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) (x^6 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 4 y^4 z^4 - 4 x^2 y^2 z^2 (2 y^2 + z - 2 z^2) + x^4 (4 y^4 - 4 y^2 (-1 + z) z + (1 - 2 z)^2 z^2))} \right), \{(x^3 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2))/(y^3 z^3 \sqrt{(1/(y^6 z^6)) (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) (x^6 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 4 y^4 z^4 - 4 x^2 y^2 z^2 (2 y^2 + z - 2 z^2) + x^4 (4 y^4 - 4 y^2 (-1 + z) z + (1 - 2 z)^2 z^2))} \right), (4 (x^2 - z^2))/(z^3 \sqrt{(1/(y^6 z^6)) (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) (x^6 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 4 y^4 z^4 - 4 x^2 y^2 z^2 (2 y^2 + z - 2 z^2) + x^4 (4 y^4 - 4 y^2 (-1 + z) z + (1 - 2 z)^2 z^2))} \right), (2 y^2 (1 - 2 z) z^2 - x^2 (2 y^2 + (1 - 2 z)^2 z))/(y^3 z^3 \sqrt{(1/(y^6 z^6)) (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) (x^6 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 4 y^4 z^4 - 4 x^2 y^2 z^2 (2 y^2 + z - 2 z^2) + x^4 (4 y^4 - 4 y^2 (-1 + z) z + (1 - 2 z)^2 z^2))} \right), (2 \sqrt{(1/(y^6 z^6)) (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) (x^6 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 4 y^4 z^4 - 4 x^2 y^2 z^2 (2 y^2 + z - 2 z^2) + x^4 (4 y^4 - 4 y^2 (-1 + z) z + (1 - 2 z)^2 z^2))})/((x^2 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 4 y^2 z^2)/(y^2 z^2))^{3/2}, -((6 x y (x^2 - z^2) (2 y^2 z + x^2 (-1 + 2 z)))/(x^6 (4 y^2 + (1 - 2 z)^2) + 4 y^4 z^4 - 4 x^2 y^2 z^2 (2 y^2 + z - 2 z^2) + x^4 (4 y^4 - 4 y^2 (-1 + z) z + (1 - 2 z)^2 z^2)))$$

Vectores unitarios, curvatura y torsión para un punto en específico.

```
In[15]:= p = {2, Power[3, (4)^-1], Sqrt[3]};
```

```
In[16]:= {t, n, b, \[Kappa], \[Tau]} =
  FSAparatus[{S1, S2}, {x, y, z}, Point -> p] // N
```

```
Out[15]:= {{0.534381, -0.577655,
  0.61705}, {-0.313072, -0.813373, -0.490316}, {0.785126,
  0.0688346, -0.615499}, 0.426643, -0.185533}
```

Vectores unitarios sobre la curva espacial.

```
In[17]:= Show[
  ContourPlot3D[{S1, S2} // Evaluate, {x, -3.5, 3.5}, {y, -Sqrt[6],
    Sqrt[6] + 1}, {z, -3.5, 3.5}, ContourStyle -> None, Mesh -> None,
  BoundaryStyle -> {1 -> None, 2 -> None, {1, 2} -> {Blue}}],
  Graphics3D[{AbsolutePointSize[5], Point[p]}],
  Graphics3D[{{Red, Arrow[{p, p + 2 Normalize[t]}]},
    {Green, Arrow[{p, p + 2 Normalize[b]}]}, {Cyan,
    Arrow[{p, p + 2 Normalize[n]}]}}]
]
```

Out[17]:= Visualizar Figura 3.4

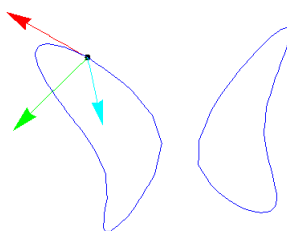


FIGURA 3.4. Vectores unitarios sobre la curva espacial.

**4. Conclusiones.** En este artículo hemos desarrollado algoritmos para calcular las propiedades de geometría diferencial de curvas de intersección entre dos superficies implícitas, dichos algoritmos han sido implementados en un nuevo paquete, FSAParatus, codificado en el lenguaje del software científico Mathematica v. 11.2. Las salidas obtenidas son enteramente compatibles con los comandos propios del software científico Mathematica v. 11.2. Este paquete podría constituirse en una herramienta en el proceso de enseñanza aprendizaje del curso geometría diferencial de pre-grado y de gran ayuda al momento de realizar cálculos y hacer representaciones gráficas de problemas donde sea necesario conocer las propiedades de geometría diferencial de curvas de intersección entre dos superficies.

**5. Agradecimientos.** Agradecemos al Grupo de Investigación en Geometría y Cálculo Simbólico de la Universidad Nacional de Piura a cargo de los profesores Ricardo Velezmoro León y Robert Ipanaque Chero por su apoyo incondicional expresando nuestro reconocimiento por su labor en la formación de nuevos investigadores.

#### ORCID and License

Graciela del Pilar Burgos Namuche <https://orcid.org/0000-0002-8882-2265>,

Judith Keren Jimenez Vilcherrez <https://orcid.org/0000-0002-7823-1533>,

Yecsi Gabriela Ascate Rivera <https://orcid.org/0000-0001-6908-655X>.

This work is licensed under the [Creative Commons Attribution-NoComercial-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

#### Referencias

- [1] Bolgov, V., *Problemas de las matemáticas Superiores*. Edit. MIR. Tomo1. URSS, 1983.
- [2] Düldül Mustafa, Özlem Akbaba, *Willmore-like methods for the intersection of parametric (hyper) surfaces*. Applied Mathematics and Computation, Vol. 226, 2013.
- [3] Nassar H. Abdell-All, Sayed Abdel-Naeim Badr, M. A. Soliman, Soad A., *Intersection curves of two implicit surfaces in  $R^3$* . J. Math. Comput. Sci. 2012; 2(2):152-171.
- [4] Stephen Wolfram, *Una Introducción Elemental a Wolfram Language*. WOLFRAM MEDIA Incorporated, 2018.
- [5] Soliman, M. A. L., Abdel-All, N. H., Hassan, S. A., y Badr, S. A. N. *Intersection curves of implicit and parametric surfaces in  $R^3$* . Applied Mathematics, Vol.2, 2011.
- [6] Ye, X. Y Maekawa, T, *Differential geometry of intersection curves of two surfaces*. Computer Aided Geometric Design, Vol. 16, 1999.