





## Detecção de Bordas baseada em Morfologia Matemática Fuzzy Intervalar e as Funções de Agregação $K_\alpha$

### Edge Detection based in Interval-Valued Fuzzy Mathematical Morphology and Aggregation Functions $K_\alpha$

Lisbeth Corbacho Carazas \* and Peter Sussner.†

Received, Jul. 17, 2019

Accepted, Oct. 07, 2019



#### How to cite this article:

Corbacho, L., Sussner, P. *Detecção de Bordas baseada em Morfologia Matemática Fuzzy Intervalar e as Funções de Agregação  $K_\alpha$* . *Selecciones Matemáticas*. 2019; 6(2):238-247. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2019.02.10>

#### Resumo

A detecção de bordas é uma ferramenta de processamento digital de imagens. Ela determina pontos de uma imagem digital onde a intensidade da luz muda repentinamente. Esse processo aplica-se a uma imagem digital a qual supõe algum grau de incerteza na localização e na intensidade do pixel da imagem real. Neste trabalho, é proposto um modelo de detecção de bordas que consiste na captura dessa incerteza em termos de imagens intervalares, para depois aplicar a erosão e dilatação intervalar fuzzy. Finalmente, por meio de uma combinação convexa sobre os limites superiores e inferiores da erosão e a dilatação intervalar, são obtidas a erosão e a dilatação morfológica respectivamente, com as quais se faz possível produzir uma imagem borda.

**Palavras chave.** Detecção de bordas, morfologia matemática fuzzy intervalar, morfologia gradiente.

#### Abstract

Edge detection is a digital image processing tool. It determines points in a digital image where light intensity suddenly changes. This process applies to a digital image which assumes some degree of uncertainty in the location and intensity of the pixel in the real image. In this work, we propose an edge detection model which consists in capturing this uncertainty in terms of interval images. Then we apply interval-valued fuzzy morphology to calculate the interval-valued erosion and dilation. Finally, we compute the convex combinations of the upper and lower bounds of the interval-valued erosion and dilation image, to obtain a morphological erosion and dilation respectively, and thus an edge image.

**Keywords.** Edge detection, interval-valued fuzzy morphology, gradient morphological.

**1. Introdução.** Uma imagem digital possui incertezas e imprecisões inerentes ao processo de digitalização. Lopez-Molina et al. [17] modelaram esta imprecisão em forma de imagem intervalar para depois utilizá-las na detecção de bordas da imagem. A importância das bordas de uma imagem concentra-se na simplificação da análise das imagens e na redução drástica da quantidade de dados a serem processados. Suas aplicações encontram-se nas áreas da geografia, medicina, robótica, reconhecimento de padrões, etc.. Existem muitos métodos de detecção de bordas, dentre os quais destacam-se os baseados na lógica fuzzy, como são: a inferência fuzzy [16], morfologia fuzzy [7, 22], morfologia fuzzy intervalar [19, 23], etc.; ou os métodos clássicos como: Canny [5], Roberts [21], Sobel [24], etc..

\*Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMECC, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo-Brazil. (ra162526@ime.unicamp.br).

†Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMECC, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo-Brazil. (sussner@ime.unicamp.br).

Embora existam diversas técnicas para extração de bordas, neste trabalho foi utilizado a morfologia fuzzy intervalar, dado que a inerente incerteza na imagem pode ser modelada em termos da imagem intervalar. Assim, vista esta imagem intervalar como um conjunto intervalar fuzzy, pode ser processada usando técnicas desta teoria, como por exemplo determinar o gradiente da imagem intervalar a partir da diferença entre a dilatação e a erosão fuzzy intervalar, essa diferença esta baseada na diferença de intervalos [8]. Para efeitos do cálculo das bordas da imagem, tal que cumpram as condições de Canny [5], precisa-se um tipo de redução da imagem gradiente fuzzy intervalar numa imagem gradiente fuzzy e sobre essa imagem gradiente fuzzy utilizam-se os processos de supressão não máximo seguida da histereses [5, 18]. Como consequência desse processo obtêm-se uma imagem binária com a linha borda de um pixel de largura (se o pixel pertence à borda possui valor 1, caso contrario é 0), que chama-se imagem borda.

Neste trabalho, além de representar a imagem como uma imagem intervalar considerando a incerteza, contorna-se o problema de redução da imagem fuzzy intervalar com uma abordagem diferente à de calcular o gradiente intervalar fuzzy, da seguinte forma: calculamos a erosão e dilatação intervalar, depois reduzimos a erosão e dilatação por meio da função  $K_\alpha$  obtendo como resultado uma nova erosão e dilatação morfológica onde a diferença (agora a usual) pode ser interpretada como o gradiente morfológico da imagem, o qual permitiria a aplicação convencional das técnicas de binarização para gerar uma imagem borda.

A organização deste trabalho, parte de uma revisão teórica dos conceitos básicos da teoria de reticulados e dos conjuntos  $\mathbb{L}$ -fuzzy com ênfase na teoria fuzzy intervalar, na sequência, uma abordagem própria é desenvolvida, e finalmente são apresentados os resultados experimentais obtidos.

**2. Conceitos básicos.** Nesta seção são apresentados conceitos básicos de reticulados onde a morfologia matemática pode ser desenvolvida. Para uma discussão mais completa referenciam-se os trabalhos de Birkhoff [?], Grätzer [9], Davey e Priestley [6].

**Definição 1.** [2, 6] Dado um conjunto não vazio  $X$  e seja  $\leq$  uma relação binária sobre  $X$ , esta relação é chamada a ordem parcial se as seguintes condições são satisfeitas:

1.  $x \leq x$  (reflexividade);
2.  $x \leq y$  e  $y \leq x$  implica  $x = y$  (antissimétrica);
3.  $x \leq y$  e  $y \leq z$  implica  $x \leq z$  (transitividade)

O conjunto  $X$  com a ordem parcial  $\leq$  é chamado conjunto parcialmente ordenado ou poset e é denotado por  $(X, \leq)$ . Além disso o poset é denominado totalmente ordenado ou cadeia se:

4.  $x \leq y$  ou  $y \leq x$

para todo  $x, y, z \in X$ . A relação binária que satisfaz 1. e 3. é chamada pré-ordem ou quase-ordem e o conjunto com essa pré-ordem é chamada conjunto pré-ordenado ou proset.

Seja  $(X, \leq)$  um poset e  $Y \subseteq X$ , o elemento  $l \in X$  é chamado limitante inferior de  $Y$  se  $l \leq y$  para todo  $y \in Y$  e o maior dos limitantes inferiores é chamado ínfimo, de forma similar, seja  $u \in X$  é chamado limitante superior se  $y \leq u$  para todo  $y \in Y$  e o menor dos limitantes superiores é chamado supremo. O símbolo  $\bigwedge Y$  denota o ínfimo  $Y$  e o símbolo  $\bigvee Y$  denota o supremo de  $Y$ . Se  $Y = \{y_j : j \in J\}$  para algum conjunto de índices  $J$  usamos a notação  $\bigwedge_{j \in J} y_j$  ao invés de  $\bigwedge Y$  e  $\bigvee_{j \in J} y_j$  ao invés de  $\bigvee Y$ .

**Definição 2.** [?, 10] Um poset  $X$  é chamado reticulado se cada subconjunto finito de  $X$  possui um ínfimo e um supremo. O reticulado é dito completo se cada subconjunto de  $X$  tem ínfimo e supremo.

Denota-se um reticulado completo como  $\mathbb{L}$  (ou  $\mathbb{M}$ ) com  $0_{\mathbb{L}}$  como o menor elemento e  $1_{\mathbb{L}}$  e como o maior elemento de  $\mathbb{L}$ .

A continuação apresenta-se alguns exemplos de reticulados e reticulados completos:

- O produto de reticulados  $\mathbb{L}^n = \mathbb{L} \times \dots \times \mathbb{L}$  é um reticulado com a seguinte ordem parcial:

$$(2.1) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

- $\mathbb{L}^{m \times n}$  é um reticulado com a ordem dada por

$$(2.2) \quad S \leq T \Leftrightarrow s_{ij} \leq t_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

- O intervalo fechado  $[0, 1]$  com a ordem usual é um reticulado completo.
- O conjunto de todos os subintervalos fechados não-vazios de  $[0, 1]$ , denotado por:

$$(2.3) \quad \mathbb{I} = \{[x, \bar{x}] \mid 0 \leq x \leq \bar{x} \leq 1, \quad x, \bar{x} \in [0, 1]\}$$

com a ordem parcial definida como:

$$(2.4) \quad [x, \bar{x}] \leq_2 [y, \bar{y}] \Leftrightarrow x \leq y \text{ e } \bar{x} \leq \bar{y}$$

é um reticulado completo

- A classe de funções  $\mathbb{L}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{L}\}$  é um reticulado com a ordem parcial definida como:

$$(2.5) \quad f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

- A classe do gráfico de funções em  $\mathbb{L}^X$ , denotada por  $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  é um reticulado com a ordem parcial dada por:

$$(2.6) \quad A \leq B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B$$

para todo  $A, B \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  e  $\mu_A, \mu_B \in \mathbb{L}^X$ , onde  $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$ ,  $B = \{(x, \mu_B(x)) | x \in X\}$ . Cada elemento de  $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  é chamado conjunto  $\mathbb{L}$ -fuzzy e por simplicidade denotamos  $A(x)$  ao invés de  $\mu_A(x)$ . Em particular se  $\mathbb{L} = [0, 1]$  tem-se a classe de conjuntos fuzzy  $X \neq \emptyset$  denotada por  $\mathcal{F}(X)$  e se  $\mathbb{L} = \mathbb{I}$  tem-se classe de conjuntos fuzzy intervalar  $\mathcal{F}_{\mathbb{I}}(X)$ .

**Definição 3.** [10] Sejam  $(\mathbb{L}, \leq)$  e  $(\mathbb{M}, \leq)$  reticulados, a aplicação  $\phi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$  que é chamado crescente se  $x \leq_{\mathbb{L}} y$  implica  $\phi(x) \leq_{\mathbb{M}} \phi(y)$ , isto significa que  $\phi$  preserva a ordem.

**Definição 4.** [4] Seja  $[0, 1]$  um reticulado completo. A função  $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ ,  $n \geq 2$  é chamada função de agregação se preserva a ordem,

$$(2.7) \quad f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}) \text{ se } \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \text{ (i.e., } x_i \leq y_i \text{ } \forall i = 1, 2, \dots, n),$$

e satisfaz as condições de fronteira  $A(0, \dots, 0) = 0$  e  $A(1, \dots, 1) = 1$ , para todo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in [0, 1]^n$ .

Como exemplo particular de função de agregação tem-se:

- A combinação convexa  $K_{\alpha} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  tal que  $K_{\alpha}(x_1, x_2) = x_1 + \alpha(x_2 - x_1)$  para todo  $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$  e  $\alpha \in [0, 1]$ .

A seguir, apresentam-se operadores básicos da morfologia matemática como são a erosão e dilatação as quais preservam a ordem.

**Definição 5.** [10] Sejam  $\mathbb{L}, \mathbb{M}$  reticulados completos. O operador  $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$  que comuta com a operação do ínfimo é chamada erosão para cada subconjunto  $Y \subseteq \mathbb{M}$ , isto significa:

$$\varepsilon \left( \bigwedge Y \right) = \bigwedge_{y \in Y} \varepsilon(y).$$

E o operador  $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$  que comuta com a operação do supremo é chamada dilatação para cada subconjunto  $Y \subseteq \mathbb{M}$ , isto é:

$$\delta \left( \bigvee Y \right) = \bigvee_{y \in Y} \delta(y).$$

**Definição 6.** [10] Sejam  $\mathbb{L}$  e  $\mathbb{M}$  reticulados completos. A aplicação  $\phi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$  é chamado isomorfismo de reticulados completos se é bijectiva, além disso  $\phi$  e sua inversa  $\phi^{-1}$  preserva a ordem, isto é:

$$(2.8) \quad x \leq y \Leftrightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$$

para todo  $x, y \in \mathbb{L}$ .

Assumindo  $\mathbb{L}$  como um reticulado completo, tem-se os seguintes exemplos:

- $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  e  $\mathbb{L}^X$  são isomorfos.
- Seja o conjunto finito  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  então  $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  e  $\mathbb{L}^n$  são isomorfos.
- O conjunto  $\mathbb{L}^{n \times m}$  pode ser identificada como  $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  se  $X = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ .

**3. Morfologia  $\mathbb{L}$ -fuzzy.** A morfologia matemática binária foi estendida para morfologia matemática em escala de cinza o qual estuda as imagens em tons cinza, esta abordagem inclui a morfologia matemática fuzzy (FMM) baseado na observação que ambas a imagem e o conjunto fuzzy podem ser modeladas da mesma forma ( $X \rightarrow \mathbb{L} = [0, 1]$ ) [7, 20, 22] e a morfologia matemática  $\mathbb{L}$ -fuzzy como extensão da FMM, onde o imagem pode ter valores num reticulado completo qualquer.

Para fines de nosso propósito, nessa seção define-se os operadores básicos da morfologia matemática  $\mathbb{L}$ -fuzzy, como são erosão e dilatação em termos de conjunções e implicações  $\mathbb{L}$ -fuzzy, estas operações associadas a um conjunto  $\mathbb{L}$ -fuzzy  $S$  chamado elemento estruturante, geralmente usado para extrair informações topológicas ou geométricas da imagem.

**Definição 7.** [23] Uma aplicação  $\mathcal{C} : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$  crescente é chamado conjunção  $\mathbb{L}$ -fuzzy se  $\mathcal{C}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = \mathcal{C}(1_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = \mathcal{C}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}}$  e  $\mathcal{C}(1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{L}}$ . Em particular se a aplicação  $\mathcal{C}$  é comutativa, associativa e satisfaz  $\mathcal{C}(x, 1_{\mathbb{L}}) = x$  para todo  $x \in \mathbb{L}$  é dita norma triangular ou  $t$ -norma em  $\mathbb{L}$ .

Apresentamos alguns exemplos de t-normas sobre o reticulado completo  $[0, 1]$ ,

$$T_{LK}(x, y) = 0 \vee (x + y - 1), \quad \text{Lukasiewicz}$$

$$T_{nM}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x + y \leq 1, \\ \min\{x, y\} & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{Nilpotent minimum}$$

**Definição 8.** [23] Uma aplicação  $\mathcal{I} : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$  decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo argumento é chamado implicação  $\mathbb{L}$ -fuzzy se  $\mathcal{I}(0_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = \mathcal{I}(0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = \mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}}) = 1_{\mathbb{L}}$  e  $\mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}) = 0_{\mathbb{L}}$ . Em particular se a aplicação  $\mathcal{I}$  satisfaz  $\mathcal{I}(1_{\mathbb{L}}, x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{L}$  é dita implicador fronteira em  $\mathbb{L}$ .

Sobre  $[0, 1]$  têm-se os seguintes exemplos de implicações fuzzy:

$$I_{KD}(x, y) = \max(1 - x, y), \quad \text{Kleene-Dienes}$$

$$I_{FD}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y, \\ \max\{1 - x, y\} & x > y \end{cases} \quad \text{Fodor}$$

Outros exemplos de t-normas e implicações sobre  $\mathbb{L} = [0, 1]$  podem ser encontradas em [1], [14], etc.

**Definição 9.** [23] Sejam  $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}$  e  $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$  be  $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \times \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  aplicações dadas por:

$$(3.1) \quad \mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, S)(y) = \bigwedge_{x \in X} \mathcal{I}(S(x - y), A(x))$$

$$(3.2) \quad \mathcal{D}_{\mathcal{C}}(A, S)(y) = \bigvee_{x \in X} \mathcal{C}(S(y - x), A(x))$$

onde  $X$  é um subconjunto de espaço euclidiano  $\mathbb{R}^d$  ou espaço digital  $\mathbb{Z}^d$ , para todo  $A, S \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  e  $y \in X$ .

Refira-se ao operador  $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}$  como a erosão  $\mathbb{L}$ -fuzzy da imagem  $A$  pelo elemento estruturante (SE)  $S$  e ao operador  $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$  como a dilatação  $\mathbb{L}$ -fuzzy da imagem  $A$  pelo elemento estruturante  $S$ .

**Proposição 1.** Sejam  $A, S \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$  onde  $X$  é um subconjunto de espaço euclidiano  $\mathbb{R}^d$  ou espaço digital  $\mathbb{Z}^d$  que contém  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^T$ . Se  $\mathcal{C}$  é uma t-norma e  $\mathcal{I}$  é uma implicação fronteira sobre  $\mathbb{L}$  tal que,  $S(\mathbf{0}) = 1_{\mathbb{L}}$ , então:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, S) \leq A \leq \mathcal{D}_{\mathcal{C}}(A, S).$$

Entre outros tipos de morfologia matemática  $\mathbb{L}$ -fuzzy, salienta-se a morfologia fuzzy intervalar como uma extensão da morfologia fuzzy ( $\mathbb{L} = [0, 1]$ ) o qual foi desenvolvida para modelar incertezas por meio de intervalos, esta abordagem podem ser encontrada nos trabalhos de Deschrijver et al. [8] e Sussner et al. [23].

No contexto de imagens, a morfologia fuzzy intervalar permite modelar a incerteza dos níveis de cinza sobre cada pixel, isto significa que a cada valor do pixel corresponde-lhe um intervalo, para cada  $x \in X$ , neste trabalho define-se as conjunções e implicações intervalares necessárias para determinar os operadores de dilatação e erosão intervalar.

**Definição 10.** [8, 23] Sejam  $C, I$  conjunção fuzzy e implicação fuzzy respetivamente. Define-se a conjunção pessimista  $\mathcal{C}_C^p$  com representante  $C$  e a implicação otimista  $\mathcal{I}_I^o$  com representante  $I$  como segue:

$$(3.3) \quad \mathcal{C}_C^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [C(\underline{x}, \underline{y}), (C(\underline{x}, \bar{y}) \vee C(\bar{x}, \underline{y}))]$$

$$(3.4) \quad \mathcal{I}_I^o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [I(\underline{x}, \underline{y}) \wedge I(\bar{x}, \bar{y}), I(\underline{x}, \bar{y})].$$

Nesse trabalho, serão utilizadas a t-norma  $T_{nM}$  e a implicação fronteira  $I_{KD}$  para gerar a conjunção pessimista e a implicação otimista tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{T_{nM}}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [T_{nM}(\underline{x}, \underline{y}), (T_{nM}(\underline{x}, \bar{y}) \vee T_{nM}(\bar{x}, \underline{y}))] \\ \mathcal{I}_{I_{KD}}^o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [I_{KD}(\underline{x}, \underline{y}) \wedge I_{KD}(\bar{x}, \bar{y}), I_{KD}(\underline{x}, \bar{y})] \end{aligned}$$

Note que  $I_{KD}$  é uma implicação fronteira então a implicação intervalar otimista com representante  $I_{KD}$  é também uma implicação fronteira, da mesma forma para a conjunção  $T_{nM}$  que é uma t-norma então a conjunção intervalar otimista com representante  $T_{nM}$  é também uma t-norma, porém da proposição 1 obtém-se a relação:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{I}_{I_{KD}}^o}(A, S) \leq A \leq \mathcal{D}_{\mathcal{C}_{T_{nM}}^p}(A, S).$$

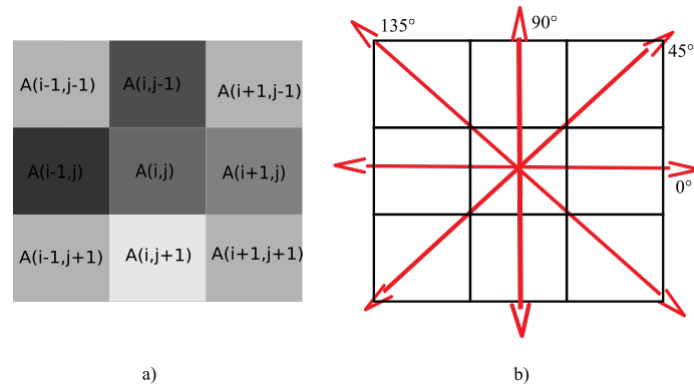


FIGURA 4.1. a) Vizinhaça  $3 \times 3$  da imagem. b) Vizinhaças nas quatro direções.

**4. Detecção de bordas usando IV-FMM e funções  $K_\alpha$ .** Como comentado na introdução, esta seção foca-se na captura da inerente incerteza da imagem digital numa imagem intervalar, para depois usá-la no cálculo da erosão e dilatação intervalar da imagem, e por meio da função  $K_\alpha$  obter a erosão e dilatação gradiente, e assim utilizá-las na determinação de uma imagem gradiente fuzzy. Finalmente, empregam-se os métodos de binarização sobre a imagem gradiente, logo depois, avaliá-se a performance do detetor apresentado.

**4.1. Imagem intervalar.** Dada uma imagem em tons de cinza  $A$ , sobre um conjunto de pontos  $X \subset \mathbb{Z}^2$  com valores  $\{0, 1, \dots, 255\}$ , é construída uma imagem intervalar quantificando os erros da seguinte forma:

**Erro espacial:** Desde que os objetos e superfícies são contínuos na natureza, a representação das imagens deveriam dar um conjunto de pontos contínuos em  $\mathbb{R}^2$ , no entanto, na prática as imagens digitais são representadas por um conjunto de pontos discretos de  $\mathbb{Z}^2$ , assim, pelas dificuldades ao representar as imagens, assumi-se um deslocamento de um pixel em todas as direções para cada pixel da imagem  $A$ .

Neste trabalho, foi agrupado o deslocamento em quatro vizinhaças de uma vizinhaça  $3 \times 3$  (ver figura 4.1) do pixel  $p$  na coordenada  $(i, j)$ , onde as agrupações correspondem aos ângulos  $\{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$  como segue:

$$\begin{aligned} w^{0^\circ}(p) &= \{(i-1, j), (i, j), (i+1, j)\} \\ w^{45^\circ}(p) &= \{(i-1, j+1), (i, j), (i+1, j-1)\} \\ w^{90^\circ}(p) &= \{(i, j-1), (i, j), (i, j+1)\} \\ w^{135^\circ}(p) &= \{(i-1, j-1), (i, j), (i+1, j+1)\} \end{aligned}$$

**Erro tonal:** As imagens reais possuem um número ilimitado de tons de cinza, no processamento de imagens computacionais é necessário limitar o quantidade de tons de cinza a um número finito, assim dependendo do dispositivo de digitalização, sobre cada pixel gera-se um erro tonal, neste trabalho foi considerado o erro tonal de  $\pm 1$  como na referência [17].

Para quantificar os erros anteriormente mencionados, gera-se uma imagem intervalar  $A_{IV}$  de uma imagem  $A$  da seguinte forma:

$$A_{IV}(p) = \left[ 0 \vee \bigwedge_{p' \in w(p)} A(p') - 1, 255 \wedge \bigvee_{p' \in w(p)} A(p') + 1 \right]$$

onde,

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \bigwedge_{p' \in w(p)} A(p') &:= \left( \sum_{g \in G} \left( \min_{p' \in w^g(p)} A(p') \right) \right) / 4, \\ \bigvee_{p' \in w(p)} A(p') &:= \left( \sum_{g \in G} \left( \max_{p' \in w^g(p)} A(p') \right) \right) / 4 \end{aligned}$$

e  $G = \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$ .

Na imagem intervalar gerada pela equação 4.1 pode ser visualizada a variação de intensidade de luz, ver figura 4.2, note que o limite superior da imagem intervalar possui tons de cinza maiores do que o limite inferior da imagem intervalar.

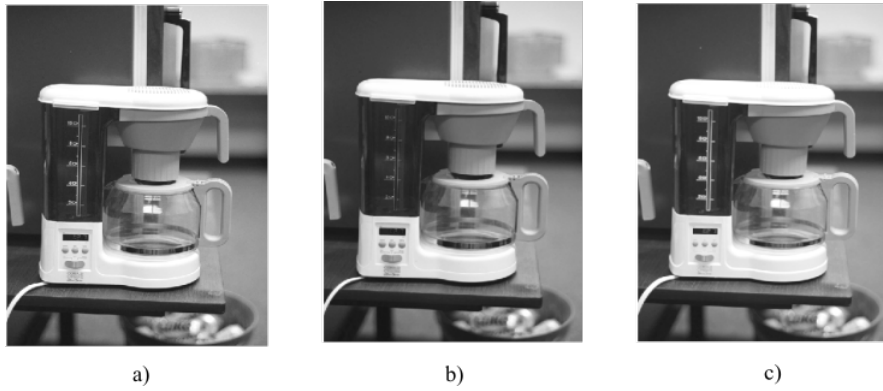


FIGURA 4.2. Representação da imagem intervalar. a) Imagem original. b) Limite inferior da imagem intervalar. c) Limite superior da imagem intervalar.

**4.2. Detecção de borda da imagem por meio de  $K_\alpha$ .** Sejam as imagens, erosão  $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, S)$  e dilatação  $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}(A, S)$  em  $\mathbb{I}^X$ , onde  $\mathcal{C}$  é uma conjunção intervalar,  $\mathcal{I}$  é uma implicação intervalar e  $S \in \mathbb{I}^X$  um elemento estruturante. A erosão intervalar torna-se uma erosão gradiente por meio da combinação convexa <sup>1</sup> da seguinte forma:

$$(4.2) \quad K_\alpha(\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, S)) = L_{\mathcal{E}} + \alpha(U_{\mathcal{E}} - L_{\mathcal{E}}) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

onde,  $L_{\mathcal{E}}$  é o limite inferior e  $U_{\mathcal{E}}$  é o limite superior da erosão intervalar  $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, S)$ .

De maneira similar para dilatação intervalar,

$$(4.3) \quad K_\alpha(\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A, S)) = L_{\mathcal{D}} + \alpha(U_{\mathcal{D}} - L_{\mathcal{D}}) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

onde  $L_{\mathcal{D}}$  é o limite inferior e  $U_{\mathcal{D}}$  é a limite superior da dilatação intervalar  $\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, S)$ .

Note que, a ordem parcial é preservada por meio de  $K_\alpha$ , então,  $K_\alpha(\mathcal{E}_{\mathcal{I}}(A, S)) \leq K_\alpha(\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A, S))$ , por tanto, é possível calcular uma gradiente morfológica fuzzy  $G_\alpha \in \mathcal{F}(X)$  como a diferença usual entre a transformação da dilatação e a transformação da erosão, equação 4.4. Este processo esta ilustrado na figura 4.3.

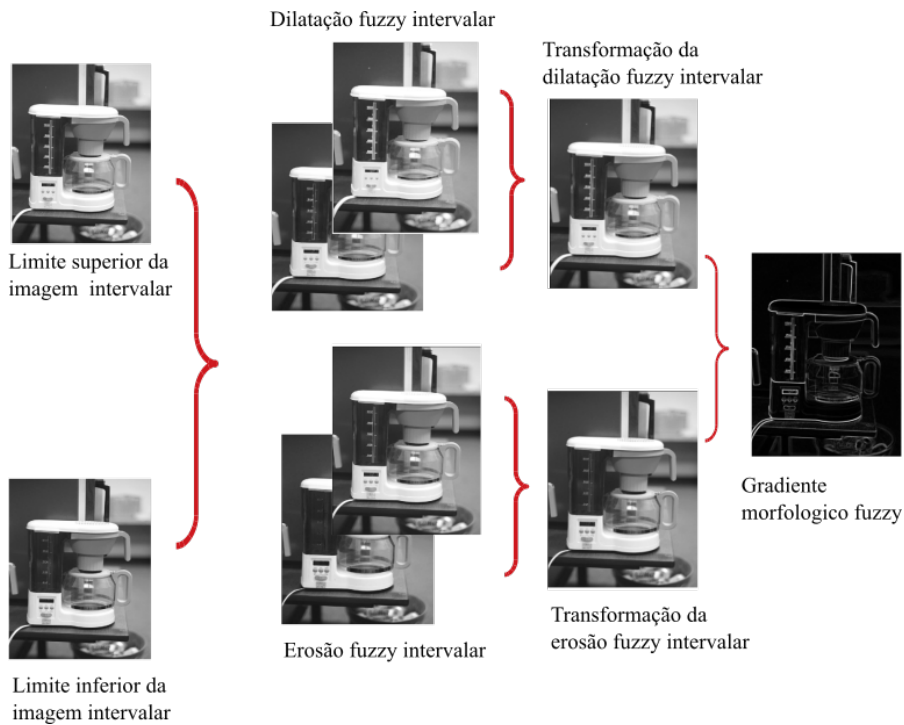


FIGURA 4.3. Sequência do processo da detecção de borda.

<sup>1</sup>Note que, cada intervalo  $[x, y] \in \mathbb{I}$  pode-se identificar com o par  $(x, y) \in [0, 1]^2$  com  $x \leq y$

$$(4.4) \quad G_\alpha = K_\alpha(\mathcal{D}_I(A, S)) - K_\alpha(\mathcal{E}_C(A, S)).$$

Observe-se que o gradiente morfológico fuzzy  $G_\alpha$ , depende de  $\alpha \in [0, 1]$ , então existe um número infinito de gradientes fuzzy por cada imagem. Na figura 4.4 são apresentados alguns gradientes gerados.

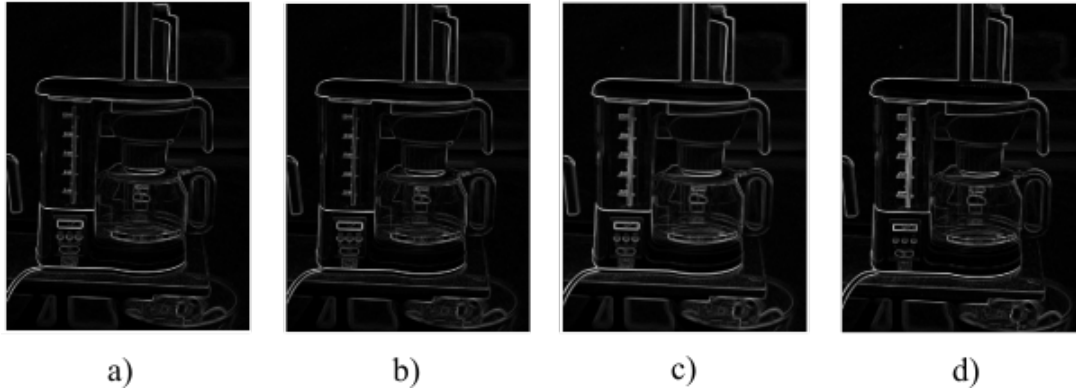


FIGURA 4.4. Gradiente morfológico obtido por diferentes valores de  $\alpha$ . a)  $\alpha = 0$ . b)  $\alpha = 0,3$ . c)  $\alpha = 0,5$ . d)  $\alpha = 1$

**4.3. Metodologia.** Como primeiro passo, geram-se as imagens intervalares pelo método proposto. Seguidamente, escolhe-se o elemento estruturante, a conjunção e a implicação (a serem utilizadas na dilatação intervalar e erosão intervalar), motivadas pelo trabalho de González-Hidalgo et al. [11] no qual é mostrada que o par  $(T_{nM}, I_{KD})$  junto com o elemento estruturante

$$S = \begin{pmatrix} 0,86 & 0,86 & 0,86 \\ 0,86 & 1 & 0,86 \\ 0,86 & 0,86 & 0,86 \end{pmatrix}$$

é uma das melhores configurações dentre 40 (cada configuração foi testada sobre 50 imagens da base de dados<sup>2</sup> da University of South of Florida [3]). Assim o par  $(T_{nM}, I_{KD})$  é perfeitamente aplicado neste trabalho por ser  $T_{nM}$  uma t-norma e  $I_{KD}$  uma implicação fronteira. Na sequência, determina-se a dilatação e erosão intervalar definida na seção anterior, os operadores intervalares de conjunção e implicação utilizadas foram  $\mathcal{C}_{T_{nM}}^p$  e  $\mathcal{I}_{I_{KD}}^q$  respectivamente, sendo os elementos estruturantes utilizados  $S = [S_1, S_2]$ ,

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0,86 & 0,86 & 0,86 \\ 0,86 & 1 & 0,86 \\ 0,86 & 0,86 & 0,86 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0,86 & 1 & 0,86 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0,86 & 1 & 0,86 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } R = [R_1, R_2],$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,86 & 0 \\ 0,86 & 1 & 0,86 \\ 0 & 0,86 & 0 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0,86 & 0,86 & 0,86 \\ 0,86 & 1 & 0,86 \\ 0,86 & 0,86 & 0,86 \end{pmatrix}.$$

Para a análise quantitativa desse detector de borda, utiliza-se o método apresentado por González-Hidalgo et al. [11, 12], que consiste na binarização da imagem usando como primeiro processo a supressão não máximo (NMS) introduzida por Canny (1986) [5] (este processo tem como objetivo suprimir os valores não máximos ao longo da linha gradiente e afina de modo geral a linha gradiente até obter a largura de um pixel, neste trabalho foi usado Kovese's MATLAB code [15]), seguido de um processo de histerese (que é um processo de binarização da imagem por meio de uma adequada escolha de limiares, neste trabalho a escolha dos limiares esta baseada no artigo de Medina-Carciner et al. [18]). Consequentemente comparam-se as imagens de saída  $DE$  (candidatos a ser imagem borda) com as imagens de borda ideais (ground truth,  $GT$ ) usando a figura de mérito de Pratt, também chamada índice de mérito de Pratt proposta por Pratt [?], que é um método de avaliação quantitativo da performance dos detectores de bordas. A figura de mérito é definida por:

$$(4.5) \quad \text{FoM} = \frac{1}{\max\{|(DE)|, |(GT)|\}} \sum_{x \in DE} \frac{1}{1 + ad^2}$$

onde  $a \in \mathbb{R}^+$  é uma constante,  $d$  a distancia entre as bordas candidatas e as bordas ideais e  $||$  representa o número de pontos borda das imagens, considere-se  $a = 1/9$  e  $d$  como a distância euclideana.

<sup>2</sup>A base de dados das imagens podem ser baixadas de <ftp://figment.csee.usf.edu/pub/ROC/>

**4.4. Resultados experimentais e análise.** Para os experimentos foram consideradas 25 imagens da base de dados da University of South of Florida [3], incluindo suas respectivas imagens borda ideais (GT).

Para analisar o método proposto, como primeiro experimento foi escolhida uma imagem sobre a qual aplica-se o detector com elemento estruturante  $R$  e  $\alpha = 0,3$ . O resultado de aplicar o detector sobre a imagem foi comparado com os resultados obtidos do detector de borda Canny e da gradiente fuzzy ( $T_{nM}, I_{IK}$ ), dando como resultado uma melhoria na detecção das bordas. Entenda-se tal melhoria no seguinte sentido: o detector proposto gera menos bordas falsas (pontos que não pertencem à borda) do que os outros métodos, como mostrado na figura 4.5. Como seguinte experimento, sobre a mesma imagem, o detector foi aplicado para os elementos estruturantes intervalares  $S$  e  $R$ , e  $\alpha = \{0, 0,5\}$  (vide figura 4.6). Desse experimento, variando os parâmetros geram-se diferentes imagens borda, nestas são observados pequenos detalhes (perceptíveis a olho nú) que as diferenciam e permitem uma melhor avaliação da qualidade da borda obtida.

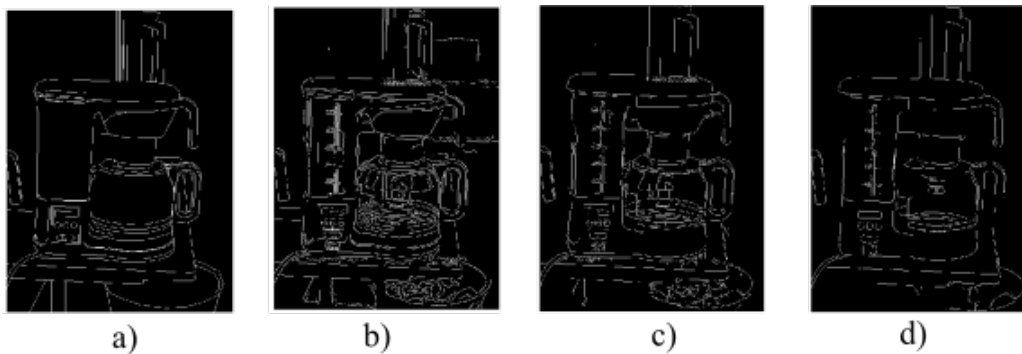


FIGURA 4.5. Comparação do método proposto com o método dado pela gradiente fuzzy e Canny a) Imagem bordas ideais b) Imagem borda fuzzy ( $T_{nM}, I_{KD}$ ) c) Canny d) Método proposto para  $\alpha = 0,3$ .

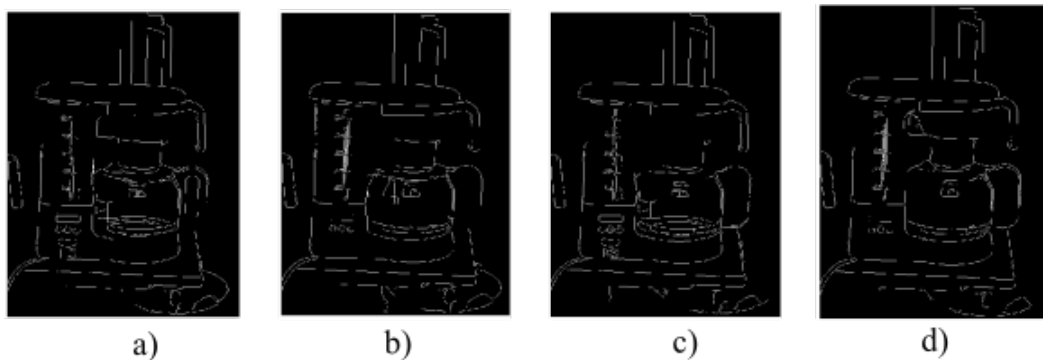


FIGURA 4.6. Imagens borda gerada pelo método proposto para diferentes elementos estruturantes. a) ( $S, \alpha = 0$ ). b) ( $S, \alpha = 0,5$ ). c) ( $R, \alpha = 0$ ). d) ( $R, \alpha = 0,5$ ).

Para finalizar os experimentos, avalia-se a abordagem desenvolvida mediante a figura de mérito Pratt (FoM) sobre as 25 imagens escolhidas. Para cada imagem, foram utilizadas os elementos estruturantes  $S$  e  $R$  com  $\alpha \in \{0, 0,02, \dots, 1\}$ , gerando 51 imagens borda por cada elemento estruturante para cada imagem, e em cada caso o FoM foi calculado. Com o fim de avaliar o comportamento dessa abordagem, obtêm-se a média dos valores FoM do resultado do processo sobre as 25 imagens, este resultado é ilustrado na figura 4.7.

Os melhores resultados obtidos do ultimo experimento (com  $S$  e  $R$ ) foram comparados com a média dos valores FoM das 25 imagens processadas pelos detectores de bordas gradiente fuzzy e Canny, vide tabela 4.1. Observou-se que de maneira geral o detetor proposto exhibe uma melhor performance na detecção, sendo superior o resultado obtido com o elemento estruturante  $S$  (para a maioria dos  $\alpha$  utilizados).

**5. Conclusões.** Neste trabalho foi desenvolvido um novo método de geração de imagens intervalares, as quais foram usadas para o cálculo da erosão e dilatação intervalar e por meio da função  $K_\alpha$ , sobre as imagens erosão e dilatação intervalar foi possível determinar uma gradiente morfológica fuzzy. Esta abordagem foi comparada com o método gradiente fuzzy tradicional e o clássico método Canny, obtendo como resultado uma melhoria na detecção de bordas. A aplicação do método proposto utilizando o elemento estruturante  $S$  mostrou-se superior (considerando os valores FoM).

**6. Agradecimentos.** O presente trabalho foi realizado com apoio de CAPES, CNPq no. 313145/2017-2 e FAPESP no. 2018/13657-1.



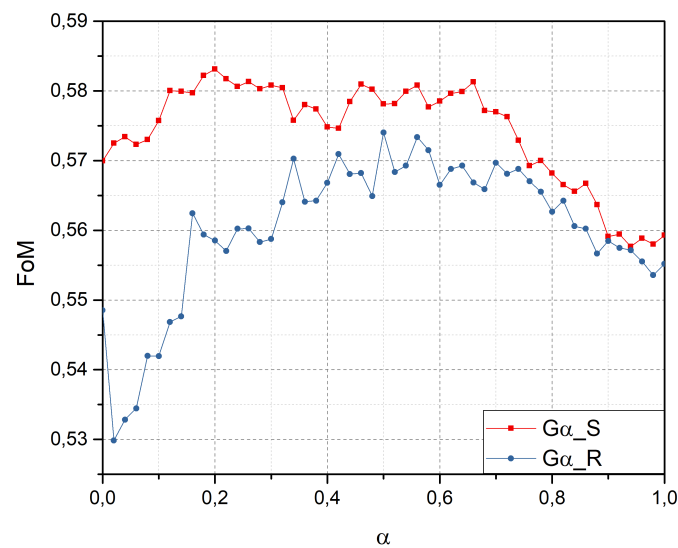


FIGURA 4.7. Média dos valores FoM sobre 25 imagens do método proposto, para  $\alpha = \{0, 0,02, \dots, 1\}$  e os elementos estruturantes  $R, S$ .

Detector de bordas	FoM
$G_{\alpha}$ ( com $S$ como elemento estrut.)	<b>0.5831</b>
$G_{\alpha}$ ( com $R$ como elemento estrut.)	<b>0.5740</b>
Gradiente Fuzzy ( $T_{nM}, I_{KD}$ )	0.5625
Canny	0.4297

CUADRO 4.1

Média dos valores FoM sobre 25 imagens dos detectores Canny e gradiente fuzzy comparado com o melhor valor FoM do método proposto.

### ORCID and License

Lisbeth Corbacho C. <https://orcid.org/0000-0002-9558-1949>,

Peter Sussner <https://orcid.org/0000-0002-8457-7127>,

This work is licensed under the [Creative Commons Attribution-NoComercial-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

### Referencias

- [1] Baczynski, M., Beliakov, G., Humberto, H. and Pradera, A. *Advances in Fuzzy Implication Functions*. Springer, 2013.
- [2] Birkhoff, G. *Lattice Theory*. Providence: American Mathematical Society, 3rd, ed., 1993.
- [3] Bowyer, K. Kranenburg, C. and Dougherty, S. *Edge detector evaluation using empirical ROC curves*, *Computer Vision and Image Understanding*, 2001; 84(1):77–103.
- [4] Bustince, H., Fernández, J., Kolesárová, A. and Mesiar, R. *Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions*, *Fuzzy Sets and Systems*, 2013; 220:69-77.
- [5] Canny, J. F. *A computational approach to edge-detection*, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1986; 8:679-700.
- [6] Davey, B. A. and Priestley, H. A. *Introduction to lattices and Order*. Cambridge University Press, 2002.
- [7] Deng, T. and Heijmans, H. J. *Grey-scale morphology based on fuzzy logic*, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2002; 16(2):155-171.
- [8] Deschrijver, G. and Cornelis, C. *Representability in interval-valued fuzzy set theory*, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2007; 15(3):345-361.
- [9] Grätzer, G. A. *Lattice Theory: First Concepts and Distributive Lattices*. San Francisco, CA: W. H. Freeman, 1971.
- [10] Heijmans, H. J. *Morphological image operators*, *Advances in Electronics and Electron Physics Suppl.*, Boston: Academic Press, c1994.
- [11] González-Hidalgo, M., Massanet, S., Mir, A. and Ruiz-Aguilera, D. *On the choice of the pair conjunction-implication into the fuzzy morphological edge detector*, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2015; 23(4):872-884.
- [12] González-Hidalgo, M. and Massanet, S. *A fuzzy mathematical morphology based on discrete t-norms: fundamentals and applications to image processing*, *Soft Computing*, 2014; 18(11):2297-2311
- [13] Grana, M., and Chyzyk, D. *Image understanding applications of lattice autoassociative memories*, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015; 27(9):1920-1932.
- [14] Klir, G., and Yuan, B. *Fuzzy sets and fuzzy logic, vol. 4*. Prentice hall New Jersey, 1995.
- [15] Kovesi, P. D. *Matlab and Octave functions for computer vision and image processing*, Centre for Exploration Targeting, School of Earth and Environment, The University of Western Australia, available from: <http://www.csse.uwa.edu.au/pk/research/matlabfns>, 2000; 147:230.

- [16] Law, T., Itoh, H. and Seki, H. Image filtering, edge detection, and edge tracing using fuzzy reasoning, *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 1996; 18(5):481-491.
- [17] Lopez-Molina, C., Marco-Detchart, C., Cerron, J., Bustince, H. and De Baets. Gradient extraction operators for discrete interval-valued data, in 16th IFSA World Congress; 9th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, *Atlantis Press*, 2015; 89:836-843.
- [18] Medina-Carnicer, R., Muñoz-Salinas, R., Yeguas-Bolívar, E. and Díaz-Mas, L. A novel method to look for the hysteresis thresholds for the Canny edge detector, *Pattern Recognition*, 2011; 44(6):1201-1211.
- [19] Nachtgaeel, M., Sussner, P., Mélangé, T. and Kerre, E. On the role of complete lattices in mathematical morphology: From tool to uncertainty model, *Information Sciences*, 2011; 181(10):1971-1988.
- [20] Nachtgaeel, M. and Kerre, E. Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies, *Fuzzy sets and systems*, 2001; 124(1):73-85.
- [21] Prewitt, J. "Object enhancement and extraction, *Picture Proc. Psychopictorics*, 1970; 75-149.
- [22] Sussner, P. and Valle, M. Classification of fuzzy mathematical morphologies based on concepts of inclusion measure and duality, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2008; 32(2):139-159.
- [23] Sussner, Nachtgaeel, P., Mélangé, M., Deschrijver, G., Esmi, E. and Kerre, E. Interval-valued and intuitionistic fuzzy mathematical morphologies as special cases of  $\mathbb{L}$ -fuzzy mathematical morphology, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2012; 43(1):50-71.
- [24] Sobel, I. E. Camera models and machine perception, 1970.