Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2019; Vol.06(2): 225 - 237.

Hipersuperfícies associadas a $\mathbb{S}^n$ por uma congruência de esferas.

Hypersurfaces associated to $\mathbb{S}^n$ by a sphere congruence.

Laredo Rennan Pereira Santos*

Received, Aug. 23, 2019 *Accepted, Oct. 29, 2019*

How to cite this article:
Pereira, L. *Hipersuperfícies associadas a* $\mathbb{S}^n$ *por uma congruência de esferas*. Selecciones Matemáticas. 2019; 6(2):225-237.
http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2019.02.09

Resumo

Neste trabalho é exibida uma condição suficiente para que uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ *seja o envelope de uma congruência de esferas cujo outro envelope esteja contido em uma esfera unitária. É fornecida uma parametrização local para tais envelopes dependendo de uma parametrização local ortogonal de* $\mathbb{S}^n$ *e descritas suas formas fundamentais. Por fim é apresentada uma condição necessária e suficiente para que tais hipersuperfícies estejam parametrizadas por linhas de curvaturas e para que sejam de rotação.*

Palavras-chave. Congruência de esferas, envelope de uma congruência de esferas, superfícies associadas por uma congruência de esferas

Abstract

In this work a sufficient condition is exhibited for a hypersurface in $\mathbb{R}^{n+1}$ *to be the envelope of a sphere congruence whose other envelope is contained in a unit sphere. A local parametrization for such envelopes is provided depending on an orthogonal local parametrization of* $\mathbb{S}^n$ *and their fundamental forms are described. Finally, a necessary and sufficient condition is presented so that such hypersurfaces are parametrized by lines of curvature and so that they are of rotation.*

keywords. sphere congruence, envelope of a sphere congruence, surfaces associated by a sphere congruence

1. Introduction. Parametrizar superfícies de modo a ser um envelope de uma congruência de esferas tem sido um método adotado no estudo de algumas classes de superfícies, em particular de superfícies Weingarten. Um trabalho pioneiro nesse sentido foi apresentado por Corro em [1], no qual é mostrado que qualquer superfície no espaço euclidiano pode ser parametrizada como um envelope de uma congruência de esferas cujo outro envelope está contido em um plano. Como aplicação, ele estuda superfícies Weingarten M no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ tal que a aplicação de Gauss hiperbólica G define uma congruência de esferas para a qual $X(M)$ e $G(X(M))$ são envelopes, onde $X : M \to \mathbb{H}^3$ é uma imersão.

Em [5] os autores utilizam a parametrização obtida por Corro para estudar superfícies no espaço hiperbólico cuja curvatura média H e curvatura Gaussiana K_I satisfazem a relação

$$2(H-1)e^{2\mu} + K_I(1-e^{2\mu}) = 0,$$

onde μ é uma função harmônica com respeito a forma quadrática $\sigma = -K_I I + 2(H-1)II$, em que I e II são a primeira e segunda forma quadrática da superfície, respectivamente. Essas superfícies são chamadas Superfícies Weingarten generalizada tipo harmônico (superfícies WGH).

Em [6] Machado generaliza a parametrização obtida por Corro e caracteriza as hipersuperfícies do espaço Euclidiano que são envelopes de uma congruência de esferas em que o outro envelope está contido em um hiperplano. Ele a utiliza para estudar uma classe de hipersuperfícies denotadas por Weingarten de tipo esférico.

*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Rua 64, Expansão Parque Lago, Formosa-Brasil. (laredo.santos@ifg.edu.br).

Dias [3] introduz outra maneira de parametrizar hipersuperfícies como envelopes de uma congruência de esferas na qual o outro envelope está contido em um hiperplano. Tal caracterização é adotada no estudo das superfícies Weingarten generalizada do tipo suporte distância especial (ou, por abreviação, superfícies WGSDE), as quais são superfícies S que satisfazem a relação

$$2\Psi H+\Lambda K=0,$$

onde Ψ e Λ são as funções suporte e distância quadrática definidas, respectivamente, por $\Psi(p)=\langle p,N(p)\rangle$, $\Lambda(p)=\langle p,p\rangle$, com $p\in S$, $N(p)$ o vetor unitário normal a S em p e $\langle .,.\rangle$ o produto escalar Euclidiano.

Através da parametrização obtida por Dias, Ruys [8] exibe uma classificação das superfícies mínimas de Laguerre com linhas de curvatura planas.

Em [7], Reyes e Riveros caracterizam as superfícies de $\mathbb{H}^3$ e $\mathbb{S}^3$ que são envelopes de uma congruência de esferas geodésicas em $\mathbb{H}^3$ e $\mathbb{S}^3$, respectivamente, na qual o outro envelope está contido em $\mathbb{H}^2\subset\mathbb{H}^3$ e $\mathbb{S}^2\subset\mathbb{S}^3$. Essa caracterização permite obter localmente uma parametrização das superfícies contidas em $\mathbb{H}^3$ e $\mathbb{S}^3$.

Métodos semelhantes ao uso de congruência de esferas são aplicados em [4] para a construção de superfícies com fibrado normal plano no espaço forma 4-dimensional da assinatura Lorentziana.

Motivados pelos trabalhos [3], [1] e [6] caracterizamos as hipersuperfícies Σ em $\mathbb{R}^{n+1}$ que são envelopes de uma congruência de esferas cujo outro envelope está contido em $\mathbb{S}^n$. Determinamos para este caso a função raio da congruência em termos das funções suporte e distância quadrática, notando ser ela um invariante geométrico da hipersuperfície. Tal caracterização permite estudar classes de superfícies Weingarten generalizada que satisfazem uma relação diferenciável $U(k_i,\Psi,R)\equiv 0$ envolvendo as curvaturas principais k_i, a função suporte Ψ e a função raio R.

Além disso, fornecemos condições para que uma tal hipersuperfície Σ esteja associada a $\mathbb{S}^n$ por uma transformação de Ribaucour e para que seja de rotação.

2. Preliminares. Nesta seção estabelecemos a notação usada no trabalho e apresentamos alguns resultados clássicos da Geometria Diferencial. Ao longo de todo o artigo U denota um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ um ponto arbitrário em U. Seja $X:U\subset\mathbb{R}^n\to\Sigma,\quad n\geqslant 2$, uma parametrização de uma hipersuperfície Σ em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $N:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ um campo vetorial unitário normal à X. Dessa forma, podemos escrever

$$N_{,i}=\sum_{j=1}^{n}W_{ij}X_{,j},\quad 1\leq i\leq n,$$

onde o subscrito $,i$ denota derivada parcial com respeito à i-ésima variável u_i. A matriz $W=(W_{ij})$ é chamada a matriz de Weingarten de Σ.

O vetor $X_{,ij}$, $1\leqslant i,j\leqslant n$, pode ser denotado por

$$X_{,ij}=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}X_{,k}+b_{ij}N,\qquad 1\leqslant i,j\leqslant n, \tag{2.1}$$

onde os coeficientes Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da métrica $g_{ij}=\langle X_{,i},\ X_{,j}\rangle$. Se tomarmos a parametrização X de Σ tal que a métrica g_{ij} seja conforme à Euclidiana, os símbolos de Christoffel são dados por

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{ij}^{k}=0,\qquad \text{para } i,j,k \text{ distintos},\\
&\Gamma_{ij}^{j}=\frac{g_{jj,i}}{2g_{jj}},\qquad \text{para todo } i,j;\\
&\Gamma_{ii}^{j}=-\frac{g_{ii,j}}{2g_{jj}}=-\frac{g_{ii}}{g_{jj}}\Gamma_{ji}^{i}\ ,\qquad \text{para } i\neq j.
\end{aligned}$$

Além disso, dizemos que Σ está parametrizada por linhas de curvatura se

$$N_{,i}=-k_iX_{,i}\ ,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

onde k_i são as curvaturas principais de Σ. Neste caso, os coeficientes b_{ij} em (2.1) são tais que $b_{ij}=0,\quad i\neq j$, e $b_{ii}=-k_ig_{ii}$, quando a métrica g_{ij} é conforme à Euclidiana.

A primeira forma fundamental I de Σ é a restrição do produto interno canônico de $\mathbb{R}^{n+1}$ aos hiperplanos tangentes $T_p\Sigma$, isto é, para cada $p\in\Sigma$,

$$I_p(w_1,w_2)=\langle w_1,w_2\rangle\ ,\qquad w_1,w_2\in T_p\Sigma.$$

As segunda e terceira formas fundamentais de Σ, denotadas por II e III, respectivamente, são definidas por

$$II_p\big(w_1, w_2\big) = \langle -dN_p(w_1), w_2\rangle\,, \qquad w_1, w_2 \in T_p\Sigma,$$

$$III_p\big(w_1, w_2\big) = \langle -dN_p(w_1), -dN_p(w_2)\rangle\,,$$

onde $p \in \Sigma$ e dN_p é a diferencial da aplicação normal de Gauss em p.

Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Dizemos que $e_{n+1} = (0, ..., 0, 1)$ e $-e_{n+1} = (0, ..., 0, -1)$ são, respectivamente, os pólos norte e sul de $\mathbb{S}^n$. As projeções estereográficas $\pi_- : \mathbb{S}^n\backslash\{-e_{n+1}\} \to \mathbb{C}$ e $\pi_+ : \mathbb{S}^n\backslash\{e_{n+1}\} \to \mathbb{C}$ são difeomorfismos definidos por

$$\pi_-(q) = \frac{q - \langle q, e_{n+1}\rangle\, e_{n+1}}{1 + \langle q, e_{n+1}\rangle}, \qquad \pi_+(q) = \frac{q - \langle q, e_{n+1}\rangle\, e_{n+1}}{1 - \langle q, e_{n+1}\rangle}, \quad q \in \mathbb{S}^n,$$

cujas respectivas aplicações inversas são dadas por

$$\pi_-^{-1}(p) = \frac{2p + (1 - |p|^2\ )e_{n+1}}{1 + |p|^2}, \qquad \pi_+^{-1}(p) = \frac{2p + (\ |p|^2 - 1)e_{n+1}}{1 + |p|^2}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

3. Congruência de esferas. Nesta seção introduzimos a noção de congruência de esferas, a qual permite estabelecer uma associação entre hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$. Uma vez garantida a existência de uma tal associação entre duas hipersuperfícies, pode-se construir uma parametrização local para uma destas a partir da outra. Na sequência, fornecemos uma condição suficiente para que uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ esteja associada a $\mathbb{S}^n$ por uma congruência de esferas.

Definição 1. *Uma congruência de esferas em $\mathbb{R}^{n+1}$ é uma família a n-parâmetros de esferas, cujos centros estão em uma hipersuperfície $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e com função raio diferenciável.*

Localmente, podemos considerar Σ_0 parametrizada por $X_0 : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$. Assim, para cada ponto $u \in U$, existe uma esfera centrada em $X_0(u)$ com raio $R(u)$, onde R é uma função real diferenciável.

Um *envelope de uma congruência de esferas* é uma hipersuperfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$, tal que em cada ponto $p \in \Sigma$ a hipersuperfície Σ é tangente a uma esfera da congruência de esferas.

Dizemos que duas hipersuperfícies Σ e $\widetilde{\Sigma}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ estão *associadas por uma congruência de esferas* se existe um difeomorfismo $\varphi : \Sigma \to \widetilde{\Sigma}$ tal que em pontos correspondentes p e $\varphi(p)$ as variedades são tangentes à mesma esfera da congruência de esferas. Em termos mais precisos, temos a seguinte definição:

Definição 2. *As hipersuperfícies Σ e $\widetilde{\Sigma}$ estão associadas por uma congruência de esferas se existir uma função diferenciável $R : \Sigma \to \mathbb{R}$, chamada função raio, e um difeomorfismo $\varphi : \Sigma \to \widetilde{\Sigma}$, tais que*

- *$p + R(p)N(p) = \varphi(p) + R(p)\widetilde{N}(\varphi(p))$, para todo $p \in \Sigma$, onde N e $\widetilde{N}$ são as aplicações normal de Gauss de Σ e $\widetilde{\Sigma}$, respectivamente.*
- *O conjunto $p + R(p)N(p)$, $\ p \in \Sigma$, é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$, chamada a variedade dos centros.*

Dizemos ainda que Σ e $\widetilde{\Sigma}$ estão localmente associadas por uma congruência de esferas se, para cada $p \in \Sigma$, existir uma vizinhança de p em Σ associada por uma congruência de esferas a um aberto de $\widetilde{\Sigma}$.

Deste modo, se Σ e $\widetilde{\Sigma}$ estão associadas por uma congruência de esferas, as linhas normais em pontos correspondentes se intersectam em um ponto equidistante às hipersuperfícies e é requerido que o conjunto destes pontos de intersecção definam uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dada duas hipersuperfícies associadas por uma congruência de esferas, se o difeomorfismo φ preserva li nhas de curvatura dizemos que as hipersuperfícies estão associadas por uma *transformação de Ribaucour*. Mais precisamente, segue a definição abaixo.

Definição 3. *Sejam Σ e $\widetilde{\Sigma}$ hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{n+1}$. Considere $e_1, ..., e_n$ direções principais ortogonais definidas sobre Σ. Dizemos que Σ e $\widetilde{\Sigma}$ estão associadas por uma transformação de Ribaucour se estão associadas por uma congruência de esferas e o difeomorfismo $\varphi : \Sigma \to \widetilde{\Sigma}$ é tal que $d\varphi(e_i)$, $\ 1 \le i \le n$, são direções principais de $\widetilde{\Sigma}$.*

O exemplo a seguir, introduzido em [2], exibe duas superfícies associadas por uma congruência de esferas e a variedade dos centros correspondente.

Exemplo 1. *Considere C a metade de um cilindro circular reto localmente parametrizado por*

$$X_1(t, \theta) = (\cos\theta, \sin\theta, t), \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad t > 0.$$

Seja U o complemento do disco unitário no plano xy, localmente parametrizado por

$$X_2(t, \theta) = \big((1 + t)\cos\theta, (1 + t)\sin\theta, 0\big) \quad , 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad t > 0.$$

Um campo unitário normal à C é dado por $N_1(t,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, enquanto o campo constante $N_2(t,\theta) = (0,0,1)$ é unitário normal à U. Considere $R : C \to \mathbb{R}$ dada por $R(\cos\theta, \sin\theta, t) = t$ e seja $\varphi : C \to U$ definida por

$$\varphi(\cos\theta, \sin\theta, t) = \big((1+t)\cos\theta, (1+t)\sin\theta, 0\big)$$

Se $p = (\cos\theta, \sin\theta, t) \in C$, vale, então, que

$$\begin{aligned} p + R(p)N_1(p) &= \big((1+t)\cos\theta, (1+t)\sin\theta, t\big) \\ &= \varphi(p) + R(p)N_2(p) \end{aligned}$$

Deste modo, C e U estão associados por uma congruência de esferas, em que R é a função raio. A variedade dos centros é o conjunto de pontos de intersecção acima, o qual é o cone truncado obtido por rotacionar o segmento $(1+t, 0, t)$, $t > 0$, em torno do eixo z.

Em [2], os autores mostram que uma esfera ou um hiperplano em $\mathbb{R}^{n+1}$ podem ser localmente associados por uma transformação de Ribaucour a qualquer hipersuperfície dada em $\mathbb{R}^{n+1}$ que admita n campos ortogonais de direções principais. O lema a seguir dá uma condição que garante uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ estar localmente associada a uma esfera unitária por uma congruência de esferas e fornece uma expressão para a função raio desta congruência.

Lema 1. *Seja Σ uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ com aplicação normal de Gauss N e E a esfera unitária de centro C. Se $\langle p - C, N(p)\rangle \neq 1$, para todo $p \in \Sigma$, então existe uma congruência de esferas em que Σ é um dos envelopes e o outro está contido em E. Além disso, a função raio $R : \Sigma \to \mathbb{R}$ é dada por*

$$R(p) = \frac{1 - |p - C|^2}{2\big(\langle p - C, N(p)\rangle - 1\big)}. \tag{3.1}$$

Demonstração: Considere $p \in \Sigma$. Queremos definir uma aplicação $\varphi : \Sigma \to E$, tal que vale a igualdade

$$p + R(p)N(p) = \varphi(p) + R(p)\left(\varphi(p) - C\right), \tag{3.2}$$

para uma função diferenciável $R : \Sigma \to \mathbb{R}$. Observamos que se uma tal aplicação existe, então $R(p) \neq -1$, para todo $p \in \Sigma$. De fato, da igualdade (3.2), temos

$$\big\langle p - C, N(p)\big\rangle + R(p) \;=\; \big\langle \varphi(p) - C, N(p)\big\rangle + R(p)\big\langle \varphi(p) - C, N(p)\big\rangle,$$

de modo que se existir $p \in \Sigma$ tal que $R(p) = -1$, então $\langle p - C, N(p)\rangle = 1$, o que contraria nossa hipótese. Portanto, se definirmos φ avaliada em um ponto $p \in \Sigma$ como

$$\varphi(p) = \frac{R(p)C + p + R(p)N(p)}{1 + R(p)}, \tag{3.3}$$

temos que vale a igualdade (3.2). Além disso, é preciso que a imagem de φ em um ponto p pertença à esfera unitária E centrada em C, isto é, $|\varphi(p) - C|^2 = 1$, para todo $p \in \Sigma$. Por um cálculo simples, obtemos

$$|\varphi(p) - C|^2 = \frac{1}{(1 + R(p))^2}\Big[|p - C|^2 + 2R(p)\big\langle p - C, N(p)\big\rangle + R(p)^2\Big],$$

e da condição acima vem que

$$R(p) = \frac{1 - |p - C|^2}{2\big(\langle p - C, N(p)\rangle - 1\big)},$$

nos dando uma expressão explícita para a função raio R. Substituindo-a em (3.3), encontramos que

$$\varphi(p) = \frac{2p\big(\langle p - C, N(p)\rangle - 1\big) + \big(1 - |p - C|^2\big)\big(N(p) + C\big)}{2\big(\langle p - C, N(p)\rangle - 1\big) + 1 - |p - C|^2}$$

a qual é um difeomorfismo local. □

Nesse sentido, o lema expressa que, dada uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ e uma esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$, podemos construir uma congruência de esferas entre elas, ao menos localmente.

Observação 1: Fixada uma esfera unitária E em $\mathbb{R}^{n+1}$, para cada hipersuperfície Σ associada a E por uma congruência de esferas, a função raio introduzida no Lema (1) é um invariante geométrico, análogo às curvaturas média e Gaussiana, as quais não dependem de uma parametrização de Σ.

4. Superfícies associadas a $\mathbb{S}^n$ por uma congruência de esferas. Nesta seção caracterizamos as hipersuperfícies Σ em $\mathbb{R}^{n+1}$ localmente associadas a $\mathbb{S}^n$ por uma congruência de esferas, exibindo uma parametrização local para Σ que depende de uma parametrização local ortogonal da esfera unitária. Além disso, para uma parametrização específica de $\mathbb{S}^n$, damos uma condição necessária e suficiente para que uma tal hipersuperfície Σ seja de rotação.

O próximo lema é uma adaptação do Teorema 2.1 em [1], para o qual consideramos uma hipótese adicional.

Lema 2. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma parametrização local para uma hipersuperfície M em $\mathbb{R}^{n+1}$, cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura ortogonais, λ^i as correspondentes curvaturas principais e N um campo vetorial unitário normal à M. Considere $\tilde{M}$ uma hipersuperfície associada a M por uma congruência de esferas, tal que $1 + \lambda^i R \neq 0$, para todo i, onde $R : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a função raio da congruência de esferas. O campo vetorial unitário $\tilde{N}$ normal a $\tilde{M}$ é dado por*

$$\tilde{N} = \frac{1}{\Delta + 1}\left(\sum_{i=1}^{n} 2Z^i X_{,i} + (\Delta - 1)N\right),$$

onde

$$Z^i = \frac{R_{,i}}{g_{ii}(1+\lambda^i R)}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_{,i}^2}{g_{ii}(1+\lambda^i R)^2}, \quad g_{ii} = \langle X_{,i},\ X_{,i}\rangle .$$

Demonstração: Como $\tilde{M}$ está associada a M por uma congruência de esferas, por definição existe uma parametrização local $\tilde{X}$ de $\tilde{M}$, tal que

$$\tilde{X} + R\tilde{N} = X + RN,$$

onde $\tilde{N}$ é um campo vetorial unitário normal a $\tilde{M}$, que pode ser escrito como

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^{n} a^i X_{,i} + a^{n+1}N, \tag{4.1}$$

onde

$$\sum_{i=1}^{n}(a^i)^2 g_{ii} + (a^{n+1})^2 = 1. \tag{4.2}$$

Dada as condições estabelecidas no enunciado, valem as relações abaixo

$$\langle N, X_{,i}\rangle = 0, \quad 1 \le i \le n, \tag{4.3}$$

$$\langle X_{,i},\ X_{,j}\rangle = \delta_{ij} g_{ii}, \quad 1 \le i, j \le n, \tag{4.4}$$

$$\left\langle \tilde{N}, \tilde{X}_{,i}\right\rangle = 0, \quad 1 \le i \le n, \tag{4.5}$$

$$\left\langle \tilde{N}, \tilde{N}_{,i}\right\rangle = 0, \quad 1 \le i \le n. \tag{4.6}$$

Escrevendo $\tilde{X} = X + R(N - \tilde{N})$ e derivando em relação a i-ésima variável, obtemos

$$\tilde{X}_{,i} = (1 + \lambda^i R)X_{,i} + R_{,i}(N - \tilde{N}) - R\tilde{N}_{,i}.$$

Da equação (4.5), vale que

$$0 = \left\langle (1 + \lambda^i R)X_{,i} + R_{,i}(N - \tilde{N}) - R\tilde{N}_{,i}\ ,\ \tilde{N}\right\rangle$$

.

Utilizando a expressão (4.1) para $\tilde{N}$ e as equações (4.6), (4.3) e (4.4), vem que

$$(1 + \lambda^i R)\left\langle X_{,i}, \tilde{N}\right\rangle + R_{,i}\left\langle N, \tilde{N}\right\rangle - R_{,i} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1 + \lambda^i R)a^i g_{ii} + R_{,i}(a^{n+1} - 1) = 0.$$

Uma vez que $1 + \lambda^i R \neq 0$, para todo i, segue a relação

$$a^i = \frac{R_{,i}(1 - a^{n+1})}{g_{ii}(1 + \lambda^i R)}, \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{4.7}$$

Substituindo na equação (4.2), obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{R_{,i}^2 (1 - a^{n+1})^2}{g_{ii}(1 + \lambda^i R)^2} + (a^{n+1})^2 = 1, \tag{4.8}$$

Usando a notação

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_{,i}^2}{g_{ii}(1 + \lambda^i R)^2},$$

a equação (4.8) pode ser escrita como

$$(a^{n+1})^2(\Delta + 1) - 2\Delta a^{n+1} + \Delta - 1 = 0.$$

Resolvendo-a como uma equação quadrática em a^{n+1}, obtemos

$$a^{n+1} = 1 \quad \text{ou} \quad a^{n+1} = \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1}.$$

Se $a^{n+1} = 1$, da equação (4.2) segue que $a^i = 0$, para todo i, e, neste caso, $X = \tilde{X}$, o que não nos convém. Tomamos, então,

$$a^{n+1} = \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1},$$

e, substituindo em (4.7), ficamos com

$$a^i = \frac{2R_{,i}}{g_{ii}(\Delta + 1)(1 + \lambda^i R)},$$

de onde segue o resultado. □

O próximo resultado estabelece que se uma hipersuperfície Σ está localmente associada a uma esfera unitária por uma congruência de esferas, podemos parametrizar Σ a partir de uma parametrização da esfera. Por simplicidade, a partir de agora consideramos esferas centradas na origem.

Teorema 1. *Sejam Σ uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\langle p, N(p)\rangle \neq 1$, para todo $p \in \Sigma$, onde N é a aplicação normal de Gauss de Σ. Para cada parametrização local ortogonal $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ de $\mathbb{S}^n$, existe uma função diferenciável $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ associada a esta parametrização, tal que Σ pode ser localmente parametrizada por*

$$X(u) = Y(u) - 2\left(\frac{h(u) + c}{S(u)}\right)\big[\nabla_L h(u) + h(u)Y(u)\big], \qquad u \in U, \tag{4.9}$$

onde a função h satisfaz $h(u) \neq 0$, para todo $u \in U$, c é uma constante real não-nula e

$$S = \left|\nabla_L h\right|^2 + h^2, \tag{4.10}$$

com $L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j}\rangle$.

Nestas coordenadas, a normal de Gauss N de Σ é dada por

$$N(u) = Y(u) - 2\frac{h(u)}{S(u)}\big[\nabla_L h(u) + h(u)Y(u)\big]. \tag{4.11}$$

Além disso, a matriz de Weingarten W de Σ é dada por

$$W = \big[SI - 2hV\big]\big[SI - 2\big(h(u) + c\big)V\big]^{-1}, \tag{4.12}$$

onde $V = (V_{ij})$ é dada por

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}}\left(h_{,ij} - \sum_{k}^{n} h_{,k}\Gamma_{ij}^k + hL_{ij}\delta_{ij}\right), \tag{4.13}$$

e I é a matriz identidade $n \times n$. A condição de regularidade de X é dada por

$$P = det\left[SI - 2\big(h(u) + c\big)V\right] \neq 0. \tag{4.14}$$

Reciprocamente, se $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ é uma parametrização local ortogonal e $h : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que não se anula em nenhum ponto e satisfaz (4.14), então (4.9) define uma imersão em $\mathbb{R}^{n+1}$ com normal de Gauss N dada por (4.11), matriz de Weingarten descrita por (4.12) e $\langle X, N\rangle \neq 1$ em todo ponto.

Demonstração: Como $\langle p, N(p)\rangle \neq 1$, para todo $p \in \Sigma$, segue pelo Lema (1) que Σ e $\mathbb{S}^n$ estão localmente associadas por uma congruência de esferas. Assim, considerando $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ uma parametrização local ortogonal da esfera unitária, existem uma parametrização local $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \Sigma$ e uma função $R : U \to \mathbb{R}$ dada por (3.1), satisfazendo

$$X(u) + R(u)N(u) = Y(u) + R(u)Y(u), \tag{4.15}$$

para todo $u \in U$. Seja $h : U \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(u) = -\frac{c}{R(u) + 1},$$

onde c é uma constante real não nula. Dessa maneira, podemos escrever a função raio R como

$$R(u) = -\frac{h(u) + c}{h(u)}. \tag{4.16}$$

Uma vez que toda direção na esfera $\mathbb{S}^n$ é principal, vale que as curvas coordenadas da parametrização $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ são linhas de curvatura ortogonais. Além disso, já que as curvaturas principais λ^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, da esfera unitária em qualquer ponto são iguais a 1 e a função raio R é diferente de -1 em todo ponto, vale que $1 + \lambda^i R \neq 0$ sempre, para todo i. Portanto, as parametrizações Y de $\mathbb{S}^n$ e X de Σ satisfazem as hipóteses do Lema (2), de modo que o campo unitário N normal a Σ é dado por

$$N = \frac{1}{\Delta + 1}\left(\sum_{j=1}^{n} 2Z^j Y_{,j} + (\Delta - 1)Y\right),$$

onde

$$Z^j = \frac{R_{,j}}{(1+R)L_{jj}}, \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{R_{,j}^2}{(1+R)^2 L_{jj}}, \qquad L_{jj} = \langle Y_{,j}, Y_{,j}\rangle.$$

Portanto, podemos escrever

$$Y - N = -\frac{2}{\Delta + 1}\left[\sum_{j=1}^{n} Z^j Y_{,j} - Y\right].$$

De (4.16), temos

$$R_{,j} = \frac{c h_{,j}}{h^2}.$$

Dessa maneira,

$$Z^j = -\frac{h_{,j}}{h L_{jj}}.$$

e, assim,

$$Y - N = \frac{2}{h(\Delta + 1)}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j} + hY\right].$$

Agora note que $h^2(\Delta + 1) = S$, com S dado como em (4.10). Dessa forma,

$$N = Y - \frac{2h}{S}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j} + hY\right).$$

Por fim, notando que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j},$$

é a expressão do gradiente de h na métrica $L = (L_{ij})$, dada por $L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle$, obtemos (4.11).

Fazendo

$$\eta = \sum_{j=1}^{n} \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j} + hY, \tag{4.17}$$

e da equação (4.15), segue que a parametrização $X : U \to \Sigma$ pode ser escrita como

$$X = Y - 2\left(\frac{h+c}{S}\right)\eta. \tag{4.18}$$

Para obtermos a matriz de Weingarten de X, consideremos a derivada $\eta_{,i}$, dada por

$$\eta_{,i} = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{h_{,j}}{L_{jj}^2} L_{jj,i} \right) Y_{,j} + \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} \right] + h_{,i} Y + h Y_{,i}.$$

Usando as igualdades

$$\frac{L_{jj,i}}{L_{jj}} = 2\Gamma_{ij}^{j}\ , \qquad \text{para todo } i, j.$$
$$\Gamma_{ij}^{k} = 0, \qquad \text{para } i, j, k \text{ distintos}$$

e uma vez que as curvas coordenadas da esfera são linhas de curvatura, vale que

$$\eta_{,i} = \left(\frac{h_{,ii}}{L_{ii}} - 2\frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^{i} \right) Y_{,i} + \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ii}^{k} Y_{,k} + \sum_{j \neq i}^{n} \left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^{j} \right) Y_{,j} +$$
$$+ \sum_{j \neq i}^{n} \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^{i} Y_{,i} + h Y_{,i}.$$

Reescrevendo o primeiro somatório na expressão acima como

$$\frac{h_{,i}}{L_{ii}} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ii}^{k} Y_{,k} = \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^{i} Y_{,i} + \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \sum_{j \neq i}^{n} \Gamma_{ii}^{j} Y_{,j},$$

ficamos com

$$\eta_{,i} = \left(\frac{h_{,ii}}{L_{ii}} - \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^{i} + \sum_{j \neq i}^{n} \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^{i} + h \right) Y_{,i}$$
$$+ \sum_{j \neq i}^{n} \left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^{j} + \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^{j} \right) Y_{,j}.$$

Como $\Gamma_{ii}^{j} = -\frac{L_{ii}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^{i}$, para $i \neq j$, obtemos que

$$\eta_{,i} = \left(\frac{h_{,ii}}{L_{ii}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{h_{,j}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^{j} + h \right) Y_{,i} + \sum_{j \neq i}^{n} \left(\frac{h_{,ij}}{L_{jj}} - \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ij}^{j} - \frac{h_{,i}}{L_{jj}} \Gamma_{ij}^{i} \right) Y_{,j}.$$

Considerando a matriz $V = (V_{ij}),\ \ 1 \leq i, j \leq n$, dada por

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ij} - \sum_{k} h_{,k} \Gamma_{ij}^{k} + h L_{ij} \delta_{ij} \right),$$

teremos que

$$\eta_{,i} = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} Y_{,j}. \tag{4.19}$$

Ainda em busca da matriz de Weingarten de X, calculemos a derivada $S_{,i}$. Para isso, notamos que $\langle \eta, \eta \rangle = S$. Desse modo,

$$S_{,i} \;=\; 2\,\langle \eta, \eta_{,i} \rangle \;=\; 2\sum_{j=1}^{n} V_{ij} h_{,j}. \tag{4.20}$$

Com isso em mãos, passemos para o cálculo da derivada $X_{,i}$. De (4.9), temos

$$X_{,i} = Y_{,i} - 2\left(\frac{h+c}{S}\right)\eta_{,i} - 2\left(\frac{h_{,i}}{S} - \left(\frac{h+c}{S^2}\right)S_{,i}\right)\eta.$$

De (4.19) e de (4.20), vem

$$\begin{aligned} X_{,i} &= Y_{,i} - 2\left(\frac{h+c}{S}\right)\sum_{j=1}^{n} V_{ij} Y_{,j} - 2\left(\frac{h_{,i}}{S} - \frac{2(h+c)}{S^2}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} h_{,j}\right)\eta \\ &= \frac{1}{S}\sum_{j=1}^{n}\left[SI - 2(h+c)V\right]_{ij} Y_{,j} - \frac{2}{S^2}\sum_{j=1}^{n}\left[SI - 2(h+c)V\right]_{ij} h_{,j}\eta \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{S^2}\left[SI - 2(h+c)V\right]_{ij}\left(SY_{,j} - 2h_{,j}\eta\right)\right). \end{aligned} \tag{4.21}$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$. Por outro lado, de (4.11), temos que

$$N_{,i} = \frac{1}{S}\left(SY_{,i} - 2h\eta_{,i}\right) - \frac{2}{S^2}\left(Sh_{,i} - hS_{,i}\right).\eta$$

e de (4.19) e (4.20) obtemos

$$N_{,i} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{S^2}\left[SI - 2hV\right]_{ij}\left(SY_{,j} - 2h_{,j}\eta\right)\right), \tag{4.22}$$

Afirmamos que a matriz de Weingarten de X é dada por

$$W = \left[SI - 2hV\right]\left[SI - 2(h+c)V\right]^{-1}.$$

Com efeito, renomeando as matrizes $SI - 2hV$ e $SI - 2(h+c)V$ por C e D, respectivamente, e fazendo $T_s = \frac{1}{S^2}\left(SY_{,s} - 2h_{,s}\eta\right)$, então

$$\sum_{j}^{n} W_{ij} X_{,j} = \sum_{j,k,s}^{n} C_{ik}(D^{-1})_{kj} D_{js} T_s = \sum_{k,s}^{n}\{C_{ik}\sum_{j=1}^{n}\{(D^{-1})_{kj} D_{js}\} T_s\} = \sum_{k}^{n} C_{ik} T_k \;=\; N_{,i}.$$

o que mostra ser W a matriz de Weingarten de X.

Reciprocamente, seja $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ uma parametrização local ortogonal, $h : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável cumprindo (4.14), com $h(u) \neq 0$ em todo ponto $u \in U$ e X como em (4.9). Uma vez que

$$\left\langle SY_{,j} - 2h_{,j}\eta\,,\; SY_{,i} - 2h_{,i}\eta \right\rangle = S^2 L_{ij}, \qquad L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

o conjunto de vetores $\{SY_{,j} - 2h_{,j}\eta\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, forma uma base para o espaço tangente de X em cada ponto. Dessa forma, de (4.21) vem que (4.14) é uma condição suficiente para que X seja uma imersão. Nota-se por um cálculo direto que o vetor (4.11) é unitário e normal a X. Além disso, procedendo como antes, obtemos (4.12) como a matriz de Weingarten de X. Por fim, uma vez que

$$\langle X, N \rangle = 1 + \frac{2hc}{S},$$

concluímos que $\langle X, N \rangle \neq 1$ em todo ponto de U, já que $h \neq 0$ em todo U. □

Observação 2: *A parametrização encontrada por Dias [3] para hipersuperfícies Σ associadas ao hiperplano por uma congruência de esferas possui matriz de Weingarten dada por $W = 2(TV - 2RI_n)^{-1}$, onde T é uma função real, I_n é a matriz identidade $n \times n$ e $V = (V_{ij})$ é tal que*

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}}\big(h_{,ij} - \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} h_{,l}\big),$$

para alguma função diferenciável real h e Γ_{ij}^{l} sendo os símbolos de Christoffel numa métrica conforme L_{ij}.

Já a parametrização encontrada por Machado [6] para estas hipersuperfícies é tal que sua matriz de Weingarten é dada por $W = 2V\big(SI - 2RV\big)^{-1}$, onde S é uma função real que não se anula em nenhum ponto, R é a função raio da congruência e V é a matriz $n \times n$ dada por

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}}\left(R_{,ij} - \sum_{k}^{n} R_{,k}\Gamma_{ij}^{k}\right). \tag{4.23}$$

As superfícies Σ de $\mathbb{S}^3$ localmente associadas a $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ por meio de uma congruência de esferas geodésicas em $\mathbb{S}^3$, consideradas em [7], possuem matriz de Weingarten $W = 2V\big(SI_2 - 2hV\big)^{-1}$, onde h é a função raio da congruência de esferas geodésicas, I_2 é a matriz identidade 2×2 e a matriz V é dada por

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}}\left(h_{,ij} - \sum_{k} h_{,k}\Gamma_{ij}^{k} + hL_{ij}\delta_{ij}\right),$$

idêntica à encontrada para o nosso caso, salvo por h ser especificamente a função raio.

Corolario 1. *Nas condicões do Teorema (1), as formas fundamentais I, II e III de Σ, em coordenadas locais, são dadas por*

$$I \;:\; \langle X_{,i}\,,\; X_{,j}\rangle = \frac{4(c+h)^2}{S^2}\sum_k V_{ik}V_{jk}L_{kk} - \frac{2}{S}(c+h)(V_{ij}L_{jj} + V_{ji}L_{ii}) + L_{ij}. \tag{4.24}$$

$$II \;:\; \langle X_{,i}\,,\; N_{,j}\rangle = \frac{4h}{S^2}(c+h)\sum_k V_{ik}V_{jk}L_{kk} - \frac{2}{S}\big((h+c)V_{ij}L_{jj} + hV_{ji}L_{ii}\big) + L_{ij}. \tag{4.25}$$

$$III \;:\; \langle N_{,i}\,,\; N_{,j}\rangle = \frac{4h^2}{S^2}\sum_k V_{ik}V_{jk}L_{kk} - \frac{2h}{S}(V_{ij}L_{jj} + V_{ji}L_{ii}) + L_{ij}.$$

Demonstração: Para obtermos os coeficientes da primeira forma fundamental, lembramos que

$$X_{,i} = \sum_k \big(S\delta_{ik} - 2(c+h)V_{ik}\big)\big(\frac{1}{S}Y_{,k} - \frac{2h_{,k}}{S^2}\eta\big).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle X_{,i},\; X_{,j}\rangle &= \sum_{k,s}\big(S\delta_{ik} - 2(c+h)V_{ik}\big)\big(S\delta_{js} - 2(c+h)V_{js}\big)\left\langle \frac{1}{S}Y_{,k} - \frac{2h_{,k}}{S^2}\eta, \frac{1}{S}Y_{,s} - \frac{2h_{,s}}{S^2}\eta\right\rangle \\
&= \frac{1}{S^2}\sum_{k,s}\big[S^2\delta_{ik}\delta_{js} - 2S(c+h)\delta_{ik}V_{js} - 2S(c+h)\delta_{js}V_{ik} + 4(c+h)^2V_{ik}V_{js}\big]\,L_{ks} \\
&= \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk}L_{kk} - \frac{2}{S}(c+h)(V_{ji}L_{ii} + V_{ij}L_{jj}) + \frac{4}{S^2}(c+h)^2\sum_k V_{ik}V_{jk}L_{kk}.
\end{aligned}$$

Notamos que

$$\sum_k \delta_{ik}\delta_{jk}L_{kk} = \left\{\begin{array}{ll} L_{ii}, & \text{se } \; i=j \\ 0, & \text{se } \; i\neq j \end{array}\right. \;=\; L_{ij}.$$

Obtemos, assim,

$$\langle X_{,i},\; X_{,j}\rangle = \frac{4}{S^2}(c+h)^2\sum_k V_{ik}V_{jk}L_{kk} - \frac{2}{S}(c+h)(V_{ij}L_{jj} + V_{ji}L_{ii}) + L_{ij}.$$

Por outro lado, podemos escrever

$$N_{,j} = \sum_s (S\delta_{js} - 2hV_{js})\,\big(\frac{1}{S}Y_{,s} - \frac{2h_{,s}}{S^2}\eta\big).$$

e procedendo de maneira análoga, os coeficientes da segunda forma são dados por

$$\begin{aligned}\langle X_{,i},\ N_{,j}\rangle &= \left\langle \sum_k (S\delta_{ik} - 2(c+h)V_{ik})\left(\frac{1}{S}Y_{,k} - \frac{2h_{,k}}{S^2}\eta\right), \sum_s (S\delta_{js} - 2hV_{js})\left(\frac{1}{S}Y_{,s} - \frac{2h_{,s}}{S^2}\eta\right)\right\rangle \\ &= L_{ij} - \frac{2}{S}\big((h+c)V_{ij}L_{jj} + hV_{ji}L_{ii}\big) + \frac{4h}{S^2}(h+c)\sum_k V_{ik}V_{jk}L_{kk}.\end{aligned}$$

Por fim, para os coeficientes da terceira forma, temos

$$\begin{aligned}\langle N_{,i},\ N_{,j}\rangle &= \sum_{k,s} (S\delta_{ik} - 2hV_{ik})\,(S\delta_{js} - 2hV_{js})\left\langle \frac{1}{S}Y_{,k} - \frac{2h_{,k}}{S^2}\eta\ ,\ \frac{1}{S}Y_{,s} - \frac{2h_{,s}}{S^2}\eta\right\rangle \\ &= L_{ij} - \frac{2h}{S}(V_{ij}L_{jj} + V_{ji}L_{ii}) + \frac{4h^2}{S^2}\sum_k V_{ik}V_{jk}L_{kk}.\end{aligned}$$

□

Corolario 2. *Se a matriz $V = (V_{ij})$ é diagonal, então a hipersuperfície Σ, descrita pelo Teorema (1), está parametrizada por linhas de curvatura e está associada à $\mathbb{S}^n$ por uma transformação de Ribaucour.*

Demonstração: Note que se $V = (V_{ij})$ é diagonal, pelas equações (4.24) e (4.25) temos que

$$\langle X_{,i},\ X_{,j}\rangle = -\langle X_{,i},\ N_{,j}\rangle = 0, \qquad para \quad i \neq j,$$

de modo que Σ está parametrizada por linhas de curvatura.

Notamos ainda que $d(Y \circ X^{-1})(X_{,i}) = Y_{,i}$, isto é, curvas coordenadas de Σ são aplicadas em curvas coordenadas de $\mathbb{S}^n$. Dessa forma, Σ e $\mathbb{S}^n$ estão associadas por uma transformação de Ribaucour.

□

Observação 3: *Da equação (4.24) do Corolário (1), vem que os coeficientes da primeira forma fundamental, para $n = 2$, são dados por*

$$\begin{aligned} E &= \frac{4(h+c)^2}{S^2}\big(V_{11}^2L_{11} + V_{12}^2L_{22}\big) - \frac{4}{S}(h+c)V_{11}L_{11} + L_{11}, \\ F &= \frac{4(h+c)^2}{S^2}\big(V_{11}V_{21}L_{11} + V_{12}V_{22}L_{22}\big) - \frac{2}{S}(h+c)\big(V_{12}L_{22} + V_{21}L_{11}\big) + L_{12}, \\ G &= \frac{4(h+c)^2}{S^2}\big(V_{21}^2L_{11} + V_{22}^2L_{22}\big) - \frac{4}{S}(h+c)V_{22}L_{22} + L_{22}. \end{aligned}$$

Pode-se verificar que

$$EG - F^2 = \frac{L_{11}L_{22}\big(S^2 - 2S(h+c)trV + 4(h+c)^2 detV\big)^2}{S^4}.$$

Assim, tomando uma métrica (L_{ij}) conforme, segue do último corolário que, para $n = 2$, a condição de regularidade $P \neq 0$ é equivalente a $EG - F^2 \neq 0$.

O próximo corolário fornece uma condição que garante quando uma hipersuperfície associada a uma esfera por uma congruência de esferas é de rotação.

Corolario 3. *Considere $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ a parametrização da esfera unitária $\mathbb{S}^n$ dada por $Y(u) = \pi_-^{-1}(u)$, onde $\pi_- : \mathbb{S}^n \backslash \{-e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$ é a projeção estereográfica. Seja Σ uma hipersuperfície associada a $\mathbb{S}^n$ por uma congruência de esferas, localmente parametrizada por X, como em (4.9). Nessas condições, Σ é uma hipersuperfície de rotação se, e somente se, a função h é radial.*

Demonstração: Consideremos Σ uma hipersuperfície de rotação, localmente parametrizada por $X : U \to \Sigma$. Sem perda de generalidade, podemos supor x_{n+1} ser o eixo de rotação, de modo que as seções ortogonais a esse eixo determinam em Σ esferas $(n-1)$-dimensionais centradas nele. Fixada uma tal esfera $(n-1)$-dimensional, digamos C, vale que $\langle X, X\rangle$ e $\langle X, N\rangle$ são constantes ao longo de C.

Para um ponto $u \in U$, tal que $X(u) \in C$, vale que

$$R(u) = \frac{1 - \langle X(u), X(u)\rangle}{2(\langle X(u), N(u)\rangle - 1)},$$

de modo que a função raio R é constante ao longo de C.

Agora para pontos $X(u)$ em C, seus correspondentes na esfera $\mathbb{S}^n$, pela congruência de esferas, são os pontos

$$Y(u) = \frac{X(u) + R(u)N(u)}{1 + R(u)},$$

os quais possuem a $(n + 1)$-ésima coordenada constante. Deste modo, à esfera $(n - 1)$-dimensional C em Σ corresponde, pela congruência de esferas, a intersecção de um plano horizontal com $\mathbb{S}^n$, o que é novamente uma esfera $(n - 1)$-dimensional, digamos C_1.

Tomando $Y = \pi_-^{-1}$ como a parametrização da esfera unitária, onde $\pi_- : \mathbb{S}^n \backslash \{-e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$ é a projeção estereográfica, vale que a esfera C_1 é aplicada por π_- numa esfera em $\mathbb{R}^n$, centrada na origem. Deste modo, a parametrização X aplica esferas de $\mathbb{R}^n$ centradas na origem em esferas $(n-1)$-dimensionais centradas no eixo de rotação. Deste modo, sendo constante ao longo de C, a função raio R é constante quando restrita a esferas de $\mathbb{R}^n$ centradas na origem. Por outro lado, podendo a função raio ser descrita por

$$R(u) = -\frac{h(u) + c}{h(u)},$$

vale que a função $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é constante ao longo das esferas $(n - 1)$-dimensionais centradas na origem, isto é, $h(u) = h(|u|)$. Portanto, h é uma função radial.

Suponha agora que $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seja uma função radial. Assim, podemos escrever $h(u) = J(|u|^2), u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in U$, para alguma função diferenciável J. Façamos $t = |u|^2$ e denotemos por $J'(t)$ a derivada de J com respeito a t. Dessa forma, $h_{,i} = 2J'u_i$. Sendo

$$Y(u) = \frac{1}{1 + |u|^2}(2u, 1 - |u|^2), \qquad u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in U,$$

e considerando e_i o i-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^n$, $\ 1 \leq i \leq n$, temos

$$Y_{,i} = \frac{2}{(1 + |u|^2)^2}\Big[- 2u_i(u, 1) + v_i\Big], \qquad v_i = (1 + |u|^2)\big(e_i\ ,\ 0\big),$$

Assim,

$$L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j}\rangle = \begin{cases} \left(\frac{2}{1+|u|^2}\right)^2, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Com isso em mãos, vem que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^{n} \frac{h_{,j}^2}{L_{jj}} + h^2 \\ &= (J')^2|u|^2(1 + |u|^2)^2 + h^2 \\ &= t(1 + t)^2(J')^2 + J^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{j=1}^{n} \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,j} + hY \\ &= J' \sum_{j=1}^{n} \Big[- 2u_j^2(u, 1) + u_j v_j\Big] + \frac{h}{1 + |u|^2}(2u, 1 - |u|^2) \\ &= \left(\left(J'(1 - t) + \frac{2J}{1 + t}\right) u, -2tJ' + \frac{J(1 - t)}{1 + t}\right). \end{aligned}$$

Substituindo na parametrização X, temos

$$\begin{aligned} X &= Y - \frac{2(h + c)}{S}\eta \\ &= \left(\left(\frac{2}{1 + t} - \frac{2(J + c)}{S}\left(J'(1 - t) + \frac{2J}{1 + t}\right)\right) u, \quad \frac{1 - t}{1 + t} - \frac{2(J + c)}{S}\left(-2tJ' + \frac{J(1 - t)}{1 + t}\right)\right). \end{aligned}$$

Se a última coordenada for constante, digamos

$$\frac{1-t}{1+t} - \frac{2(J+c)}{S}\left(-2tJ' + \frac{J(1-t)}{1+t}\right) = q,$$

então as expressões

$$A = \frac{2}{1+t} \quad e \quad B = J'(1-t) + \frac{2J}{1+t},$$

são constantes. Deste modo,

$$\left|\left(A - \frac{2(J+c)}{S}B\right)u\right|^2 = \left(A - \frac{2(J+c)}{S}B\right)^2 |u|^2 = \left(A - \frac{2(J+c)}{S}B\right)^2 t,$$

é constante, uma vez que a expressão para S depende apenas de t, J e sua derivada.

Portanto, as seções ortogonais ao eixo x_{n+1} determinam em $X(U)$ esferas $(n-1)$-dimensionais centradas no eixo x_{n+1}, o que mostra ser Σ uma hipersuperfície de rotação.
□

5. Conclusões. Enumeramos abaixo as conclusões obtidas a partir dos resultados expostos neste artigo:

1. Uma hipersuperfície Σ em $\mathbb{R}^{n+1}$ com normal de Gauss N tal que $\langle p, N(p)\rangle \neq 1$, para todo $p \in \Sigma$, está localmente associada a uma esfera unitária por uma congruência de esferas.
2. As hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ localmente associadas a $\mathbb{S}^n$ por uma congruência de esferas podem ser caracterizadas conforme a parametrização (4.9) no Teorema (1).
3. As hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo a condição do Teorema (1) e do Corolário (2) estão associadas a $\mathbb{S}^n$ por uma transformação de Ribaucour.

   A parametrização obtida neste trabalho é um instrumento fundamental para a descrição das hipersuperfícies WGSR, as quais são dadas por uma relação diferenciável envolvendo suas curvaturas principais e as funções suporte e distância quadrática. Tal classe de hipersuperfícies é apresentada em trabalhos posteriores.

ORCID and License

Laredo Rennan Pereira Santos https://orcid.org/0000-0001-5216-2026.

Referencias

[1] Corro, A. V. Generalized Weingarten surfaces of Bryant type in hyperbolic 3-space, *Mat. Contemp.,* 2006; **30:**71-89.

[2] Corro, A. M. V.; Tenenblat, K. Ribaucour transformations revisited, *Comm. Anal. Geom.,* 2004; **12(5):1055-1082**.

[3] Dias, D. G; Corro, A. M. V. Classes of generalized Weingarten surfaces in the Euclidean 3-space, *Adv. Geom.*, 2016; **16(1):45-22**.

[4] Ferapontov, E. V. Surfaces with flat normal bundle: an explicit construction, *Differential Geom. Appl.,* 2001; **14:15-37**.

[5] Fernandes, K. V.; Corro, A. M. V.; Riveros, C. Generalized Weingarten surfaces of harmonic type in hyperbolic 3-space, *Differential Geom. Appl.* 2018; **58:**202-226.

[6] Machado, C. D. F. Hipersuperfícies Weingarten de Tipo Esférico, *Tese de Doutorado* - Instituto de Exatas - Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

[7] Reyes, E. O. S; Riveros, C. Congruence of geodesic spheres in $\mathbb{H}^3$ and $\mathbb{S}^3$, *Selecciones Matemáticas,* 2018; **5(02):212-229**.

[8] Ruys, W. D. S. Classes de Hipersuperfícies Weingarten Generalizadas Tipo Laguerre, *Tese de Doutorado* - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017.