



Un tipo especial de gráficas de curvas fractales con Mathematica 11.0 .

a special type of graphs of fractal curves with mathematica 11.0

Segundo B. Correa Erazo * and Arnulfo Sandoval Cornejo †

Received, Dec. 31, 2017

Accepted, Feb. 18, 2019

DOI: <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2019.01.15>

Resumen

En este artículo generamos gráficas de curvas fractales, las cuales son determinadas como puntos fijos de un operador contractivo. Para ello se consideran cinco puntos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 en el plano y dos transformaciones afines w_1, w_2 , las mismas que constituirán un Sistema de Funciones Iteradas (IFS) con solo dos transformaciones contractivas. Para la visualización de las gráficas se ha creado un programa en mathematica 11.0 denominado *FractalFunction* y elegimos como punto de partida del proceso iterativo el conjunto $[P_1, P_5]$.

Palabras clave. función fractal, iterativo, sistema de funciones iteradas.

Abstract

In this article we generate graphs of fractal curves, which are determined as fixed points of a contractive operator. To do this, we consider five points P_1, P_2, P_3, P_4 and P_5 in the plane and two affine transformations w_1, w_2 , the same ones that will constitute a system of iterated functions (IFS) with only two contractive transformations. for the visualization of the graphs a program in mathematica 11.0 called *fractalfunction* has been created and we choose as the starting point of the iterative process the set $[P_1, P_5]$

Keywords. Fractal function, iterative, iterated functions system.

1. Introducción. Los procesos iterativos tienen su origen en la idea del genial matemático checo **Bernard Bolzano**, el cual en el año 1834 construyó una curva continua pero no diferenciable en ninguno de sus puntos (Tarrés, 2010). Dicho proceso de construcción es de forma iterativa; es decir la etapa actual se obtiene usando el resultado de la etapa anterior.

A partir de esta idea surgió la construcción de muchos conjuntos a los que hoy en día se les denomina **Fractales**. Estos conjuntos se caracterizan por ser el límite de un proceso iterativo, son autosemejantes, tienen dimensión fraccionaria y permiten describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean (Mandelbrot, 1983). Entre los pioneros de dichos procesos figuran Pierre Fatou (1878-1929), Gaston Julia (1893-1978) y Benoit Mandelbroth (1924-2010). Su existencia se justifica por el hecho de que pueden ser obtenidos como el punto fijo de un operador contractivo (Operador de Hutchinson) (Falconer, 1989) , usando el teorema del punto fijo de Banach (Plaza, 1990).

Utilizando una construcción similar, pueden obtenerse gráficas de curvas fractales como puntos fijos del operador de Hutchinson, pero esta vez usando solo dos transformaciones. De esta manera, teniendo en cuenta el teorema del punto fijo de Banach posee un único punto fijo al cual denominaremos curva fractal.

Para la generación de las gráficas, se utiliza el software científico **Mathematica 11.0**, el cual es un software correspondiente a un lenguaje de programación simbólico. Fué fundado por Stephen Wolfram en el año 1987 y hoy en día la Wolfram Research es una de las compañías de investigación, Web y software para la nube más

*ID ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0147-2048>, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Piura, Urb. Miraflores s/n., Ciudad Universitaria, Piura-Perú (scoreae@unp.edu.pe).

†ID ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8898-3456>, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Piura, Urb. Miraflores s/n., Ciudad Universitaria, Piura-Perú (arnulfo270@hotmail.com)

respetadas del mundo, así como una potencia de la innovación científica y técnica. Esta última denominación la podemos encontrar en la página web de la compañía denominada **Acerca de Wolfram Research**. En la Universidad Nacional de Piura, específicamente en la facultad de ciencias, gracias a la gestión de los profesores: Dr. Ricardo Velezmoro León y Lic. Robert Ipanaqué Chero se logró adquirir la licencia de dicho software con la finalidad de aportar en el desarrollo de diferentes programas que hagan más fácil la comprensión de las matemáticas en la región.

1.1. Conjuntos fractales clásicos. Denominaremos conjuntos fractales clásicos (Rodríguez, 1995) a aquellos fractales que se obtienen a partir de una simple regla o algoritmo de formación. Entre ellos destacan: El conjunto de Cantor, triángulo de Sierpinski, alfombra de Sierpinski, la curva de Koch, etc. Dichos conjuntos existen como puntos fijos de un operador denominado *operador de Hutchinson*.

1.1.1. El Operador de Hutchinson. Un Sistema de Funciones Iteradas (IFS) (Falconer, 1989) es un conjunto de contracciones lineales $w = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ definidas sobre un espacio métrico X . Al operador $T : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ definido mediante:

$$T(A) = \bigcup_{i=1}^k w_i(A)$$

Se le denomina el *Operador de Hutchinson* asociado al IFS, donde:

$$\mathcal{H}(X) = \{A \subset X : A \text{ es compacto}\}$$

El espacio $\mathcal{H}(X)$ es un espacio métrico completo respecto a la métrica de Hausdorff (Cid, 2012) definida mediante:

$$d_H(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subset [B]_\delta \wedge B \subset [A]_\delta\}$$

Donde $[A]_\delta$ y $[B]_\delta$, representan las δ -vecindades de los conjuntos A y B respectivamente y se definen mediante:

$$[A]_\delta = \{x \in X : d(x, A) < \delta\} \wedge [B]_\delta = \{x \in X : d(x, B) < \delta\}$$

Por otro lado el operador T es contractivo con constante de contractividad $k = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, siendo k_i la constante de contractividad de w_i y como T está definido sobre el espacio métrico completo $\mathcal{H}(X)$, entonces por el teorema del punto fijo, T posee un único punto fijo dentro de $\mathcal{H}(X)$.

El procedimiento para determinar el punto fijo del operador T (conjunto fractal) consiste en un proceso iterativo. Es decir, empezamos con un conjunto compacto A_0 , luego para obtener A_1 evaluamos T en A_0 , para obtener A_2 evaluamos T en A_1 y así sucesivamente. Dado que T es contractivo no es difícil darse cuenta que la sucesión de eventos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es monótona decreciente; es decir $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, luego por un teorema de convergencia sobre clases monótonas en teoría de la medida (Rincón, 2007) el conjunto de convergencia de la sucesión anterior es:

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Al conjunto anterior se le denomina *Conjunto Fractal*, el cual representa al punto fijo de un operador contractivo. Este conjunto posee la propiedad de el atractor del IFS, en particular es autosemejante; es decir $T(F) = F$.

1.1.2. Ejemplos Aplicativos. 1. El Conjunto de Cantor

El IFS para generar el Conjunto de Cantor en la recta, consta de las siguientes contracciones:

$$\begin{cases} w_1(x) = \frac{1}{3}x \\ w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases}$$

Luego el operador de Hutchinson viene dado por $T(A) = \bigcup_{i=1}^2 w_i(A)$. Si empezamos con $A_0 = [0, 1]$, las tres primeras iteraciones son:

$$A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

$$A_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

$$A_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{3}{27}] \cup [\frac{6}{27}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{9}{27}] \cup [\frac{18}{27}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{21}{27}] \cup [\frac{24}{27}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1]$$

Considerando la n -ésima etapa, se tiene 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$. Geométricamente, la segunda y tercera iteración se visualizan de la siguiente manera:

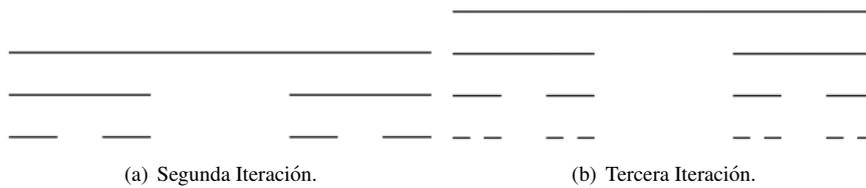


FIGURA 1.1. El Conjunto de Cantor en la Recta.

Siguiendo el mismo proceso pero iniciando con un cuadrado unidad para el IFS definido por:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) \\ w_2(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{1}{3}, 0) \\ w_3(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{2}{3}, 0) \\ w_4(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \\ w_5(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \\ w_6(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ w_7(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (0, \frac{2}{3}) \\ w_8(x, y) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y) + (0, \frac{1}{3}) \end{array} \right.$$

Obtenemos el conjunto fractal conocido como *Alfombra de Sierpinski*. En este caso el conjunto de partida es un cuadrado unidad y el operador de Hutchinson es $T(A) = \bigcup_{i=1}^8 w_i(A)$. El punto fijo del operador anterior es el fractal mostrado en la siguiente figura:

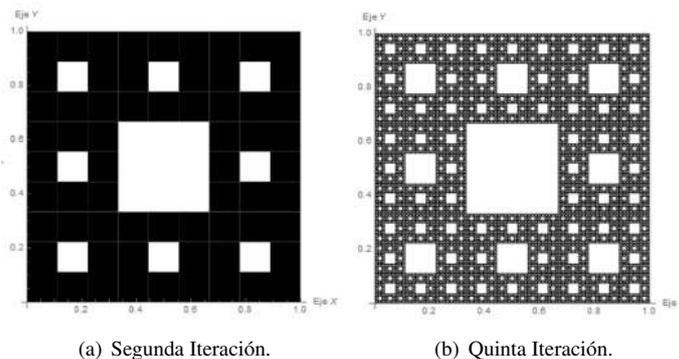


FIGURA 1.2. La Alfombra de Sierpinski.

1.2. Funciones fractales. En el año 1834, **Bernard Bolzano** construyó de forma iterativa una curva que no posee derivada en ninguno de sus puntos (Tarrés, 2010). A partir de esta idea se construyeron varias curvas que poseen dicha característica, como por ejemplo la curva de Von Koch, las curvas de Peano y las curvas de Hilbert.

Carl Weierstrass propuso una función con una regla de correspondencia explícita; dicha regla se describe de la siguiente forma (Falconer, 1989):

$$w(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \sin(\lambda^i t), 1 < s < 2, \lambda > 1$$

La gráfica de dicha función tiene la propiedad de ser un fractal, pues su dimensión de Hausdorff $s \in \langle 1, 2 \rangle$ es mayor que su dimensión topológica (Falconer, 1989). A la gráfica de la función anterior se le puede visualizar de la siguiente manera:

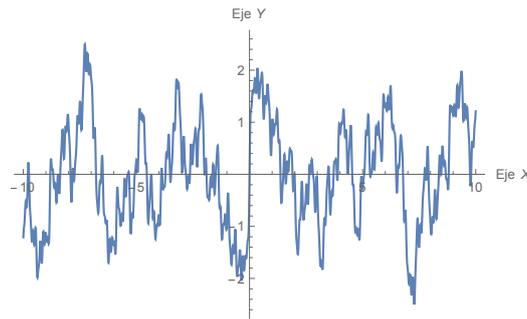


FIGURA 1.3. Gráfica de la función de Weierstrass.

En general si f es una función periódica, la función:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} f(\lambda^i t)$$

Posee una gráfica que es un fractal, dado que posee dimensión de Hausdorff s (Falconer, 1989). Una construcción similar a la anterior fué propuesta por el matemático japonés Teiji Tagaki pero esta vez utilizando la función *tienda de campaña* extendida por periodicidad en todo \mathbb{R} (Aguirre, 2002). La regla de correspondencia que propuso Tagaki es:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

Donde f es la función periódica de periodo **uno**, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Cuya gráfica se aprecia de la siguiente manera:

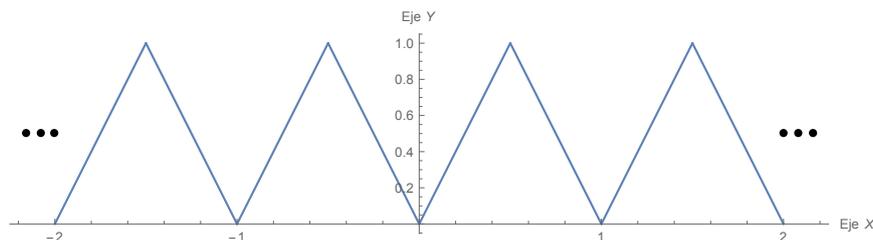


FIGURA 1.4. Gráfica de la función tienda de campaña extendida por periodicidad en todo \mathbb{R} .

Otra forma de obtener gráficas de curvas fractales es a partir de las gráficas de funciones fractales construidas por **Read-Bajractarevic**(Massopust, 1994), ellos propusieron una forma de construcción basada en el operador que justamente lleva su nombre **El operador de Read-Bajractarevic**, definido mediante:

$$\Phi : L^\infty(X, Y) \rightarrow L^\infty(X, Y)$$

$$f \rightarrow v(\cdot, f(b(\cdot)))$$

Donde $X \subset \mathbb{R}$, Y es un espacio métrico completo, $b : X \rightarrow X$ es una función arbitraria y $v(x, y) : Y \rightarrow Y$ son contracciones. Con la finalidad de generar funciones fractales, se debe reemplazar b por N biyecciones $u_i : X \rightarrow X$, resultando explícitamente el operador de la siguiente manera:

$$\Phi[f(x)] = \sum_{i=1}^N [v_i(u_i^{-1}(x), f(u_i^{-1}(x)))]\chi_{X_i}(x)$$

Donde $X_i = u_i(X)$.

Al único punto fijo del operador Φ se le denomina función fractal.

2. Material y Métodos.

2.1. Objeto de estudio.

- a) Generación de gráficas de curvas fractales en el plano haciendo uso del software científico Mathematica 11.0.
- b) Determinación de la dimensión de la gráfica de una curva fractal a partir del teorema de la dimensión de conjuntos autosemejantes.

2.2. Instrumentos de recolección de datos. En el presente artículo construiremos gráficas de curvas fractales en base al método general, es decir curvas fractales como puntos fijos del ya conocido Operador de Hutchinson (Hutchinson, 1981). Aquí se utilizará dos transformaciones contractivas de la forma:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f) \\ w_2(x, y) = (gx + hy + i, jx + ky + l) \end{cases}$$

Es decir un **IFS** formado por solo dos transformaciones; esto implicará ahorrar tiempo computacional en la generación de las gráficas de las mismas. Luego se buscan los coeficientes $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ y l de acuerdo a cinco puntos base que se toman en el plano, teniendo en cuenta que dichos coeficientes aseguren que tanto las transformaciones w_1 como w_2 sean contractivas, posteriormente se evalúan las transformaciones anteriores iterativamente en el segmento de recta formado por el primer y último punto que se tome, evidentemente para la evaluación se ha construido un programa inédito en el sistema de álgebra computacional Mathematica 11.0.

2.3. Métodos y técnicas. Consideremos cinco puntos del plano $P_1(p_1, q_1), P_2(p_2, q_2), P_3(p_3, q_3), P_4(p_4, q_4)$ y $P_5(p_5, q_5)$ distribuidos de la siguiente manera:

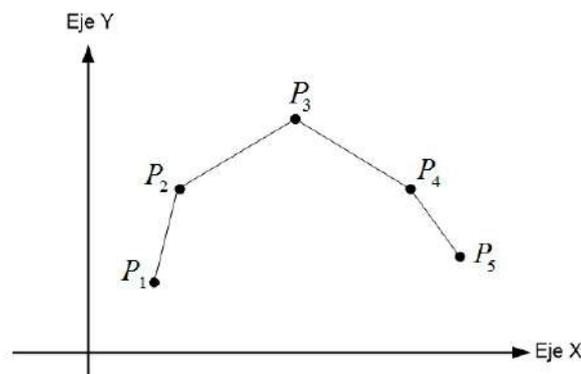


FIGURA 2.1. Distribución de puntos en el plano para una curva fractal interpolante.

Y como queremos que la curva sea continua, evaluamos las transformaciones anteriores en los puntos indicados, teniendo en cuenta que:

$$\begin{cases} w_1(P_1) = P_1 \\ w_1(P_3) = P_2 \\ w_1(P_5) = P_3 \end{cases}$$

A partir de esta condición, obtenemos los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} p_1a + q_1b + c = p_1 \\ p_3a + q_3b + c = p_2 \\ p_5a + q_5b + c = p_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1d + q_1e + f = q_1 \\ p_3d + q_3e + f = q_2 \\ p_5d + q_5e + f = q_3 \end{cases}$$

Cuyo conjunto solución $\{a, b, c, d, e, f\}$ hace posible que w_1 defina una contracción, siempre y cuando los valores a, b, d y e , satisfagan la hipótesis del teorema 1. Análogamente, si hacemos que:

$$\begin{cases} w_2(P_1) = P_3 \\ w_2(P_3) = P_4 \\ w_2(P_5) = P_5 \end{cases}$$

Se originan los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} p_1g + q_1h + i = p_3 \\ p_3g + q_3h + i = p_4 \\ p_5g + q_5h + i = p_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1j + q_1k + l = q_3 \\ p_3j + q_3k + l = q_4 \\ p_5j + q_5k + l = q_5 \end{cases}$$

Cuyo conjunto solución $\{g, h, i, j, k, l\}$ hace posible que w_2 defina una contracción, claro está que los valores g, h, j y k , deben satisfacer la hipótesis del teorema 1.

Luego la transformación:

$$\Psi : h(\mathbb{R}^2) \rightarrow h(\mathbb{R}^2)$$

$$A \rightarrow \Psi(A) = \bigcup_{i=1}^2 w_i(A)$$

Siendo $h(\mathbb{R}^2) = \{A \subset \mathbb{R}^2 : A \text{ es compacto}\}$.

Define una curva fractal, considerando su punto fijo. En este caso A es el segmento de recta que une los puntos $P_1(p_1, q_1)$ y $P_5(p_5, q_5)$.

Por ejemplo al considerar los puntos: $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(2, 1)$, $P_4(3, 0)$ y $P_5(4, 0)$ y las condiciones dadas anteriormente, se obtienen las soluciones:

$$a = \frac{1}{2}, b = 0, c = 0, d = \frac{1}{4}, e = \frac{1}{2}, f = 0, g = \frac{1}{2}, h = 0, i = 2, j = -\frac{1}{4}, k = -\frac{1}{2}, l = 1$$

Luego las transformaciones son:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y) \\ w_2(x, y) = (\frac{1}{2}x + 2, -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + 1) \end{cases}$$

Es muy importante tener en cuenta que las dos transformaciones consideradas en (2.2) deben ser contractivas. Dicha condición es posible averiguarla a partir del siguiente teorema (Plaza, 1990):

Teorema 1.

La transformación $w(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ es una aplicación contractiva si la raíz cuadrada de los valores absolutos de los valores propios de la matriz $M^T M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ son estrictamente menores que uno.

Demostración.

Haciendo $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$, se tiene que:

$$\|u - v\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = (u - v)^T (u - v)$$

Luego:

$$\|w(u) - w(v)\|^2 = [w(u) - w(v)]^T [w(u) - w(v)]$$

Haciendo operaciones básicas y aplicando el álgebra de matrices tenemos:

$$\|w(u) - w(v)\|^2 = \begin{pmatrix} a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) & c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) \\ c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2) \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\|w(u) - w(v)\|^2 = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\|w(u) - w(v)\|^2 = (u - v)^T M^T M (u - v)$$

Donde $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a la transformación $w(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

Ahora bien si k es la constante de contractividad, se necesita que $\|w(u) - w(v)\| \leq k\|u - v\|$, esto implica que:

$$\|w(u) - w(v)\|^2 \leq k^2 \|u - v\|^2 \Rightarrow \frac{\|w(u) - w(v)\|^2}{\|u - v\|^2} \leq k^2$$

Haciendo $u - v = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, se tiene que:

$$\frac{\|w(u) - w(v)\|^2}{\|u - v\|^2} = F(r, s) = \frac{\begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}}{r^2 + s^2} = \frac{(ar + bs)^2 + (cr + ds)^2}{r^2 + s^2}$$

Con lo cual el objetivo consiste en determinar el punto máximo de la función:

$$F(r, s) = \frac{(ar + bs)^2 + (cr + ds)^2}{r^2 + s^2}$$

Con la finalidad de no tener problemas con el denominador, podemos igualar el denominador a 1 y utilizar optimización condicionada, por lo que nuestro problema se reduce a determinar el máximo de la función $\phi(r, s) = (ar + bs)^2 + (cr + ds)^2$, sujeta a la restricción $r^2 + s^2 = 1$.

Aplicando multiplicadores de Lagrange, se tiene que la función de Lagrange es:

$$L(r, s, \lambda) = (ar + bs)^2 + (cr + ds)^2 + \lambda(1 - r^2 - s^2)$$

Derivando con respecto a r y s e igualando a cero tenemos que:

$$\begin{cases} 2(ar + bs)a + 2(cr + ds)c - 2\lambda r = 0 \\ 2(ar + bs)b + 2(cr + ds)d - 2\lambda s = 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{cases} (a^2 + c^2)r + (ab + cd)s = \lambda r \\ (ab + cd)r + (b^2 + d^2)s = \lambda s \end{cases}$$

Luego usando el álgebra de matrices se tiene que:

$$\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \quad \dots (I)$$

Esto significa que λ es un valor propio de la matriz $M^T M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ su respectivo vector propio.

Luego si en (I) multiplicamos en ambos lados por $\begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix}$, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \lambda$$

Por tanto el factor de escalamiento será $k^2 = \lambda$ o bien $k = \sqrt{|\lambda|}$.

De esta manera la transformación $w(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ será una contracción cuando la raíz cuadrada de los valores absolutos de los valores propios de la matriz asociada:

$$M^T M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

son estrictamente menores que 1.

Para una mejor elección del factor de contractividad se recomienda utilizar la raíz cuadrada del valor absoluto del mayor valor propio.

En nuestro caso las transformaciones son:

$$\begin{cases} w_1(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f) \\ w_2(x, y) = (gx + hy + i, jx + ky + l) \end{cases}$$

Las cuales se componen de una rotación representadas por las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ y la traslación (c, f) para w_1 y $N = \begin{pmatrix} g & h \\ j & k \end{pmatrix}$ con la traslación (i, l) para w_2 . Así pues para asegurar que w_1 y w_2 sean contracciones, en virtud del teorema anterior, debemos verificar que las raíces cuadradas de los valores absolutos de los valores propios de las matrices:

$$M^T M = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \wedge N^T N = \begin{pmatrix} g & j \\ h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & h \\ j & k \end{pmatrix}$$

sean estrictamente menores que uno.

Definición 1 (Condición del abierto).

Un IFS $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, satisface la Condición de Abierto (“Open Set Condition”)(Hansen, 2009), si existe un conjunto abierto, acotado y no vacío $U \subset \mathbb{R}^n$, tal que:

$$\bigcup_{i=1}^k w_i(U) \subset U$$

Definición 2 (Invarianza por transformaciones).

Sean $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ contracciones. El conjunto F es invariante por las transformaciones w_i (Plaza, 1990) si:

$$F = \bigcup_{i=1}^k w_i(F)$$

El siguiente resultado nos permite calcular la dimensión de cada una de las curvas fractales que generaremos. El proceso consistirá en determinar el factor de contracción de las transformaciones w_1 y w_2 y luego aplicar el teorema.

Teorema 2. (K. Falconer, 1989)

Supongamos que un conjunto satisface la condición del conjunto abierto y es invariante por las transformaciones contractivas w_i con constante de contractividad c_i en \mathbb{R}^n . Si F es el atractor del IFS $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, tal que:

$$F = \bigcup_{i=1}^k w_i(F)$$

Entonces $\dim_H F = \dim_B F = s$, donde s viene dado por:

$$\sum_{i=1}^k c_i^s = 1$$

Donde $\dim_H F$ es la dimensión de Hausdorff de F y $\dim_B F$ es la dimensión boxcounting de F . Además, para tal valor de s , $0 < H^s(F) < \infty$.

3. Resultados.

3.1. Modelación Computacional . Para la generación de las imágenes se utilizó el comando **FractalFunction** creado con un tipo de programación denominada **programación modular**. A continuación se describen a cada uno de los comandos usados (Gray, 1994) con la finalidad de crear un acercamiento mas directo con el lector interesado.

El comando Solve. permite resolver un sistema de ecuaciones. En nuestro caso usaremos:

```
Solve[{p1 a + q1 b + c == p1, p3 a + q3 b + c == p2, p5 a + q5 b + c == p3, p1 d + q1 e + f == q1, p3 d + q3 e + f == q2,
p5 d + q5 e + f == q3,
p1 g + q1 h + i == p3, p3 g + q3 h + i == p4, p5 g + q5 h + i == p5, p1 j + q1 k + l == q3, p3 j + q3 k + l == q4,
p5 j + q5 k + l == q5}, {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l}]
```

Resultando como salida los valores de $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

El comando Map. Se usa para evaluar una función en un determinado punto, nosotros lo utilizaremos para evaluar cada una de las transformaciones que conforman el **IFS** en cada uno de los puntos que resultan de cada iteración. Dado que para nuestro propósito se tienen dos transformaciones entonces utilizaremos:

```
{Map[w1, v[i - 1]], Map[w2, v[i - 1]]}
```

Donde w_1 y w_2 son las transformaciones y $v[i - 1]$ corresponde a la iteración anterior a la i -ésima etapa.

El comando Flatten. Permite eliminar llaves de una lista y en nuestro caso será fundamental dado que al hacer las evaluaciones en cada etapa se van a generar sub listas dentro las listas.

El comando Partition. Permite particionar una lista de acuerdo a nuestra conveniencia; esto es necesario dado que con el comando flatten eliminamos llaves y para poder graficar los diferentes puntos necesitamos dos componentes, esta es la razón por la que debemos volver a agrupar particularmente de dos en dos.

Teniendo en cuenta lo descrito anteriormente podemos entender el programa que genera gráficas de curvas es fractales en el plano. Esto es:

```
FractalFunction[{p1_, q1_}, {p2_, q2_}, {p3_, q3_}, {p4_, q4_}, {p5_, q5_}, n_, Color_, Opts___] :=
Module[{v, w1, w2, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l},

{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l} =
{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l} /.
Flatten[Solve[{p1 a + q1 b + c == p1, p3 a + q3 b + c == p2, p5 a + q5 b + c == p3, p1 d + q1 e + f == q1,
p3 d + q3 e + f == q2, p5 d + q5 e + f == q3,
p1 g + q1 h + i == p3, p3 g + q3 h + i == p4, p5 g + q5 h + i == p5, p1 j + q1 k + l == q3, p3 j + q3 k + l == q4,
p5 j + q5 k + l == q5}, {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l}]];

v[1] := {{p1, q1}, {p5, q5}};
w1[{x_, y_}] := {a x + b y + c, d x + e y + f};
w2[{x_, y_}] := {g x + h y + i, j x + k y + l};

v[i_] := Partition[Flatten[{Map[w1, v[i - 1]], Map[w2, v[i - 1]]}], 2];
Graphics[{Hue[Color], Line /@ Partition[v[n], 2]}, Axes -> True, PlotRange -> All, AxesLabel -> {Eje X, Eje Y},
AxesOrigin -> {0, 0}]

]
```

3.2. Simulaciones. Los resultados obtenidos en la generación de las imágenes de curvas fractales para diferentes conjuntos de puntos, se presentan en diferentes cuadros indicándose en cada uno de ellos los puntos que se tomaron para su generación.

En cada uno de estas figuras presentaremos diferentes iteraciones con las cuales se podrá observar la convergencia hacia el punto fijo que en definitiva será la curva fractal.

Si consideramos los puntos $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$, $(4, 0)$, se generan las siguientes imágenes:

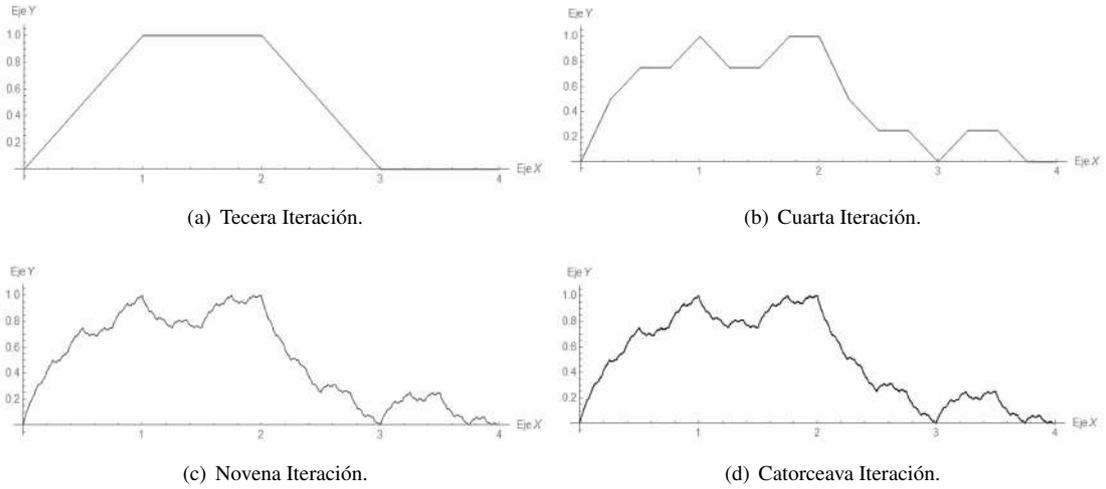


FIGURA 3.1. Imagen de una curva fractal con los puntos (0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 0), (4, 0).

Las constantes de contractividad para las transformaciones w_1 y w_2 son $c_1 = c_2 = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{17}}{32}}$, luego por el teorema 2, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^2 c_i^s = 1$$

De esta manera:

$$\left(\sqrt{\frac{9 + \sqrt{17}}{32}}\right)^s + \left(\sqrt{\frac{9 + \sqrt{17}}{32}}\right)^s = 1 \implies 2 \left(\sqrt{\frac{9 + \sqrt{17}}{32}}\right)^s = 1$$

Y al despejar el valor de s , resulta la dimensión de Hausdorff de la gráfica. Esto es:

$$\dim_H(Graf(f)) = s = \frac{2 \log 2}{\log 32 - \log(9 + \sqrt{17})} = 1.55526\dots$$

Al considerar los puntos (0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 0), se obtiene:

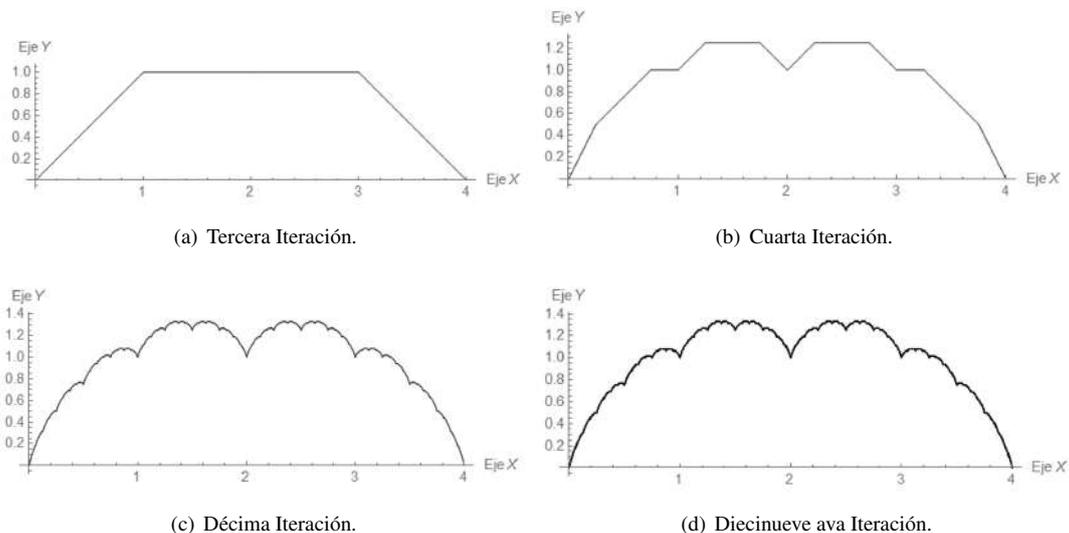


FIGURA 3.2. Imagen de una curva fractal con los puntos (0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 0).

Al igual que en el caso anterior sus constantes de contractividad son las mismas, luego su dimensión vale $\dim_H(\text{Graf}(f)) = 1 \cdot 55526\dots$

Finalmente si se usan los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(3/2, \sqrt{3}/2)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$ podemos generar la curva de Von Koch con tan solo dos iteraciones con la particularidad de que si se considera una iteración par se obtiene la curva de Von Koch, por el contrario si se considera una iteración impar se obtiene una variante:

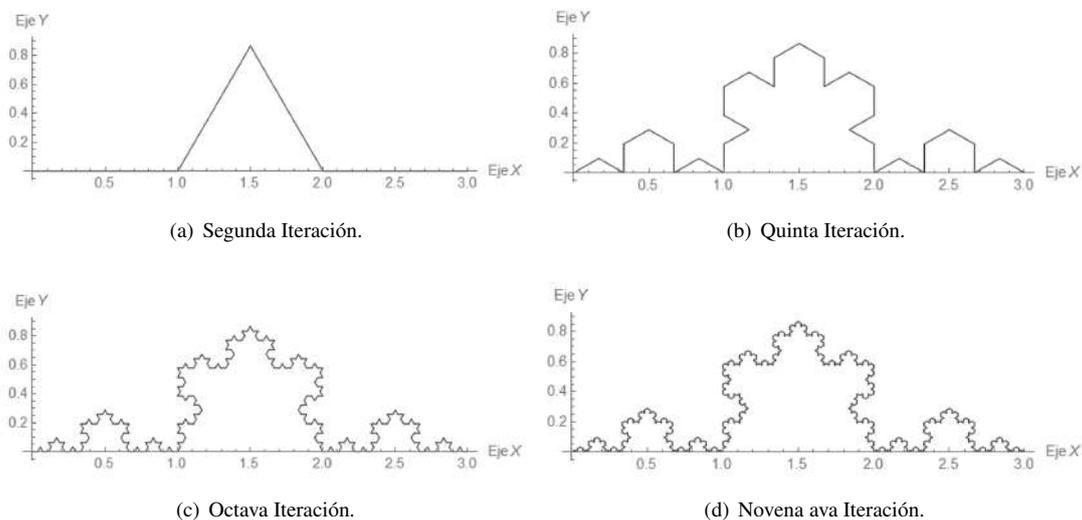


FIGURA 3.3. Curva de Von Koch con solo dos transformaciones usando los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(3/2, \sqrt{3}/2)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$.

En este caso el factor de contracción para ambas transformaciones es $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, luego al resolver la ecuación $2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^s = 1$, resulta:

$$s = \frac{\log 4}{\log 3} = 1 \cdot 26186 \dots = \dim_H(\text{Graf}(f))$$

La cual es exactamente la dimensión de la curva de Von Koch clásica.

Conclusiones. Por los resultados que se muestran anteriormente podemos concluir que es posible generar gráficas de curvas fractales a partir de un IFS compuesto por solo dos transformaciones usando el software científico Mathematica 11.0. La justificación de que las gráficas corresponden a un fractal se debe a que la dimensión de Hausdorff que tiene cada una de las curvas es mayor que su dimensión topológica (uno), habiendo sido posible su cálculo gracias al teorema de la dimensión de conjuntos autosemejantes.

Referencias

- [1] Tarrés, J. *Sobre la historia del concepto topológico de curva*, Historia de la Gaceta (Departamento de geometría y topología de la Universidad Complutense de Madrid), (2010), pp. 66–67.
- [2] Mandelbrot, B. *The Fractal Geometry of Nature*, International Business Machines Thomas J. Watson Research Center, (1983), pp.1.
- [3] Falconer, K. *Fractal geometry*, Mathematical foundations And Applications, Cambridge University Press (1989), pp. 123–128, pp. 130–135, pp. 160–166.
- [4] Plaza, S. *Fractales y generación computacional de imágenes*, Monografías del IMCA (Instituto de Matemática y ciencias afines), (1990), pp. 22–24, pp. 24–26, pp.29.
- [5] Rodríguez, R. *La teoría de fractales: Aplicación experimental e implicaciones en la metodología de la ciencia*, tesis magistral Facultad de filosofía y letras, Universidad Autónoma de Nuevo León, (1995), pp. 15–26.
- [6] Cid, M. C., *Conjuntos fractales autosimilares y el operador de Hutchinson*, tesis Facultad de ciencias físicas y matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2012), pp. 14–21.
- [7] Hutchinson, J. E. *Fractals and self similarity*, Department of Pure Mathematics, Faculty of Science, Australian National University, (1981), pp. 10–15.
- [8] Aguirre, J. *Curvas fractales*, Sigma: Revista de matemáticas Vol. 20, Vitoria - España (2002), pp. 82–83.
- [9] Massopust, P. R. *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets*, Academic Press (1994), pp. 135–145.
- [10] Gray, J. *Mastering Mathematica Programming Methods and Applications*, University de Illinois, Academic Press (1994), pp. 15–17, pp. 154–159, pp. 469–482.
- [11] Rincón, L. *Curso intermedio de probabilidad*, Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias UNAM. México DF (2007), pp. 17–18.
- [12] Hansen, R. *La dimensión de Mendés France. Relación entre su espectro multifractal y el formalismo termodinámico. Aplicación a sistemas tipo Hénon.*, Tesis doctoral. Área de Ciencias Matemática UBA. (2009), pp. 18–19.