Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 06(01): 119 - 127 (2019)

Ondículas, Evolución de Algunas Ideas y Aplicaciones.

Wavelets, Evolution of Some Ideas and Applications.

Alejandro Ortiz Fernández *

Received, Jan. 23, 2019 *Accepted, Apr. 09, 2019*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2019.01.14

Resumen

En este escrito presentamos un breve panorama sobre la teoría de ondículas, una teoría del análisis que tuvo, y tiene, gran suceso en aplicaciones a diversas áreas de la ciencia y de la tecnología. Este artículo pretende informar sobre algunas ideas de las ondículas, así como de algunas de sus aplicaciones.

Palabras clave. Ondas, ondícula, Fourier, ciencia, tecnología, aplicaciones.

Abstract

In this writing, we present a brief overview of wavelets theory, a theory that has had great success in applications to various areas of science and technology. This article aims to inform about some wavelets ideas, as well as some of its applications..

Keywords. Waves, wavelets, Fourier, science, technology, applications.

1. Antes de Fourier.. La obra de Fourier podría ser el punto de partida en la evolución de las ideas que han de conducir a las ondículas. Sin embargo, por razones de completitud histórica presentamos una exposición de ideas matemáticas desde los albores hasta inicios del siglo XIX, época en que Fourier publica su obra sobre la aplicación de las series trigonométricas en el estudio de la conducción del calor.

La matemática es una ciencia pura que se retroalimenta de sus aplicaciones al mundo objetivo y de los problemas que éste le plantea. Aún cuando en su esencia ella contiene profundas ideas teóricas, su proyección al mundo físico es impresionantemente compatible en la solución de simples y delicados problemas. Esto fue característica de la matemática desde sus inicios y seguramente lo será en el futuro. Las grandes ideas matemáticas han encontrado, temprano o tarde, aplicaciones. Recordemos a la aritmética binaria de Boole. Aún si esto no se produjera, tales teorías son una prueba de la fuerza creadora del pensamiento humano, y esto es también importante aceptar. En el amanecer de la humanidad el hombre, posiblemente, tuvo la idea de la cantidad y forma; dos ideas básicas, una aritmética y la otra geométrica. La necesidad de objetivizar cuantos ejemplares poseía de algo, debe haberle inducido a la creación de los primeros números naturales. La contemplación de una noche de Luna llena debe haberle dado la idea del círculo.

Tales de Mileto (640 - 546 A. C.), en los inicios de la cultura griega, usa la matemática para predecir eclipses y resolver ingeniosos problemas geométricos (cálculo de la altura de una pirámide de Egipto). Euclides sistematiza la geometría en sus "Elementos". Arquímedes, considerado como una de las pocas mentes universales de todos los tiempos, hizo contribuciones fundamentales, tanto en la matemática pura como en la aplicada. Estuvo muy cerca de descubrir el cálculo integral. Es lamentable que todo el gran avance matemático logrado en este periodo entrara en una etapa histórica muy larga (Edad Media) en donde se hizo pocos y aislados avances.

La ciencia moderna nace en el siglo XVI bajo la influencia de mentes, entre otras, como Galileo, Descartes, Kepler,

*Sección Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú. (jortiz@pucp.edu.pe)

Leibniz y sobre todo por la obra de Newton. Galileo tuvo el don de la originalidad y de comprender el mundo físico que pisaba. Fue notable físico, astrónomo y matemático. Usa la matemática como lenguaje científico para estudiar al mundo físico. Descartes tuvo la revelación de unir la geometría de los antiguos griegos con la naciente álgebra. En 1619 nace la geometría analítica la que ha de contribuir al desarrollo de la matemática. Kepler, quien tuvo dos continuos obstáculos en su vida: la pobreza y la enfermedad, hizo valiosas contribuciones a la mecánica celeste. Sus hermosas leyes sobre los planetas son finos argumentos matemáticos.

Godofredo Leibniz es un ejemplo excepcional de la inteligencia humana, fue famoso como filósofo y matemático así como en otras áreas del conocimiento. Inventó una máquina para calcular, siendo así precursor de las actuales computadoras. En 1677 publica su trabajo sobre el cálculo diferencial; posiblemente sus motivaciones fueron más de carácter filosófico, al contrario de Newton, quien también publicó sobre el cálculo diferencial e integral con las motivaciones de un físico. Siendo aún muy joven, Isaac Newton (1642-1727) estudió tres delicados problemas: el cálculo diferencial e integral, la teoría de los colores y la ley de la gravitación universal. Cualquiera que hubiera resuelto uno de los tres problemas hubiera pasado a la historia de la ciencia. El joven Newton resolvió las tres cuestiones.

El cálculo diferencial e integral contribuyó poderosamente en el desarrollo de nuevas ideas matemáticas. Fue una feliz creación matemática, sobre todo por sus aplicaciones al desarrollo de la física y de la astronomía. Sus posteriores aplicaciones a la ingeniería fue fundamental en el desarrollo en la naciente tecnología. Newton fue el científico con la mentalidad del físico; la matemática fue su lenguaje para interpretar problemas de la mecánica, de la astronomía y de la óptica. Creado el cálculo en el siglo XVII, la ciencia del siglo XVIII fue el desarrollo de la mecánica y de la evolución de nuevas ideas en el mismo cálculo diferencial y en otras áreas matemáticas; es decir, esencialmente es la continuación de la gran obra de Newton. Fue una pléyade de matemáticos los encargados de realizar tal tarea. Entre otros, mencionemos algunos nombres. La familia Bernoulli, en varias generaciones, contribuyó en la solución de diversos problemas en el cálculo. Leonardo Euler, notable matemático, trabajó en la sistematización del cálculo, en la teoría de números y otros campos; fue un científico de gran producción matemática. Este siglo XVIII se caracteriza por el uso de métodos analíticos en los razonamientos matemáticos. Lagrange fue uno de sus dignos representantes, su Mecánica Analítica hizo época y fue una obra vital en el surgimiento de nuevas publicaciones. Algo similar fue la Mecánica Celeste de Laplace en astronomía. El trío de esta Escuela Francesa se completa con Legendre, quien contribuyó en el cálculo integral y en la teoría de números.

A fines de este siglo XVIII, la matemática en general va entrando en el umbral que ha de conducir al análisis matemático en el siglo XIX. Los aportes de los matemáticos mencionados, y de otros, fueron fundamentales para el desenvolvimiento de ideas que irían preparando el terreno para métodos y teorías más rigurosas y elegantes. En la orientación que nos interesa (encontrar las primeras ideas que nos conducirían a las ondículas) mencionemos que a fines del siglo XVIII y comienzos del XIX, la física matemática se enfrenta con la solución de problemas de ecuaciones en derivadas parciales. Es importante comprender, para entender mejor la obra de Fourier, que las ideas matemáticas en el cálculo no eran del todo rigurosas. Por ejemplo, la idea de función no era muy clara; el concepto de límite no estaba formalizada y por tanto las ideas de derivadas e integral no eran tan rigurosas, lo que a su vez implicaba que cualquier teoría que hiciera uso de tales conceptos tuviera algunos problemas de consistencia.

Esto ocurrió con la famosa obra de Fourier, "La Teoría Analítica del Calor", la que hace uso de series trigonométricas y en donde se vislumbran algunas ideas de lo que serían las ondículas en el futuro.

Arquímedes

I. Newton

2. Fourier. Proyecciones de su Obra.. En 1 hemos visto como el cálculo diferencial e integral evolucionó en los siglos XVII y XVIII en base a la monumental obra de Newton. Ciertos problemas de la física matemática atrajeron la atención de matemáticos a mediados del siglo XVIII. El origen de las series trigonométricas usadas por Fourier (llamadas luego series de Fourier) está en el estudio del problema de la cuerda vibrante. La ecuación de la onda, una ecuación diferencial parcial, fue deducida por d'Alembert en 1747. Tal ecuación describe el comportamiento de la vibración de una cuerda (por ejemplo, una cuerda de guitarra o violín). La solución que encontró al problema es una superposición de ondas. En realidad, si son conocidas ciertas condiciones iniciales es factible predecirse el comportamiento futuro de la cuerda.

Lo interesante de tal problema es que provocó una polémica sobre el concepto de "función". Además de d'Alembert participaron Euler y Daniel Bernoulli. La solución del problema de la cuerda vibrante fue expresada como una suma infinita de combinaciones de senos y cosenos, es decir, trataban con series trigonométricas. En esa época no estaba claro lo que se entendía por representar una función como suma infinita de otras funciones (que actúan como una base). Esto hoy lo entendemos con el concepto de series convergentes a una función. En este escenario llega Fourier. Jean Baptiste Fourier nació en Francia (1768), muy joven reveló su vocación matemática, ciencia que estudió en noches iluminadas con cabos de velas recogidos durante el día en diversos lugares del colegio. Pertenece a la época de la Revolución, habiendo sufrido sus estragos. Fourier fue un entusiasta de la Revolución aunque al final protestó por los excesos cometidos, con el grave riesgo que ello significaba. Fue hombre de confianza de Napoleón, a quien acompañó en su viaje a Egipto.

En 1807 redacta su primer trabajo sobre la "Teoría Analítica del Calor"; recibió el apoyo para que continuase en sus estudios y que aspirara al Gran Premio en 1812, el que ganó pero recibió severas críticas por parte del jurado, integrado por Lagrange, Laplace y Legendre. Le observaron que el enfoque matemático no era del todo correcto y riguroso. Recordemos el estado del cálculo por aquella época; Fourier no disponía de un análisis matemático riguroso y consistente, pero su profunda intuición físico-matemática lo llevó a formular una bella teoría científica. Esta resultó ser correcta pero la matemática de entonces no estaba aun "hecha" para interpretarla correctamente. Esta situación ha sucedido en varias etapas en la historia de la matemática. A veces la intuición y la experimentación se adelantaron a la formalización matemática y hay que esperar que las generaciones venideras hagan tal labor. Así sucedió con el caso que nos ocupa.

Entre otras cosas, Fourier afirmó que: ≪toda función periódica puede ser representada por una serie trigonométrica≫, es decir, como una suma infinita de combinaciones de funciones senos y cosenos. Esta afirmación fue difícil justificar, como deseaba el jurado, pues el problema de la convergencia de una serie trigonométrica era un agudo problema por resolver. Molesto por las críticas, Fourier continuó sus estudios por su cuenta y publica su obra en forma de libro en 1822, bajo el título "La Teoría Analítica del Calor". El trabajo de Fourier fue reconocido por la posterioridad como una obra cumbre en la historia de la ciencia. El físico Maxwell la llamó: ≪un gran poema matemático≫. Dió uno de los primeros ejemplos de cómo aplicar el análisis a la física en forma magistral; partió de hipótesis simples y experimentales para concluir en una teoría completa y coherente.

En 1888, el matemático Darboux escribió: ≪La teoría Analítica del Calor, que uno puede colocar a lado de los escritos científicos más perfectos de todos los tiempos...≫. Pero, ¿por qué el análisis de Fourier fue, y es, tan importante? ... Porque ella es ante todo una teoría matemática, que interpreta un fenómeno físico y fue hecho con una gran intuición y de donde se extraerían profundas y nuevas ideas matemáticas que han de dominar al resto del siglo XIX, y al XX. Ilustremos esta afirmación con algunos ejemplos.

1. La obra de Fourier forzó la formalización de las ideas de función, así como la de integral. La precisión de estos conceptos, junto con la de límite, fue la base de la edificación de la matemática pura en el siglo XIX y de mayores logros en las aplicaciones.
2. La teoría de Conjuntos, tan mencionada actualmente, tuvo su origen en el estudio de un delicado problema de unicidad en el análisis de Fourier. Ello fue logrado por Cantor a mediados del siglo XIX.
3. A fines del siglo XIX y a comienzos del XX, la matemática había evolucionado lo suficiente para entrar en una etapa de síntesis. Fue una época de grandes transformaciones científicas, entre ellas, la introducción de los espacios abstractos con el objetivo de sintetizar en espacios universales a distintos espacios particulares. Esta idea dió un carácter más amplio a las teorías matemáticas y a las aplicaciones.
4. El análisis de Fourier hace uso constante de la idea de integral; hasta fines del siglo XIX, la integral de Riemann era la más usada pero ya era insuficiente ante la evolución del concepto de función. Con esta motivación, H. Lebesgue introduce una nueva noción de integral ("la integral de Lebesgue"), lo que fue logrado en su tesis doctoral (1902) y fue el inicio de la teoría de la medida. El análisis de Fourier es formulado en el contexto de la medida obteniendo más generalidad y fuerza.
5. En plena II Guerra Mundial, a inicios de los años 40's es elaborada una teoría que también fue motivada

por el análisis de Fourier. Es la teoría de las distribuciones de L. Schwartz, la que permite ampliar, aun mas, el universo de las funciones y de muchas otras ideas; en particular, sus aplicaciones en la física-matemática es remarcable. Con el advenimiento de las ondículas se construyeron "ondículas - distribuciones".

6. Desde que las funciones seno y coseno son funciones periódicas, el análisis de Fourier trata frecuentemente con procesos periódicos, en particular con ondas periódicas. Por esta razón tal análisis es usado en los circuitos eléctricos, en los sistemas mecánicos, en problemas de transmisiones. Así, la teoría de comunicaciones, usa series y transformadas de Fourier en sus investigaciones y esto está vinculado con el gran avance tecnológico-cultural, que caracteriza a la actual sociedad. Las ondículas son usadas, con suceso, en los sistemas de comunicaciones.

Retornemos a la afirmación hecha por Fourier ("toda función 2 pi - periódica se puede representar como una serie trigonométrica") . En 1873, el matemático Dubois Reymond construyó una función continua, dos pi periódica tal que su serie de Fourier no la representa en un punto dado. Este descubrimiento produjo un conflicto al interior del análisis. La solución fue buscar nuevas ideas, nuevas teorías que aclaren el panorama. Así se hizo. Se propusieron varias salidas; una de ellas fue propuesta por Alfred Haar en 1909, cuyas ideas encierran el método de construcción de una ondícula, tal como se hizo en la década de los años 1980's. Así Haar puede ser considerado como el primer matemático que construyó una ondícula aun cuando la intención de su trabajo fue otra.

Fue alrededor del trabajo de Haar en que evolucionarían un conjunto de métodos y teorías, las que terminarían en el nacimiento de la noción de "wavelet" en 1984.

Fourier

3. Ondículas, Motivaciones y Fundamentos. . Nuestro objetivo es dar una breve descripción sobre las ondículas, las ideas y métodos que las precedieron, así como algunas motivaciones que llevaron a la elaboración de tal instrumento matemático. Si, la ondícula es un instrumento !. Ella es la consolidación de una serie de métodos y estrategias usadas en diferentes sectores de la matemática pura y aplicada, de la física teórica, de la electrónica, entre otros campos. Podríamos imaginarnos que en cada una de esas áreas se hablaba un lenguaje y que las ondículas serían el lenguaje universal. En realidad, las ondículas fueron primero descubiertas (como tales) en el contexto del procesamiento de la señal, es decir, antes que los matemáticos intervinieran.

El profesor Yves Meyer fue el primer analista armónico que intervino tan pronto tuvo conocimiento de la teoría, elaborada por el geosísmico Jean Morlet y el físico teórico Alex Grossmann. Esto sucedió en Francia, en 1984.

Pero, ¿qué relación existe entre lo expuesto en las anteriores secciones con las ondículas? Veamos estos, y otros, antecedentes históricos bajo la lupa que nos interesa destacar.

La creación del cálculo diferencial e integral en el siglo XVII nos lleva al estudio de las series trigonométricas a fines del siglo XVIII e inicios del siglo XIX , época en que Fourier escribe su célebre libro: "La teoría Analítica del Calor". En realidad, cuando Fourier representa una función o señal por tales series, lo que está haciendo es representarla como una superposición infinita de ondas de diferentes frecuencias (o "dilataciones"). De esta manera, Fourier trabajó con ondas, tipo seno y coseno, y no con ondículas u onditas (es decir, no usó las "wavelets", en el contexto que daría la posterioridad).

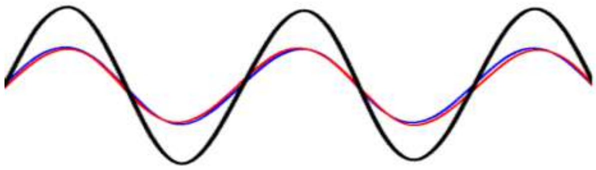

Figura 1.

Ondas.

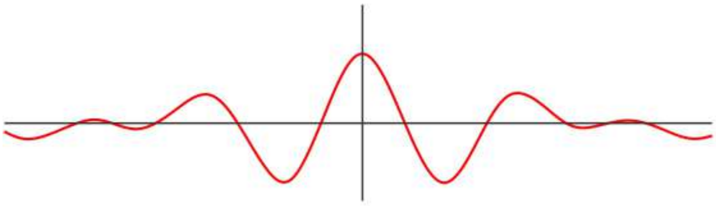

Figura 2.

Ondícula de Shannon

Una onda tiene un gráfico como la mostrada en la figura 1, en tanto que una ondícula tiene un gráfico como la figura 2. Observemos bien ambas figuras. En la fig. 1 la onda continúa infinitamente, tanto a la derecha como a la izquierda, sin decrecer o tender hacia cero. Pero, la onda de la fig. 2 va decreciendo, tanto a la derecha como a la izquierda; por esta razón (y otras) a ondas de éste tipo se les llama ondículas, onditas o "wavelets" Así, una ondícula es una onda "pequeña" (en tal sentido). Estamos admitiendo que las ondículas son funciones (tipo ondas) definidas en la recta y que toman valores reales. Podría suceder que la ondícula tome el valor cero fuera de un intervalo cerrado v acotado (es decir, un intervalo compacto); en este caso, tenemos un ejemplo de ondícula con soporte compacto. Este tipo de ondícula fueron construidas por Ingrid Daubechies a fines de 1987 y son muy importantes sobre todo en las aplicaciones.
Volvamos a la época de Fourier. Su obra fue de gran importancia, tanto al interno de la matemática pura, de la física, de la ingeniería y en el desarrollo de la naciente tecnología de entonces. En la opinión de muchos científicos, el análisis de Fourier es una de las centrales teorías construidas por la mente humana. Su uso en el siglo XX fue decisivo en el acelerado avance de nuevas y nuevas tecnologías, y sabemos lo que esto significa en el desarrollo de los países.

A partir de Fourier la evolución de las nuevas ideas (en la dirección hacia las ondículas) es, sucintamente, como sigue. La necesidad de clarificar el contraejemplo de Dubois Reymond llevó a Alfred Haar (en 1909) a construir ciertas bases ortonormales usando translaciones y dilataciones, las que son dos operaciones básicas para construir una base de ondículas a partir de una sola función ondícula. Haar construyó lo que actualmente llamamos la "ondícula de Haar", la que no es una función continua, sin embargo, ella es útil en muchas aplicaciones. El deseo de mejorar la ondícula de Haar llevó a Franklin a construir otros sistemas ortonormales (1927). Así mismo, a partir de 1930 la teoría de Littlewood-Paley ha de dominar cierto sector del análisis armónico. Es importante remarcar que según esta teoría se tiene descomposiciones diádicas de una función en términos de su serie de Fourier y así está presente la idea de ondícula. Esta teoría pertenece al sector de la matemática pura, sin embargo en los años 80's, Marr usó tal teoría para construir algoritmos en el procesamiento de imágenes. Por el lado del análisis existe una hermosa evolución de ideas, en donde resaltamos los profundos trabajos de A. P. Calderón a quien le debemos un resultado de representación (1964) en donde está presente la idea de ondícula.

Por el lado de la matemática aplicada, de la física e ingeniería se tienen también una serie de contribuciones, básicamente orientadas a optimizar el procesamiento de señales de distintas naturalezas. En, 1946, Dennis Gabor introdujo las ahora llamadas ondículas tiempo-frecuencia (o "ondículas de Gabor") las que consisten en utilizar una función ventana para localizar la transformada de Fourier y así evitar que perturbaciones producidas lejos de la zona que nos interesa estudiar puedan influir en la respuesta deseada. Las ventanas usadas eran rígidas pero se podía trasladar a voluntad. Esta idea es una forma "pre-ondícula" pues las ventanas-ondículas tienen, además, la importante propiedad de poder dilatarse según las circunstancias; así, las ondículas pueden estirarse o encogerse según tengamos bajas o altas frecuencias.

En 1975, Croisier, Esteban y Galand desarrollaron la codificación en subbandas en el procesamiento de la señal. Burt y Adelson (en 1982) describen los algoritmos piramidales en el procesamiento de la imagen. Un significativo problema fue el estudiado por D. Marr (1982), quien conjetura que la visión humana y la visión computacional están basados en similares algoritmos y que son independientes de los "alambres" usados en sus realizaciones; en esta dirección está la visión artificial para robots. Meyer y Mallat, dos autoridades en la teoría de ondículas, han probado que la conjetura de Marr es incierta. Por el lado de la física teórica, trabajos en estados coherentes y en renormalización nos muestran el uso de técnicas-ondículas antes que ésta naciera como teoría. La innovación o "revolución-ondícula" se inició formalmente en mutua colaboración entre el físico teórico Alex Grossmann (mecánica cuántica) y el ingeniero geofísico Jean Morlet (que trabajaba en exploraciones de petróleo). Esto ocurrió en Francia en los primeros años de los 80?s. En 1984 salió publicado un trabajo matemático de ambos en la que se formula una nueva técnica matemática para procesar señales. Ellos llamaron “ondelettes” (“wavelets”) a sus pequeñas ondas. Es oportuno remarcar que en 1981, el matemático Strömberg construyó la primera base ortonormal de “wavelets”; lamentablemente su trabajo, que estuvo orientado en el análisis armónico, fue poco conocido.

A partir de 1984 se produce una hermosa interrelación entre matemáticos puros con profesionales de otras áreas: físicos, ingenieros, estadísticos, astrónomos, biólogos, médicos, ... Los matemáticos y los expertos en procesamiento de señales comienzan a construir esta “revolución”. Se descubre que las áreas, antes mencionadas, siendo de distintas naturalezas son en sus técnicas matemáticas la misma cosa cuando se las enfoca en la terminología-ondícula. Se produce así una gran síntesis lo que tiene a su vez un costo. Es importante remarcar que la técnica-ondícula es paralela a la técnica-Fourier (transformada rápida de Fourier,...); ella no desplaza a ésta. Aún más, existen situaciones en que Fourier es más óptimo. Las ondícula no son la salvación de todos los problemas en la actual tecnología. La obra de Fourier perdurará. Pero, las ondículas son una técnica que está teniendo suceso en variados campos de la ciencia y de la tecnología. El análisis de Fourier mide la frecuencia local contenida en la señal, mientras que en el caso del análisis-ondículas se comparan distintas magnificaciones de la señal con distintas resoluciones. El análisis de Fourier es el análisis tiempo-frecuencia, en tanto que el análisis ondículas es el análisis tiempo-escala. Un arduo problema es construir ondículas apropiadas a determinadas circunstancias. Por otro lado, la noción de ondícula está evolucionando. Originalmente se la construyó sobre la recta, con valores reales. Luego se la extiende sobre el plano, y de un modo más general sobre dominios acotados. Todo esto significa usar nuevas ideas matemáticas. Así mismo, ondículas con valores complejos están siendo útiles en las aplicaciones.

Dentro de tal panorama el concepto de análisis multiresolución (AMR) es muy importante; podríamos pensar de este concepto como un microscopio o como un telescopio matemático. El AMR ayuda en la tarea de construir ondículas. Esta fundamental idea fue concebida por el ingeniero electricista S. Mallat cuando era muy joven (23 años) y fue desarrollada conjuntamente con Y. Meyer en 1986. Por esta época, los trabajos de Ingrid Daubechies (graduada en Física) fueron vitales; en particular, su construcción de ondículas de soporte compacto sirven en múltiples aplicaciones. Concluiremos esta parte resumiendo la noción de ondícula. Una ondícula (“madre”) es una función-onda que es suficientemente lisa o suave, tal que ella y todos sus derivadas hasta un cierto orden decaen hacia cero cuando la variable tiende a (más o menos) infinito; además si en tal situación dilatamos la variable y en seguida la sometemos a translaciones vía números enteros, entonces la familia resultante de ondículas (“prole”) se comporta como una base ortonormal en el espacio en que trabajamos. Así de este modo, una señal es descompuesta en términos de tales ondículas. Esta idea de ondícula (y otras generalizaciones) es la que se viene usando con mucho suceso en muchas aplicaciones como veremos en 4.

Y. Meyer

J. Morlet

4. Ondículas; Aplicaciones y Proyecciones.. Vivimos una época de grandes y acelerados avances científicos y tecnológicos. Indudablemente son varios los factores que contribuyen a tal situación. Entre ello, es fundamental el papel de la matemática pura y aplicada, en sus más altas y refinadas concepciones. En consecuencia, si un país, como el nuestro, aspira a desarrollarse y ser compatible con lo que actualmente sucede en muchos países desarrollados, debe replantear seriamente su educación científica y tecnológica. La tecnología avanza en forma acelerada y es soportada por una matemática que también evoluciona en forma rápida. Esto es el caso, por ejemplo, de la teoría de ondículas. En un promedio de 35 años se ha producido una avalancha de trabajos y libros, en varias direcciones, tanto en los dominios de la matemática en sí, como en el de las aplicaciones. Son cada vez más sorprendentes los sectores en donde esta técnica o herramienta se la está usando, y las perspectivas futuras son muchas. Pero, existen científicos que afirman que esta herramienta es solo tal, que ayuda a comprender mejor ciertas situaciones problemáticas, pero que no es una teoría profunda en sí.

En efecto, se espera con cierta inquietud, que las ondícula puedan resolver algún profundo problema y que los métodos no-ondículas no puedan resolver. Sin embargo, las aplicaciones de las ondículas siguen creciendo como pasamos a describir. Remarcamos que solo haremos una visión panorámica y parcial de lo que en realidad está produciéndose en los últimos tiempos.

4.1. Análisis y Ecuaciones Diferenciales.. Hemos mencionado que uno de los caminos que condujeron a la teoría de ondículas fue el del análisis matemático mismo. Formulada la teoría, ella continúa muy estrecha con el desarrollo de la matemática misma. Son muchas las aplicaciones en esta dirección. Por ejemplo, las ondículas sirven para representar funciones que pertenecen a diversos tipos de espacios de funciones; así mismo, tales espacios son caracterizados usando los coeficientes de ondículas. El análisis-ondículas es también formulado en el contexto de la teoría de las distribuciones, con las implicaciones que esto tiene en otras áreas. El análisis funcional y la teoría de operadores están siendo estudiados vía la herramienta ondícula. Las ecuaciones diferenciales, ordinarias y parciales, constituyen un campo muy importante en la matemática y en sus aplicaciones. Actualmente se investiga el uso de las ondículas en la solución de problemas de contorno, los mismos que aparecen en dominios de la física, ingeniería y otras áreas. En esta orientación se utilizan métodos numéricos para construir soluciones aproximadas.

4.2. Estadística- Muestreo.. La estadística es una ciencia muy importante por sus múltiples aplicaciones; en consecuencia, su estudio debe ser motivado a todo nivel. El impacto que está teniendo el uso de las ondículas en la matemática aplicada está motivando su utilización en la estadística; los resultados frente a otros métodos, parecen ser óptimos. La ventaja del "método-ondícula" está en su buena localización tiempo-frecuencia. Existen diversos equipos de investigación en esta orientación; se han escrito artículos y algunos libros sobre aplicaciones de las ondículas a la estadística y al análisis de datos. Remarquemos que el "análisis frecuencia" usando el enfoque-Fourier es un "análisis escala" cuando usamos las ondículas.

Imagine el lector una curva definida sobre la recta. Si solo conociéramos el valor de la curva en determinados puntos, ¿será posible reconstruir la forma de la curva ?. La respuesta depende de técnicas y teorías matemáticas introducidas con tal fin y que están dentro de la teoría de muestreo. En 1949 C. E. Shannon publica un trabajo sobre una teoría matemática en comunicaciones, el cual revolucionó los fundamentos en la ingeniería de las comunicaciones y de la teoría de la información. Una de sus ideas básicas fue un teorema sobre muestreo para señales de banda limitada; la anterior motivación geométrica es de algún modo la idea de ese teorema. A partir de entonces fueron muchos los trabajos de investigación en donde se desarrollan las ideas teóricas, así como de sus aplicaciones. Las ondículas están siendo una nueva perspectiva para la teoría de muestreo.

4.3. Física. . Recordemos que la teoría de ondículas nació con la colaboración de un físico teórico. La física fue una de las primeras áreas en donde surgieron grupos de investigación, de esta manera aparecen las llamadas "ondículas físicas" entre ellas las ondículas-electromagnéticas, las ondículas acústicas, entre otras. Así mismo se desarrollaron aplicaciones a radares, a la óptica, a los fractales, y de un modo general a la teoría de comunicaciones, cuyos modernos equipos están siendo estructurados para ser usados con el lenguaje-ondículas. Una motivación para tales aplicaciones está en la interrelación entre la física y el análisis de la señal, dado que frecuentemente las señales son comunicadas vía ondas electromagnéticas u ondas acústicas. Otra de las importantes aplicaciones de las ondículas es en el estudio de las corrientes marinas. Por ejemplo, existen universidades cuyos investigadores están usando la transformada de ondículas para estudiar el comportamiento de las corrientes alrededor del Antártico; otras están usando las ondículas para determinar el comportamiento de El Niño en relación a la velocidad de la rotación de la Tierra. Esto es un tema de actualidad para nosotros los peruanos. Si estos estudios, vía ondícula, son óptimos frente a otros métodos, entonces la teoría que nos ocupa tendría un significado muy especial desde muchos puntos de vista.

4.4. Computación Gráfica.. La técnica dada por el análisis multiresolución es usada en la computación gráfica; esto significa obtener aproximaciones de diferentes escalas de la señal o imagen en estudio. Este enfoque se ha visto enriquecido por el cada vez mayor interés en el enfoque matemático de las ondículas; la implementación de rápidos y fáciles algoritmos ha permitido tal interés. La idea ondícula es un avance natural de la técnica-Fourier para procesar imágenes, filtrarlas y reconstruirlas, pero con el agregado que la técnica-ondícula permite "ver" mejor tales acciones. La computación gráfica es un sector muy dinámico actualmente debido a su importancia en muchas tecnologías alrededor de las cuales existen grandes intereses económicos. Las “wavelets” han producido impacto en varios sectores de la computación gráfica, como son: procesamiento y compresión de imágenes, iluminación global, animación (dibujos animados), cuadros multiresoluciones, indagación de imágenes, entre otros. Debemos remarcar que varias ideas “clásicas” de las ondículas han sido generalizadas y extendidas por investigadores en computación gráfica, Por ejemplo, el método “Lifting” es introducido para construir ondículas sin usarse el camino tradicional (vía dilataciones y translaciones). Los resultados que se viene obteniendo son muy variados y de gran interés en la tecnología actual. Las perspectivas futuras son alentadoras.

4.5. Huellas Digitales.. Las ondículas están también siendo usadas para procesar huellas digitales. El FBI en EE.UU. las ha adoptado como un instrumento y como un quehacer de investigación. Su archivo consta de al menos 200 millones de registros de huellas digitales, cada archivo contiene un promedio de 107 “bytes” de información. Indudablemente que para manejar tremenda información, los sistemas tradicionales eran insuficientes y no óptimos. Coifman y Wickerhauser, un matemático puro y un matemático aplicado respectivamente, fueron contratados por el FBI para aplicar las bases y los paquetes de ondículas al problema de la compresión de las huellas digitales; el resultado fue favorable frente a otros sistemas. Remarcamos que la clave del éxito, entre los aspectos, es que ella permite “ver” lo esencial de la información dejando de lado lo innecesario; las ondículas actúan como cribas numéricas que permiten exhibir pequeños trozos de “materia prima”.

4.6. Ingeniería.. La ingeniería es una área que usa como lenguaje básico a la matemática. La evolución de las ideas matemáticas influyó en nuevas técnicas y fundamentos en la ingeniería. El uso del análisis de Fourier fue fundamental por cerca de dos siglos; ahora, en la era “wavelets” tal área posee un nuevo instrumento que le está permitiendo mayores logros en muchas situaciones. La teoría de ondículas debe mucho de su desarrollo a ingenieros, en particular, de electrónicos, de eléctricos, informáticos y geosísmicos. Morlet (co-fundador de las sistematización de la teoría) fue ingeniero geosísmico, especialista en procesar señales petrolíferas; Mallat, el joven creador del análisis multiresolución es graduado en ingeniería eléctrica. La lista es larga; es impresionante la interrelación entre ingenieros con otros tipos de profesionales, incluido los matemáticos. La resultante es el desarrollo altamente acelerado de nuevas teorías y tecnologías a cada vez más variadas aplicaciones. El ritmo es muy competitivo entre países desarrollados. Es oportuno subrayar que muchos de los trabajos hechos por los ingenieros fueron de gran rigor matemático, lo que nos indica sus altas formaciones en esta ciencia.

Actualmente son muchas las aplicaciones de las ondículas a la ingeniería. Mencionemos algo relativo al procesamiento de la señal, cuyo objetivo es analizar y modelar las señales del mundo físico para su mejor conocimiento. La idea es proyectar la señal en un determinado espacio en donde la representamos en términos de una base (de ondículas); la elección de una buena base (esto es, la elección de la “wavelet”) depende del tipo de señal que se estudia. Las bases pueden ser finitas o infinitas. Alrededor de estas ideas se ha investigado mucho en los últimos años; sin embargo, desde los años 1950’s fueron construidos diferentes tipos de algoritmos con el objetivo de usarse métodos multiescalas a datos discretos. La teoría de filtros es un dominio que tuvo que ver con el desarrollo de procesamiento de señales y de imágenes. La sucesiva construcción de filtros que permitan reconstrucciones perfectas u óptimas es parte de la historia del quehacer de los ingenieros interesados en estos tipos de problemas. Fue interesante observarse la íntima relación entre los filtros y las ondículas. El algoritmo de la transformada rápida de la ondícula introducida por Mallat en 1989, aparece como un caso particular del esquema codificación subbandas y que permite reconstrucción perfecta.

4.7. Miscelánea de Aplicaciones.. Las ondículas están siendo aplicadas en la medicina y en la biología con resultados alentadores por el significado especial que ello tiene: contribuir al bienestar humano. Por ejemplo, ellas sirven para procesar imágenes de tumores que no son muy nítidas; se las usan para observar el ritmo cardiaco del feto; se obtienen resultados favorables con los electrocardiogramas. La mayoría de las señales biomédicas no son estacionarias; son variables. En consecuencia el Análisis de Fourier es insuficiente para estos casos. La naturaleza matemática de las ondículas hacen de ellas las adecuadas para estudiar muchas señales provenientes de nuestro cuerpo y de nuestra mente. En los EEUU y en Europa algunos hospitales tienen institutos dedicados a investigar cómo optimizar el conocimiento del ser humano, vía el procesamiento de señales que emitimos. Periódicamente se organizan congresos en los que exponen matemáticos y médicos especializados en las aplicaciones de las ondículas. El Japón es un país que entre otras cosas, le interesa saber lo mejor posible sobre los terremotos; pues bien, sus científicos están utilizando las ondículas para procesar señales provenientes del subsuelo. Algo similar ocurre en otros países. En un observatorio astronómico de la Costa Azul, Francia, un equipo de investigadores estudian la organización de las galaxias distantes y en base a esta información tratan de obtener deducciones sobre la formación de esas galaxias. Con los actuales telescopios se tiene capturado alrededor de cien millones de galaxias y por tanto se tiene una enorme información por procesar. La imposibilidad de seguir usándose los métodos tradicionales forzó la utilización de nuevos métodos. Los telescopios tienden a ser, verdaderas computadoras capaces de procesar algoritmos de análisis y síntesis. En esta dirección los astrónomos están ya usando las ondículas para obtener una visión artificial que describa al universo.

El método-ondícula ha sido capaz de reproducir la voz de Johannes Brahms y su ejecución de la Danza Húngara número 1, la misma que fue grabada en 1889. Este milagro fue logrado por matemáticos quienes utilizan el análisis de formas de ondículas adaptado a tal circunstancia y que es capaz de eliminar selectivamente de la grabación el ruido acumulado por muchos años pero al mismo tiempo preservando la música que existe por debajo. En telecomunicaciones las aplicaciones de las ondículas ya son de gran competitividad científica y económica. Los radares con distintos usos; la TV en su contemporánea definición; el teléfono-video; los modelos económicos, ... son ya parte de los usos de esta aventura llamada, “wavelet” !

I. Daubechies

S. Mallat

Referencias

[1] Jaffard, S., Meyer, Y., Ryan, R.: “Wavelets. Tools for Science and Technology”,SIAM. Philadelphia. 2001 .
[2] Mallat, Stéphane: “A Wavelet Tour of Signal Processing”,(3ra edición) Academic Press. 1998 (1ra Ed.).
[3] Ortiz, Alejandro: “Ondículas (“Wavelets”), un Paseo Histórico-Analítico”. Vol. 1 UNT. PUCP. Perú. 2011..
[4] Strang, G.-Nguyen, T.: “Wavelets and Filter Banks”,Wellesley-Cambridge Press. 1996..