Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 06(01): 35 - 40 (2019)

Una Extensión de la Desigualdad de John-Nirenberg.

An Extension of the Inequality of John-Nirenberg.

Alejandro Ortiz Fernández *

Received, Jan. 23, 2019 *Accepted, May. 01, 2019*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2019.01.06

Resumen

El objetivo de esta nota es presentar una extensión de la desigualdad de John-Nirenberg relativo a una caracterización de los espacios de oscilación media acotada (espacios BMO). Se menciona otra extensión de esta desigualdad.

Palabras clave. John-Nirenberg, BMO, Calderón-Zygmund, función φ, caracterización.

Abstract

The objetive of this note is to present an extension of the inequality of John-Nirenberg relative to a characterization of the spaces of bounded mean oscillation (spaces BMO). Another extension of this inequality is mentioned.

Keywords. John-Nirenberg, BMO, Calderón-Zygmund, function φ, characterization.

1. Los Espacios BMO. Desigualdad de John-Nirenberg.. Los espacios de oscilación media acotadas, espacios BMO, fueron introducidos por F. John- L. Nirenberg en 1961 [1] ; estos espacios fueron, y son, importantes en el desarrollo del análisis armónico. Por definición,

$$BMO = \left\{ f \in L^1(Q_o)/\, [f]_{BMO} \equiv \sup_{Q \subset Q_o} \frac{1}{|Q\,|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq M < \infty \right\}$$

donde Q_o es un cubo fijo en R^n, Q_o, Q son cubos con lados paralelos a los ejes coordenados, $f_Q = \frac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q f; \mid Q \mid$ medida de Lebesgue de Q.

Con la norma $\|f\|_{BMO} = \|f\|_{L^1(Q_o)} + [f]_{BMO}$, BMO es un espacio de Banach. Remarcamos que en la definición de BMO, en vez del promedio f_Q se podría usar constantes o polinomios.

Proposición 1. $L^\infty \subset BMO$ *(toda función acotada en Q_o está en BMO) con inclusión estricta* pues se tiene $log \mid x \mid \in BMO$. (Ver [2], pag.89).

Se tiene el siguiente argumento. “Sea $f \in L^1(Q)$ tal que para todo cubo Q se le asocia un número real c_Q tal que el conjunto $E_\alpha = \{x \in Q/|f(x) - c_Q| > \alpha\}$ satisface

$$w(\alpha) = |E_\alpha| \leq Ae^{-b\alpha}|Q| \qquad (*)$$

donde $\alpha > 0$ real; A, b son apropiadas constantes. Entonces $f \in BMO$.”

La prueba del argumento (*) descansa en el siguiente resultado.

*Sección Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú. (jortiz@pucp.edu.pe)

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoComercial-ShareAlike 4.0.

Lema 1. *Sea $g(t), t \geq 0$, una función continuamente diferenciable en $[0,\infty)$ tal que $g(0)=0$, entonces $\int_Q g(|f(x)-c|)dx = \int_o^{\infty} w(\alpha)dg(\alpha)$.*

Prueba de (*). Si $g(t)=t$, $\int_Q |f(x)-c_Q|dx = \int_o^{\infty} w(\alpha)d(\alpha)$

$$\leq A|Q| \int_o^{\infty} e^{-b\alpha}d\alpha = \frac{A}{\alpha}|Q|.$$ Luego, $f \in BMO$.

La parte crucial es el reciproco de este resultado, es el teorema de John-Nirenberg.

Teorema 1 (J-N). . *"Si $f \in BMO$, entonces $w(\alpha) \leqslant Ae^{-b\alpha\|f\|^{-1}_{BMO}}|Q_o|$, donde $\alpha > 0$; $A, b > 0$ son apropiadas constantes que dependen de n. "*
(Para la prueba de este resultado ver, por ejemplo, [2], pag. 92).

2. Espacios BMO_φ.

Sea $\varphi(t)$ una función positiva, no-decreciente, definida sobre R^+. Por definición,

$$BMO_\varphi = \left\{ f \in L^1(Q_o)/\,[f]_{BMO_\varphi} \equiv \sup_{Q\subset Q_o} \frac{1}{\varphi(|Q\,|)} \frac{1}{|Q\,|} \int_Q |f(x)-C_Q|dx \leq M < \infty \right\}$$

donde los cubos son asumidos de medida finita y lados paralelos a los ejes coordenados. Podemos usar f_Q en vez de la constante C_Q. Estos espacios BMO_φ fueron inicialmente considerados por S. Spanne en 1965. (Ver [4]). Se verifica que formas particulares de φ hacen coincidir isomorficamente BMO_φ con algunos clásicos espacios de funciones. Veamos,

- si $\varphi(t)=1$, $BMO_\varphi = BMO$;

- si $\varphi(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<1$, entonces $BMO_\varphi = \bigwedge_\alpha$, donde $\bigwedge_\alpha$ es el espacio de Lipschitz

$$\bigwedge\nolimits_\alpha = \{f \in L^\infty / \|f\|_{\bigwedge_\alpha} = \sup_{x,y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\};$$

Si $-1<\alpha<0$, entonces $BMO_\varphi = L^{p,\lambda}$, con $\alpha = -\frac{\lambda}{p}$, donde $L^{p,\lambda}$ es el espacio de Morrey

$$L^{p,\lambda} = \left\{ f \in L^1(Q_o)/\|f\|_{L^{p,\lambda}} = \sup_Q \left\{ \frac{1}{r^\lambda} \int_Q |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \right\} < \infty,$$

donde r es la longitud del lado de Q, $1 \leq p < \infty$.

Si $\lim_{r\longrightarrow 0} \varphi(r) = a \neq 0$, entonces $L^\infty \subset BMO_\varphi$.

3. Extensión de la Desigualdad de John-Nirenberg.

La parte inmediata es el

Lema 2. *Sea $f \in L^1(Q)$, $\alpha > 0$ real, tal que para todo $Q \subset Q_o$ se le asocia un número c_Q tal que $E_\alpha = \{x \in Q/|f(x)-c_Q| > \alpha\}$ satisface*

$$w(\alpha) = |E_\alpha| \leq Ae^{-b\alpha}\varphi(2^{-kn}|Q|)|Q|,$$

con $k \in Z^+$, A, b constantes positivas. Entonces, $f \in BMO_\varphi$.

Prueba.

$$\int_Q |f(x)-c_Q|dx = \int_o^{\infty} w(\alpha)d\alpha \leq A\varphi(2^{-kn|Q|}) \int_o^{\infty} e^{-b\alpha}dx|Q|$$
$$\leq A_1\varphi(|Q|)|Q|.$$

La prueba del recíproco de este lema 2 es el objetivo de esta nota.

Teorema 2 (φ). *Si $f \in BMO_\varphi$ y $\alpha > 0$ real, entonces*

$$w(\alpha) = |\,\{x \in Q_o/|f(x)-f_{Q_o}| > \alpha\}\,| \leq Ae^{-b\alpha\|f\|^{-1}_{BMO_\varphi}}.\varphi(2^{-kn}|Q_o|)|Q_o|$$

donde $A = cA_1$ *con* $A_1 = 2^{2^{\frac{n}{n+1}+n}}$, $c > 0$ *(independiente de k),* $b = \dfrac{n}{2^{n+1}} log2$, $k = \left[\dfrac{\alpha - 1}{2^{n+1}}\right]$ *(parte entera).*

Previamente veamos algunos convenios como asumir que $\|f\|_{BMO_\varphi} = 1$. Así mismo, observemos:
de

$$\frac{1}{\varphi(|Q|)}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq M < \infty$$

ó

$$\frac{1}{\varphi(|Q|)}\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\frac{f(x) - f_Q}{M}\right| dx \leq 1$$

se puede asumir que, redefiniendo f en BMO_φ, $f_Q = 0$ y $M = 1$. Por otro lado, si $|Q_o| = a \neq 1$ y si d es la longitud del lado de Q_o, tendremos $\left(\frac{d}{b}\right)^n = 1$ con $b = \sqrt[n]{a}$, y se puede asumir que $|Q_o| = 1$; también se puede asumir que $\varphi(|Q_o|) = \varphi(1) = 1$, pues si $\varphi(1) = c \neq 1$, $\varphi_1(t) = \dfrac{\varphi(t)}{c}$ tiene las mismas características que φ.

La prueba del teorema se hará por etapas en donde es fundamental el lema de Calderón-Zygmund.

Lema 3. *(Descomposición de Calderón-Zygmund). Sea* f *una función integrable definida en un cubo* Q_o *y sea* $\lambda > 0$ *real tal que* $\dfrac{1}{|Q_o|}\displaystyle\int_{Q_o} |f(x)|dx \leq \lambda$. *Entonces existe una familia enumerable* $\{Q_k\}$ *de cubos abiertos disjuntos en* Q_o *tal que:*

(a). $|f(x)| \leq \lambda$ *c.t.p. si* $x \in Q_o - \bigcup_k Q_k$ *;*

(b) $\lambda < \dfrac{1}{|Q_k|}\displaystyle\int_{Q_k} |f(x)|dx \leq 2^n\lambda$*;*

(c). $\displaystyle\sum_k |Q_k| < \frac{1}{\lambda}\int_{Q_o} |f(x)|dx.$

Esta fundamental descomposición fue introducida por Calderón-Zygmund en 1952 en un fundamental trabajo sobre integrales singulares. Por razones didácticas ofrecemos su demostración. Veamos. Dividamos Q_o en 2^n cubos abiertos congruentes (dividiendo por 2 sus lados). Con estos subcubos se presentan dos casos:

(I). $\dfrac{1}{|Q_i'|}\displaystyle\int_{Q_i'} |f(x)|dx > \lambda$; (II). $\dfrac{1}{|Q_i''|}\displaystyle\int_{Q_i''} |f(x)|dx \leq \lambda$.

Conservemos los cubos Q_i' que satisfacen (I) (que es parte de (b)), mientras que los cubos Q_i'', que satisfacen (II), son sometidos al anterior proceso, esto es, son divididos en 2^n nuevos subcubos congruentes, dando origen a una nueva generación de cubos en donde nuevamente tenemos

(I). $\dfrac{1}{|Q_{ii}'|}\displaystyle\int_{Q_{ii}'} |f(x)|dx > \lambda$; (II). $\dfrac{1}{|Q_{ii}''|}\displaystyle\int_{Q_{ii}''} |f(x)|dx \leq \lambda$.

Retenemos los cubos Q_{ii}', mientras los Q_{ii}'' son sometidos otra vez al anterior proceso. Y así sucesivamente ... De esta manera, renumerando obtenemos familias de cubos abiertos disjuntos, de distintas generaciones $Q_1, Q_2, ..., Q_k$,... tal que

$\lambda|Q_k| < \displaystyle\int_{Q_k} |f(x)|dx \leq 2^n\lambda|Q_k|$ lo que implica (b).

Por otro lado, $|Q_k| < \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_{Q_k} |f(x)|dx$, de donde $\displaystyle\sum_k |Q_k| < \frac{1}{\lambda}\int_{Q_o} |f(x)|dx$, que es (c).

Finalmente, sea $x \in Q_o - \bigcup_k Q_k$, esto es, x pertenece a algún cubo del tipo Q_k'', donde (por construcción) $|Q_k''| \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Como tenemos

$\dfrac{1}{|Q_k''|}\displaystyle\int_{Q_k''} |f(y)|dy \leq \lambda$, por el teorema de diferenciación de Lebesgue se tiene

$|f(x)| = \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{|Q_k''|}\int_{Q_k''}|f(y)|dy \leq \lambda$, c.t.p. Esto es (a).▪

En la ruta hacia el teorema $-\varphi$ se tiene el

Lema 4. *Sea $\alpha > 0$ un real dado y $f \in BMO_\varphi$. Si $\frac{1}{|Q_o|}\int_{Q_o}|f(x)|dx < \alpha$, entonces se tiene $\alpha < \frac{1}{|C|}\int_C |f(x)|dx \leq \alpha + 2^n\varphi(2^n|C|)$ donde $C \in D_\alpha$, siendo D_α la unión de los cubos diádicos disjuntos que aparecen en el lema 3.*

Prueba. Por el lema 3 se tiene $\alpha < \frac{1}{|C|}\int_C |f(x)|dx \leq 2^n\alpha, \forall C \in D_\alpha$.

Desde que por hipótesis se tiene $\frac{1}{|Q_o|}\int_{Q_o}|f(x)|dx < \alpha$, entonces $C \neq Q_o$. Luego, C fue obtenido a partir de una descomposición diádica de un cubo más grande, que llamaremos C_o, el cual satisface

$\frac{1}{|C_o|}\int_{C_o}|f(x)|dx \leq \alpha$, (esto es, $|f_{C_o}| \leq \alpha$. Entonces,

$\frac{1}{|C|}\int_C |f(x)|dx \leq \frac{1}{|C|}\int_C |f(x) - f_{C_o}|dx + |f_{C_o}| \leq 2^n\varphi(2^n|C|)\|f\|_{BMO_\varphi} + \alpha.$

Nota. De $2^n|C| \leq |Q_o| = 1$ se observa que $\varphi(2^n|C|) \leq 1$, luego se obtiene $\alpha < \frac{1}{|C|}\int_C |f(x)|dx \leq \alpha + 2^n$, un resultado debido a U. Neri (1976).

Lema 5. *Si $\tilde{\alpha} = \alpha + 2^{n+1}$, entonces $D_{\tilde{\alpha}} \subset D_\alpha$ y se tiene*

$$|D_{\tilde{\alpha}}| \leq 2^{-n}|D_\alpha|\varphi(|D_\alpha|)$$

.

Prueba. En general, del lema 3 se obtiene: si $\alpha < \alpha'$ entonces $D_{\alpha'} \subset D_\alpha$. Por otro si $C \in D_\alpha$ es arbitrario, entonces por la nota se tiene

$$\frac{1}{|C|}\int_C |f(x)|dx \leq \alpha + 2^n \leq \tilde{\alpha}$$

lo que significa que C fue subdividido en la descomposición correspondiente a $D_{\tilde{\alpha}}$.

Pongamos $D' = D_{\tilde{\alpha}} \bigcap C$.

Ahora, un argumento geométrico en el lema 3 permite ver que $D' = \phi$ ó que D' es la unión de cubos disjuntos en $D_{\tilde{\alpha}}$.

Además se tiene,

$\tilde{\alpha} < \frac{1}{|D'|}\int_{D'}|f(x)|dx \leq \frac{1}{|D'|}\int_{D'}|f(x) - f_C|dx + \frac{1}{|D'|}|D'||f_C|$

$\leq \frac{1}{|D'|}\int_C |f(x) - f_C|dx + \alpha + 2^n \leq \frac{|C|\varphi(|C|)}{|D'|} + \alpha + 2^n.$

Es decir, se tiene

$\alpha + 2^{n+1} \leq \frac{|C|\varphi(|C|)}{|D'|} + \alpha + 2^n$, esto es,

$|D'| \leq 2^{-n}|C|\varphi(|C|)$. Luego,

$$|D_{\tilde{\alpha}}| = \sum |D'| \leq 2^{-n}\sum_{C\in D_\alpha}|C|\varphi(|C|) \leq 2^{-n}\varphi(|D_\alpha|)\sum_{C\in D_\alpha}|C|$$
$$\leq 2^{-n}\varphi(|D_\alpha|)|D_\alpha|. ▪$$

Prueba del Teorema $-\varphi$. Pongamos $k = \left[\frac{\alpha - 1}{2^{n+1}}\right]$; entonces, si $\alpha_1 = 1 + k2^{n+1}$ se tiene $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha$, de donde $w(\alpha) = |E_\alpha| \leq |E_{\alpha_1}| =$ (lema 3) $= |D_{\alpha_1}| = |D_{1+k2^{n+1}}|$.

Aplicando reiteradamente el lema 5, luego de k pasos, se obtiene

$|D_{1+k2^{n+1}}| \leq 2^{-n}|D_{1+(k-1)2^{n+1}}|\varphi(|D_{1+(k-1)2^{n+1}}|) \leq$

$2^{-2n}|D_{1+(k-2)2^{n+1}}|\varphi(|D_{1+(k-2)2^{n+1}}|)\varphi\left(2^{-n}|D_{1+(k-2)2^{n+1}}|\varphi(|D_{1+(k-2)2^{n+1}}|)\right)$
$\leq$ (desde que φ es no-decreciente y $\varphi(|D_{1+(k-2)2^{n+1}}|) < \varphi(|Q_o|) = 1$)
$\leq 2^{-2n}|D_{1+(k-2)2^{n+1}}|\varphi(2^{-n}|D_{1+(k-2)2^{n+1}}|) \leq ... \leq c2^{-kn}|D_1|\varphi(2^{-kn}|D_1|)$
$\leq c2^{-kn}\varphi(2^{-kn}|Q_o|)|Q_o|$.

En conclusión se ha obtenido $w(\alpha) \leq c2^{-kn}\varphi(2^{-kn}|Q_o|)|Q_o|$.

Por otro lado, se sabe que

$\dfrac{\alpha-1}{2^{n+1}} \leq k+1$, luego $-nk \leq -n\left(\frac{\alpha-1}{2^{n+1}}-1\right)$, de donde $2^{-kn} \leq 2^{-n\left(\frac{\alpha-1}{2^{n+1}}-1\right)}$.

Y así finalmente se tiene

$$w(\alpha) \leq c2^{\frac{n}{2^{n+1}}+n} \cdot 2^{-\alpha\cdot\frac{n}{2^{n+1}}}\varphi(2^{-kn}|Q_o|)|Q_o|$$

la cual es la tesis

$$w(\alpha) \leq Ae^{-b\alpha\|f\|^{-1}_{BMO_\alpha}} \cdot \varphi(2^{-kn}|Q_o|)|Q_o|$$

con

$$A = cA_1, \quad A_1 = 2^{\frac{n}{2^{n+1}}+n}, \qquad b = \frac{n}{2^{n+1}}log2.$$

4. Una Ψ- extensión. . En [6], A. Torchinsky ha considerado a los espacios BMO_φ (pag.220; 6.20) y posteriormente obtuvo una versión de la desigualdad de John-Nirenberg generalizada; algunos detalles y casos particulares de esta versión puede verse en [3] , pag.153. Brevemente veamos algunos argumentos. Sea $\varphi(t)$ una función continua, no-decreciente, de valor real tal que $\varphi(0) = 0$. BMO_φ es definido como en la sección 2 siendo la seminorma

$$\|f\|_{BMO_\alpha} \equiv \|f\|_{*,\varphi} = \sup_{Q\subset Q_o}\frac{1}{\varphi(|Q\ |)}\frac{1}{|Q\ |}\int_Q |f(x)-f_Q|dx$$

Torchinsky considera la función $\Psi_\lambda(t) = \displaystyle\int_t^{2^n\lambda}\varphi(y)\frac{dy}{y}$ y obtiene el

Teorema 3 (Ψ). *Sea $f \in BMO_\varphi$. Si $\lim\limits_{t\to o^+}\Psi_\lambda(t) = +\infty$, entonces existe una constante c tal que para todo $Q \subset Q_o$ se tiene*

$$w(\alpha) \equiv |\{x \in Q/|f(x)-f_Q| > \alpha\}| < c\Psi^{-1}_{|Q|}\left(\frac{\alpha}{\|f\|_{*,\varphi}}\right).$$

En consecuencia se tiene la proposición

Proposición 2. *Sea $\varphi(t) = \eta\left(log\left(\frac{1}{t}\right)\right)$, donde $\eta(t) = \Phi'(t)$ siendo $\Phi(t)$ una función derivable, no-decreciente con $\Phi(0) = 0$. Si*

$$\Psi_{|Q|}(t) = \int_t^{2^n|Q|}\eta\left(log\left(\frac{1}{y}\right)\right)\frac{dy}{y},$$

entonces se tiene $\Psi^{-1}_{|Q|}(t) \leq ce^{-\frac{1}{2}\Phi^{-1}(t)} \cdot |Q|$.

Corolario 1. *(Recuperación de la desigualdad de John-Nirenberg para BMO). Sea $\eta(y) = 1$ y $\varphi(t) = 1$; como Φ es tal que $\Phi'(t) = 1$ se tiene que $\Phi(t) = t$, esto es, $\Phi^{-1}(t) = t$. Entonces ,*

$\Psi^{-1}_{|Q|}(t) \leq ce^{-\frac{1}{2}\Phi^{-1}(t)} \cdot |Q| = ce^{-\frac{1}{2}t} \cdot |Q|$,

y por el teorema $-\Psi$ tenemos

$$w(\alpha) \leq c\Psi_{|Q|}^{-1}\left(\frac{\alpha}{\|f\|_{*,\varphi}}\right) \leq ce^{-\frac{1}{2}\alpha\|f\|_{*,\varphi}^{-1}} \cdot |Q|,$$

que es la desigualdad de John-Nirenberg para BMO..

Agradecimiento. El autor expresa su agradecimiento al Prof. Alberto Torchinsky, quien propuso la extensión mencionada y nos guió en la elaboración de esta nota $([5])$ pero asumimos la entera responsabilidad de la misma.

Referencias

[1] John, F.-Nirenberg, L: "On Functions of Bounded Mean Oscillation" Comm. P. Appl. Math. 1961.
[2] Ortiz, Alejandro: "Tópicos sobre análisis armónico" Dpto. Matemática. UNT. Perú. 1988.
[3] Ortiz, Alejandro: "Casos particulares de la desigualdad de John-Nirenberg para espacios BMO_{φ}" PRO MATHEMATICA. Vol.IV Nos. 7-8. PUCP. 1990.
[4] Spanne, S.: "Some Fuction Spaces Defined Using the Mean Oscillation over Cubes" Ann. Sup. Pisa. 1965.
[5] Torchinsky, Alberto: (comunicación personal. 1984)
[6] Torchinsky, Alberto: "Real-Variable Methods in Harmonic Analysis" Academic Press. 1986.