



Congruências de esferas geodésicas em \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3

Congruence of geodesic spheres in \mathbb{H}^3 and \mathbb{S}^3

Edwin O. S. Reyes* and Carlos M. C. Riveros†

Received, Nov. 30, 2018

Accepted, Dec. 21, 2018

DOI: <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2018.02.08>

Resumo

Em [2], foi obtida uma caracterização das superfícies em \mathbb{R}^3 que são envelopes de uma congruência de esferas em \mathbb{R}^3 , na qual o outro envelope está em \mathbb{R}^2 . Neste artigo, caracterizamos as superfícies de \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 que são envelopes de uma congruência de esferas geodésicas em \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 , respectivamente, na qual o outro envelope está contido em $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ e $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$. Mostramos que esta caracterização permite obter localmente uma parametrização das superfícies contidas em \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 , esta caracterização estende o resultado obtido em [2]. Além disso, damos condições suficientes para que estas superfícies estejam associadas localmente por uma transformação de Ribaucour. Também, apresentamos famílias de superfícies parametrizadas por linhas de curvatura \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 , que dependem unicamente de uma função de duas variáveis, a qual é solução de uma equação diferencial. Finalmente, caracterizamos as superfícies Σ de tipo esférico em \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 , como as superfícies onde sua função raio é solução da equação de Helmholtz.

Palavras chave. Superfícies de tipo esférico, linhas de curvatura, espaço Hiperbólico, congruência de esferas geodésicas.

Abstract

In [2], was obtained a characterization of the surfaces in \mathbb{R}^3 which are envelopes of a sphere congruence in \mathbb{R}^3 , in which the other envelope is in \mathbb{R}^2 . In this paper, we characterize the surfaces of \mathbb{H}^3 and \mathbb{S}^3 which are envelopes of a congruence of geodesic spheres in \mathbb{H}^3 and \mathbb{S}^3 , respectively, in which the other envelope is contained in $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ and $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$. We show that this characterization allows locally to obtain a parameterization of the surfaces contained in \mathbb{H}^3 and \mathbb{S}^3 , this characterization extends the result obtained in [2]. Moreover, we provide sufficient conditions for these surfaces to be locally associated by a transformation of Ribaucour. Also, we present families of surfaces parameterized by lines of curvature in \mathbb{H}^3 and \mathbb{S}^3 , which depend on a function of two variables which is solution of a differential equation. Finally, we characterize the surfaces of the spherical type Σ in \mathbb{H}^3 and \mathbb{S}^3 , as the surfaces where its radius function is the solution of the Helmholtz equation.

Keywords Surfaces of the spherical type, lines of curvature, Hyperbolic space, congruence of geodesic spheres.

1. Introdução. Em [2], Corro apresentou uma maneira de parametrizar superfícies de \mathbb{R}^3 como envelopes de uma congruência de esferas na qual um envelope está contido em um plano e com função raio h associada a um sistema de tipo hidrodinâmico. Como aplicação, ele estuda as superfícies no espaço hiperbólico que satisfazem a igualdade

$$2ach \frac{2(c-1)}{c} (H - 1) + (a + b - ach \frac{2(c-1)}{c}) K_I = 0,$$

*Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias, Universidade Federal do Oeste da Bahia, 47808-021 Barreiras-BA, Brazil (edwin.reyes@ufob.edu.br).

†Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília-DF, Brazil (carlos@mat.unb.br).

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + b \neq 0$, $c \neq 0$, H é a curvatura média e K_I é a curvatura Gaussiana. Esta classe de superfícies incluem as superfícies de Bryant e as superfícies flat do espaço hiperbólico, e são chamadas de superfície Weingarten generalizada do tipo Bryant.

Uma superfície orientada $\Psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana não nula K e curvatura média H é chamada uma *superfície mínima de Laguerre* se

$$\Delta_{III} \left(\frac{H}{K} \right) = 0,$$

onde Δ_{III} é o laplaciano com respeito a terceira forma fundamental III de Ψ . O estudo dessas superfícies foi feita por vários autores, entre eles W. Blaschke [1], [3], onde tais superfícies aparecem como pontos críticos do funcional

$$L(\Psi) = \int \frac{H^2 - K}{K} dM,$$

onde dM é o elemento de área da superfície.

Em [5], os autores estudam superfícies mínimas de Laguerre como gráficos de funções biarmônicas no modelo isotrópico da geometria de Laguerre. Em particular estudam as superfícies mínimas de Laguerre de tipo esférico, a saber as superfícies M de \mathbb{R}^3 tal que o conjunto de esferas de centro $p + \frac{H(p)}{K(p)}N(p)$, $p \in M$, tangenciam a um plano fixo orientado.

Em [4], as superfícies de tipo esférico em \mathbb{R}^3 são caracterizadas como as superfícies cuja função raio das esferas médias é harmônica, isto é, a função raio h satisfaz $\Delta h = 0$.

Neste artigo, motivados pelos resultados de [2] e [4], caracterizamos as superfícies de \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 que são envelopes de uma congruência de esferas geodésicas em \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 , respectivamente, na qual o outro envelope está contido em $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ e $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$. Mostramos ainda que esta caracterização permite obter localmente uma parametrização das superfícies contidas em \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 , esta caracterização estende o resultado obtido em [2]. Além disso, daremos condições suficientes para que estas superfícies estejam associadas por uma transformação de Ribaucour. Também, fornecemos famílias de superfícies parametrizadas por linhas de curvatura em \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 que dependem de uma função de duas variáveis, a qual é solução de uma equação diferencial. Finalmente, caracterizamos as superfícies Σ de tipo esférico em \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 , como as superfícies onde sua função raio é solução da equação de Helmholtz (ver [6]).

2. Preliminares. Denotaremos por $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de \mathbb{R}^n , tal que $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Além disso, dada uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a derivada parcial de f relativa a u_i , $1 \leq i \leq n$, será denotada por $f_{,i}$, isto é, $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial u_i}$.

Denotaremos por $\overline{M}^3(c)$ a uma variedade Riemanniana simplesmente conexa de dimensão 3 com curvatura seccional constante $c = -1, 0, 1$, isto é, $\overline{M}^3(c)$ denota ao *espaço Hiperbólico* \mathbb{H}^3 se $c = -1$, ao *espaço Euclidiano* \mathbb{R}^3 quando $c = 0$ ou a *esfera* \mathbb{S}^3 se $c = 1$.

Seja \mathbb{L}^{n+2} o conjunto $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ munido com a pseudo-métrica

$$(2.1) \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} u_i v_i - u_{n+2} v_{n+2}.$$

Um modelo para o espaço hiperbólico $(n + 1)$ -dimensional é a subvariedade

$$(2.2) \quad \mathbb{H}^{n+1} = \{u \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle u, u \rangle = -1, u_{n+2} > 0\}.$$

Um modelo para a esfera $(n + 1)$ -dimensional é o conjunto

$$(2.3) \quad \mathbb{S}^{n+1} = \{u \in \mathbb{R}^{n+2}; \|u\| = 1\}$$

munido com a métrica Euclidiana.

Observação 1. De agora em diante, consideraremos $\overline{M}^3(c) = \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ quando $c = -1$, $\overline{M}^3(c) = \mathbb{R}^3$ se $c = 0$ e $\overline{M}^3(c) = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ quando $c = 1$.

Definição 1. Dizemos que M é *orientável* se for possível determinar um campo vetorial diferenciável unitário N normal a $T_p M$, para cada $p \in M$. Neste caso, dizemos que N é a *aplicação normal de Gauss* de M e que tal

campo determina uma orientação em M . Em coordenadas locais,

$$N_{,i} = \sum_{j=1}^2 W_{ij} X_{,j}, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

onde X é uma parametrização de M . A matriz $W = (W_{ij})$ é chamada de *matriz de Weingarten* de M .

Definição 2. A *Primeira Forma Fundamental I* de M é a restrição da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\overline{M}^3(c)$ aos planos tangentes $T_p M$. Logo, para cada $p \in M$

$$I_p(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p M.$$

A *Segunda Forma Fundamental II* e a *Terceira Forma Fundamental III* de M são dadas por

$$II_p(w_1, w_2) = -\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p M,$$

$$III_p(w_1, w_2) = \langle dN_p(w_1), dN_p(w_2) \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p M,$$

onde $p \in M$ e dN_p é a diferencial da normal de Gauss em p .

As seguintes definições são baseadas no artigo [7].

Definição 3. Uma *Congruência de esferas geodésicas* em $\overline{M}^3(c)$ é uma família a 2-parâmetros de esferas geodésicas em $\overline{M}^3(c)$ tal que o conjunto dos centros das esferas geodésicas é uma superfície M de $\overline{M}^3(c)$ e o raio das esferas geodésicas é dado por uma função diferenciável sobre M .

Um *envelope* de uma congruência de esferas geodésicas em $\overline{M}^3(c)$ é uma superfície M_1 de $\overline{M}^3(c)$ tal que cada ponto de M_1 é tangente a uma esfera geodésica da congruência de esferas geodésicas.

Definição 4. Sejam M_1 e M_2 superfícies de $\overline{M}^3(c)$. Dizemos que M_1 e M_2 estão *Associadas por uma congruência de esferas geodésicas em $\overline{M}^3(c)$* , se existe um difeomorfismo $\Psi : M_1 \rightarrow M_2$ tal que os pontos correspondentes p e $\Psi(p)$ de M_1 e M_2 , respectivamente, são tangentes à mesma esfera geodésica de uma congruência de esferas geodésicas.

Um caso especial da definição anterior acontece quando Ψ leva linhas de curvatura de M_1 em linhas de curvatura em M_2 .

Definição 5. Seja M_1 uma superfície orientável de $\overline{M}^3(c)$. Uma superfície M_2 de $\overline{M}^3(c)$ é associada a M_1 por uma *Transformação de Ribaucour* se existem uma função diferenciável $h : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e um difeomorfismo $\Psi : M_1 \rightarrow M_2$, tais que

1. $exp_p(h(p)N_1(p)) = exp_{\Psi(p)}(h(p)N_2(\Psi(p)))$, para todo $p \in M_1$, onde exp é a aplicação exponencial de $\overline{M}^3(c)$ e N_1, N_2 são os campos de vetores normais unitários de M_1 e M_2 , respectivamente.
2. O subconjunto $S = \{exp_p(h(p)N_1(p)); p \in M_1\}$ é uma superfície de $\overline{M}^3(c)$.
3. Ψ leva linhas de curvatura de M_1 em linhas de curvatura de M_2 .

Dizemos ainda que M_1 e M_2 estão *localmente associados por uma transformação de Ribaucour* se $\forall p \in M_1$, existe uma vizinhança de p em M_1 associada por uma transformação de Ribaucour a um aberto de M_2 .

Observação 2. Seja M uma superfície de $\overline{M}^3(c)$ e N seu campo normal unitário ao longo de $\overline{M}^3(c)$. Se $c = \pm 1$, então $\langle N(p), p \rangle = 0, \forall p \in M$. De fato, seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{M}^3(c)$ uma parametrização local ortogonal de $p \in \overline{M}^3(c)$.

Logo,

$$\langle X(u), X(u) \rangle = \pm 1, \quad \forall u \in U,$$

portanto, derivando parcialmente a equação anterior, obtemos

$$\langle X_{,i}(u), X(u) \rangle = 0, \quad \forall u \in U, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Se $p \in M$, então $N(p) = X_{,i}(u)$ para algum $i = 1, 2$ e $X(u) = p$.

Considerando $\overline{M}^3(c)$ como $\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$, a condição (1) da definição anterior pode ser escrita como

$$(2.4) \quad p + h(p)N_1(p) = \Psi(p) + h(p)N_2(\Psi(p)), \quad \forall p \in M_1,$$

tal que se ϕ é a função raio sobre M_1 , então

$$(2.5) \quad h(p) = \begin{cases} \tan(\phi(p)), & \phi : M_1 \rightarrow (0, \frac{\pi}{2}), \text{ se } c = 1. \\ \tanh(\phi(p)), & \phi : M_1 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ se } c = -1. \end{cases}$$

De fato, um ponto de \mathbb{S}^3 o qual pertence à geodésica que passa pelo $p \in \mathbb{S}^3$ na direção $N_1(p)$, pode ser parametrizado como

$$\cos(\phi(p))p + \sin(\phi(p))N_1(p), \quad \phi : \mathbb{S}^3 \rightarrow (0, \pi).$$

Dado que $p \in M_1$ e $\Psi(p) \in M_2$ são tangentes à mesma esfera geodésica, então $\phi(p) \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Analogamente, um ponto de \mathbb{H}^3 o qual pertence à geodésica que passa pelo ponto $p \in \mathbb{H}^3$ na direção $N_1(p)$, pode ser parametrizado como

$$\cosh(\phi(p))p + \sinh(\phi(p))N_1(p), \quad \phi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$(2.6) \quad \phi(p) = \begin{cases} \tan^{-1}(h(p)), & h : M_1 \rightarrow (0, \infty), \text{ se } c = 1. \\ \tanh^{-1}(h(p)), & h : M_1 \rightarrow (-1, 1), \text{ se } c = -1. \end{cases}$$

Definimos agora (localmente) o sistema de coordenadas 3-dimensional de $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ e $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ de forma análoga ao sistema de coordenadas esférico no espaço Euclidiano e ao espaço hiperbólico no espaço de Minkowski, respectivamente.

No caso de \mathbb{S}^3 , as coordenadas consistem de 3 ângulos coordenados ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , onde $\phi_1, \phi_2 \in (0, \pi)$ e $\phi_3 \in (-\pi, \pi)$. Se u_i , $1 \leq i \leq 4$, são as coordenadas cartesianas de \mathbb{S}^3 em \mathbb{R}^4 , então

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u_1 &= \cos(\phi_1), \\ u_2 &= \sin(\phi_1)\cos(\phi_2), \\ u_3 &= \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_3), \\ u_4 &= \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\sin(\phi_3). \end{aligned}$$

Se $\phi_3 = 0$, então $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ e as coordenadas cartesianas de \mathbb{S}^2 em \mathbb{R}^4 vem dadas por

$$(2.8) \quad u_1 = \cos(\phi_1), \quad u_2 = \sin(\phi_1)\cos(\phi_2), \quad u_3 = \sin(\phi_1)\sin(\phi_2), \quad u_4 = 0.$$

Para \mathbb{H}^3 , as coordenadas consistem de 3 ângulos coordenados ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , onde $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \mathbb{R}$. Se u_i , $1 \leq i \leq 4$, são as coordenadas cartesianas de \mathbb{H}^3 em \mathbb{L}^4 , então

$$(2.9) \quad \begin{aligned} u_1 &= \sinh(\phi_1), \\ u_2 &= \cosh(\phi_1)\sinh(\phi_2), \\ u_3 &= \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2)\sinh(\phi_3), \\ u_4 &= \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2)\cosh(\phi_3). \end{aligned}$$

Se $\phi_3 = 0$, então $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ e as coordenadas cartesianas de \mathbb{H}^2 em \mathbb{L}^4 vem dadas por

$$(2.10) \quad u_1 = \sinh(\phi_1), \quad u_2 = \cosh(\phi_1)\sinh(\phi_2), \quad u_3 = 0, \quad u_4 = \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2).$$

De agora em diante, consideraremos $M(c)$ como a superfície de $\overline{M}^3(c)$ tal que $M(c) = \mathbb{H}^2$ quando $c = -1$, $M(c) = \mathbb{R}^2$ quando $c = 0$ ou $M(c) = \mathbb{S}^2$ quando $c = 1$, com campo normal unitário dado por $N(p) = e_c$, $\forall p \in M(c)$, onde e_c é definido por

$$(2.11) \quad e_c = \begin{cases} (0, 0, 1, 0) \in \mathbb{L}^4, & \text{se } c = -1. \\ (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3, & \text{se } c = 0. \\ (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4, & \text{se } c = 1. \end{cases}$$

Seja $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M(c)$ uma parametrização local ortogonal de $M(c)$, isto é, $L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$. Então os símbolos de Christoffel de L_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$, são dados por

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \Gamma_{ij}^m &= 0, \text{ para } i, j, m \text{ distintos.} \\ \Gamma_{ij}^j &= \frac{L_{jj,i}}{2L_{jj}}, \text{ para todo } i, j. \\ \Gamma_{ii}^j &= -\frac{L_{ii,j}}{2L_{jj}}, \text{ para } i \neq j. \end{aligned}$$

Denotaremos por \mathbb{C} o corpo dos números complexos. Além disso, identificamos \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 pelo isomorfismo

$$(2.13) \quad G_{\mathbb{R}^2}(z) = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}.$$

A identificação de \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 induz de maneira natural a noção de produto interno de funções holomorfas. Com efeito, dadas as funções holomorfas $f, g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ o *produto interno* $\langle f, g \rangle$ em U é dada por

$$\langle f, g \rangle = \operatorname{Re}(f)\operatorname{Re}(g) + \operatorname{Im}(f)\operatorname{Im}(g).$$

Observamos que $\operatorname{Re}(f) = \langle f, 1 \rangle$ e $\operatorname{Im}(f) = \langle f, i \rangle$.

Observação 3. Consideremos a esfera $\mathbb{S}^{n+1} = \{u \in \mathbb{R}^{n+2}; \|u\| = 1\}$ munida com a métrica Euclidiana de \mathbb{R}^{n+2} . As *Projeções estereográficas esféricas* $P_- : \mathbb{S}^{n+1} - \{-e_{n+2}\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e $P_+ : \mathbb{S}^{n+1} - \{e_{n+2}\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ são difeomorfismos definidos por

$$(2.14) \quad P_-(q) = \frac{q - \langle q, e_{n+2} \rangle e_{n+2}}{1 + \langle q, e_{n+2} \rangle}, \quad q \in \mathbb{S}^{n+1},$$

$$(2.15) \quad P_+(q) = \frac{q - \langle q, e_{n+2} \rangle e_{n+2}}{1 - \langle q, e_{n+2} \rangle}, \quad q \in \mathbb{S}^{n+1}.$$

Além disso, as respectivas aplicações inversas P_-^{-1} e P_+^{-1} , são dadas por

$$(2.16) \quad P_-^{-1}(p) = \frac{(2p, 1 - \langle p, p \rangle)}{1 + \langle p, p \rangle}, \quad p \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$(2.17) \quad P_+^{-1}(p) = \frac{(2p, \langle p, p \rangle - 1)}{1 + \langle p, p \rangle}, \quad p \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Um modelo conforme para a esfera \mathbb{S}^2 é dada pelo conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, munida da estrutura analítica dada pelas parametrizações

$$(2.18) \quad X_1(z) = z, \quad z \in \mathbb{C} \quad e \quad X_2(z) = \begin{cases} \infty, & \text{se } z = 0, \\ \frac{1}{z}, & \text{se } z \in \mathbb{C} - \{0\}. \end{cases}$$

De fato, a aplicação $G_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2$, dada por

$$(2.19) \quad G_{\mathbb{S}^2}(z) = \begin{cases} P_+^{-1}(z), & \text{se } z \neq \infty, \\ e_3, & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

define um difeomorfismo conforme entre \mathbb{S}^2 e \mathbb{C}_∞ . Com a estrutura dada por (2.18), \mathbb{C}_∞ é chamada de *esfera de Riemann*.

O modelo que apresentaremos a seguir é conhecido, na geometria hiperbólica, como o *modelo de Klein*. Consideremos $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, a aplicação

$$(2.20) \quad \begin{aligned} P : \mathbb{H}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ u &\rightarrow P(u), \end{aligned}$$

definida pela interseção do hiperplano

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{(u_1, u_2, \dots, u_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}; u_{n+2} = 0\},$$

com a reta que passa por u e $(0, 0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+2}$ é dada por

$$(2.21) \quad P(u) = \left(\frac{u_1}{1 + u_{n+2}}, \frac{u_2}{1 + u_{n+2}}, \dots, \frac{u_{n+1}}{1 + u_{n+2}} \right), \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_{n+2}) \in \mathbb{H}^{n+1}.$$

P é chamada de *projeção estereográfica hiperbólica* e é um difeomorfismo de \mathbb{H}^{n+1} sobre $B^{n+1}(1) = \{u \in \mathbb{R}^{n+1}; |u| < 1\}$. Como P é um difeomorfismo, a métrica em \mathbb{H}^{n+1} induz uma métrica em $B^{n+1}(1)$ de modo que $P : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow B^{n+1}(1)$ seja uma isometria. Um modelo conhecido acontece quando $n = 1$, neste caso, $B^2(1)$ com a métrica induzida por P é chamada de *Disco de Poincare*. Dessa forma, uma parametrização para \mathbb{H}^2 é a aplicação $P^{-1} : B^2(1) \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por

$$(2.22) \quad P^{-1}(u_1, u_2) = \frac{1}{1 - (u_1^2 + u_2^2)} (2u_1, 2u_2, 1 + u_1^2 + u_2^2), \quad (u_1, u_2) \in B^2(1).$$

Identificaremos $B^2(1)$ com o conjunto $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, assim, definimos

$$(2.23) \quad G_{\mathbb{H}^2}(z) = P^{-1}(z) = \frac{1}{1 - \langle z, z \rangle} (2z, 1 + \langle z, z \rangle), \quad z \in B^2(1).$$

As projeções estereográficas (esférica e hiperbólica) são usadas para definir no plano complexo \mathbb{C} uma métrica não Euclidiana.

Definição 6. A equação de Helmholtz é uma equação diferencial elíptica da forma

$$(2.24) \quad \Delta\psi(x, y) + k(x, y)\psi(x, y) = 0,$$

onde Δ é o Laplaciano Euclidiano e k é uma função real conhecida num aberto U de \mathbb{R}^2 . Se $k = 0$, então (2.24) é chamada equação de Laplace.

3. Superfícies de $\overline{M}^3(c)$ associadas a $M(c)$ por uma congruência de esferas geodésicas. O seguinte resultado estabelece condições suficientes para que uma superfície Σ de $\overline{M}^3(c)$ esteja localmente associada a $M(c) \subset \overline{M}^3(c)$ por meio de uma congruência de esferas geodésicas em $\overline{M}^3(c)$.

Proposição 1. *Sejam Σ uma superfície orientável de $\overline{M}^3(c)$ e N o campo normal unitário de Σ em $\overline{M}^3(c)$ tal que $N(p) \neq e_c, \forall p \in \Sigma$. Então,*

$$(3.1) \quad v + h(p)dN_p(v) \neq 0, \quad \forall p \in \Sigma \text{ e } v \in T_p\Sigma \text{ com } v \neq 0,$$

se, e somente se, Σ e $M(c)$ estão localmente associadas por uma congruência de esferas geodésicas em $\overline{M}^3(c)$, onde $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é a função diferenciável definida por

$$(3.2) \quad h(p) = \frac{\langle p, e_c \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle}, \quad p \in \Sigma.$$

Prova: Sejam h a função diferenciável definida por (3.2) e Ψ a aplicação diferenciável definida por

$$(3.3) \quad \Psi(p) = p + h(p)[N(p) - e_c], \quad p \in \Sigma.$$

Então, Ψ é um difeomorfismo local, tal que $p + h(p)N(p) = \Psi(p) + h(p)e_c, p \in \Sigma$ e $\Psi(\Sigma) \subset M(c)$. De fato, pela definição de Ψ , temos que

$$(3.4) \quad d\Psi_p(v) = v + dh_p(v)[N(p) - e_c] + h(p)dN_p(v), \quad p \in \Sigma, \quad v \in T_p\Sigma.$$

Daí,

$$\langle d\Psi_p(v), N(p) \rangle = dh_p(v)[1 - \langle N(p), e_c \rangle], \quad p \in \Sigma, \quad v \in T_p\Sigma,$$

logo,

$$(3.5) \quad dh_p(v) = \frac{\langle d\Psi_p(v), N(p) \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle}, \quad p \in \Sigma, \quad v \in T_p\Sigma.$$

Se existem $p \in \Sigma$ e $v \in T_p\Sigma$ com $v \neq 0$, tais que $d\Psi_p(v) = 0$, segue de (3.4) e (3.5) que $v + h(p)dN_p(v) = 0$ o qual é uma contradição com (3.1).

Por outro lado, de (3.2) e (3.3), obtemos

$$(3.6) \quad \langle \Psi(p), e_c \rangle = \langle p + h(p)[N(p) - e_c], e_c \rangle = \langle p, e_c \rangle - h(p)[1 - \langle N(p), e_c \rangle] = 0, \quad \forall p \in \Sigma.$$

Se $c = 0$, então $\Psi(\Sigma) \subset \mathbb{R}^2$. Se $c = \pm 1$, pela Observação 2, temos que $\langle N(p), p \rangle = 0, \forall p \in \Sigma$, então

$$\begin{aligned} \langle \Psi(p), \Psi(p) \rangle &= \langle p + h(p)[N(p) - e_c], p + h(p)[N(p) - e_c] \rangle \\ &= \pm 1 - 2h(p)\langle p, e_c \rangle + 2h(p)^2(1 - \langle N(p), e_c \rangle) = \pm 1, \quad \forall p \in \Sigma. \end{aligned}$$

Daí, Ψ é um difeomorfismo local tal que $\Psi(\Sigma) \subset M(c)$.

Seja $X^0 = \{p + h(p)N(p); p \in \Sigma\} \subset \overline{M}^3(c)$, mostraremos que X^0 é uma superfície de $\overline{M}^3(c)$.

Para isso, sejam $p \in \Sigma$ e $v \in T_p\Sigma$ com $v \neq 0$, então, por hipótese temos que $v + h(p)dN_p(v) \neq 0$, daí,

$$\begin{aligned} \langle dX_p^0(v), dX_p^0(v) \rangle &= \langle v + h(p)dN_p(v) + dh_p(v)N(p), v + h(p)dN_p(v) + dh_p(v)N(p) \rangle \\ &= |v + h(p)dN_p(v)|^2 + |dh_p(v)|^2 > 0, \quad \forall p \in \Sigma, \quad v \in T_p\Sigma, \quad v \neq 0, \end{aligned}$$

logo $dX_p^0(v) \neq 0$, $\forall p \in \Sigma$, $v \in T_p\Sigma$ e $v \neq 0$. Portanto, X^0 é uma superfície de $\overline{M}^3(c)$.

Assim, concluímos que Σ e $M(c)$ estão localmente associadas por uma congruência de esferas geodésicas em $\overline{M}^3(c)$.

Reciprocamente, de (3.4) e (3.6), obtemos

$$(3.7) \quad \begin{aligned} 0 &= \langle d\Psi_p(v), e_c \rangle \\ &= \langle v + dh_p(v)[N(p) - e_c] + h(p)dN_p(v), e_c \rangle \\ &= \langle (v + h(p)dN_p(v)), e_c \rangle + dh_p(v)(\langle N(p), e_c \rangle - 1), \quad p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma. \end{aligned}$$

Consideremos a superfície $X^0 = \{p + h(p)N(p), p \in \Sigma\}$ de $\overline{M}^3(c)$, segue disto que

$$dX_p^0(v) = v + h(p)dN_p(v) + dh_p(v)N(p), \quad p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma.$$

Assumamos que $v + h(p)dN_p(v) = 0$ num ponto $p \in \Sigma$ e $v \in T_p\Sigma$ com $v \neq 0$. Segue de (3.7) que $dh_p(v)(\langle N(p), e_c \rangle - 1) = 0$, logo, $dh_p(v) = 0$, de outra forma $\langle N(p), e_c \rangle = 1$, daqui teríamos que $N(p) = e_c$, o qual é uma contradição. Portanto, temos que $dh_p(v) = 0$ e $dX_p^0(v) = 0$, o qual é uma contradição com o fato de que X^0 é uma superfície de $\overline{M}^3(c)$. Assim, $v + h(p)dN_p(v) \neq 0$, $\forall p \in \Sigma$, $v \in T_p\Sigma$, $v \neq 0$. \square

Observação 4. Pela definição de h em (3.2), temos que

$$(3.8) \quad dh_p(v) = \frac{\langle v + h(p)dN_p(v), e_c \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle}, \quad p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma.$$

Sejam Σ uma superfície orientável de $\overline{M}^3(c)$ e N o campo normal unitário de Σ em $\overline{M}^3(c)$, tal que $N(p) \neq e_c$, $\forall p \in \Sigma$. Observamos que Σ está localmente associada a $M(c)$ por uma congruência de esferas geodésicas sempre que $v + h(p)dN_p(v) \neq 0$, $\forall p \in \Sigma$ e $v \in T_p\Sigma$ com $v \neq 0$, onde $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é a função diferenciável definida por (3.2).

O seguinte teorema garante que Σ e $M(c)$ estão localmente associadas por uma transformação de Ribaucour.

Teorema 1. *Sejam Σ uma superfície orientável de $\overline{M}^3(c)$, N o campo normal unitário de Σ em $\overline{M}^3(c)$ tal que $N(p) \neq e_c$, $\forall p \in \Sigma$ e $\{e_1, e_2\}$ campos de vetores locais ortonormais de direções principais de Σ em p . Além disso, sejam h e Ψ definidas por (3.2) e (3.3), respectivamente. Então $1 + h(p)k_i \neq 0$, $\forall p \in \Sigma$, $1 \leq i \leq 2$, onde k_i são as curvaturas principais de Σ em $\overline{M}^3(c)$ se, e somente se, Σ e $M(c)$ estão localmente associadas por uma transformação de Ribaucour em $\overline{M}^3(c)$.*

Prova: Mostremos que $v + h(p)dN_p(v) \neq 0$, $\forall p \in \Sigma$, $v \in T_p\Sigma$ com $v \neq 0$ e $\langle d\Psi_p(e_1), d\Psi_p(e_2) \rangle = 0$, $\forall p \in \Sigma$. Seja $v \in T_p\Sigma$, tal que $v \neq 0$, então, existem $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, tais que $v = \sum_{i=1}^2 v_i e_i$, onde $v_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, 2\}$.

Suponha que $v + h(p)dN_p(v) = 0$, assim

$$0 = v + h(p)dN_p(v) = \sum_{i=1}^2 v_i e_i + h(p)dN_p \left(\sum_{i=1}^2 v_i e_i \right) = \sum_{i=1}^2 (1 + h(p)k_i) v_i e_i,$$

como $\{e_1, e_2\}$ é um conjunto linearmente independente, temos que

$$(1 + h(p)k_i)v_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Porém, por hipótese, existe pelo menos um $v_i \neq 0$, então $1 + h(p)k_i = 0$ para algum $i \in \{1, 2\}$, isto é uma contradição. Portanto, concluímos que $v + h(p)dN_p(v) \neq 0$, $\forall p \in \Sigma$, $v \in T_p\Sigma$ com $v \neq 0$. Pela Proposição 1, temos que Σ e $M(c)$ estão associadas por uma congruência de esferas geodésicas.

Por outro lado, observe que por (3.4) e (3.8), temos que

$$(3.9) \quad d\Psi_p(e_i) = (1 + h(p)k_i)e_i + dh_p(e_i)[N(p) - e_c].$$

$$(3.10) \quad dh_p(e_i) = \frac{(1 + h(p)k_i)\langle e_i, e_c \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle}, \quad p \in \Sigma, 1 \leq i \leq 2.$$

Daí, para $1 \leq i, j \leq 2$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle d\Psi_p(e_i), d\Psi_p(e_j) \rangle &= (1 + h(p)k_i)(1 + h(p)k_j)\delta_{ij} - (1 + h(p)k_i)dh_p(e_j)\langle e_i, e_c \rangle \\ &\quad - (1 + h(p)k_j)dh_p(e_i)\langle e_j, e_c \rangle + 2dh_p(e_i)dh_p(e_j)(1 - \langle N(p), e_c \rangle). \end{aligned}$$

Substituindo (3.10) na equação anterior, temos que $\langle d\Psi_p(e_i), d\Psi_p(e_j) \rangle = 0$ para $1 \leq i \neq j \leq 2$. Logo, $\{d\Psi(e_1), d\Psi(e_2)\}$ é uma base ortogonal de direções principais de $M(c)$ em $\overline{M}^3(c)$. Portanto, Σ e $M(c)$ estão localmente associadas por uma transformação de Ribaucour em $\overline{M}^3(c)$. \square

exemplo 1. Seja $X : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \times \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^3$ dada por

$$(3.11) \quad X(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(u_1), \operatorname{sen}(u_1), \cos(u_2), \operatorname{sen}(u_2)).$$

O vetor normal unitario de X em \mathbb{S}^3 é dado por

$$(3.12) \quad N(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos(u_1), -\operatorname{sen}(u_1), \cos(u_2), \operatorname{sen}(u_2)).$$

Uma base ortonormal local de direções principais para o espaço tangente de X em \mathbb{S}^3 é dada por

$$X_{,1} = (-\operatorname{sen}(u_1), \cos(u_1), 0, 0), \quad X_{,2} = (0, 0, -\operatorname{sen}(u_2), \cos(u_2)).$$

Seja $Y : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \times \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ a parametrização local da esfera dada por

$$Y(u_1, u_2) = \frac{1}{2 - \sqrt{2}\operatorname{sen}(u_2)} \left(\cos(u_1) (\sqrt{2} - 2\operatorname{sen}(u_2)), \operatorname{sen}(u_1) (\sqrt{2} - 2\operatorname{sen}(u_2)), \sqrt{2}\cos(u_2), 0 \right).$$

O vetor normal unitario de Y em \mathbb{S}^3 é dado por $e_1 = (0, 0, 0, 1)$. Uma base ortogonal para o espaço tangente de Y em \mathbb{S}^3 é dada por

$$Y_{,1} = \frac{\sqrt{2} - 2\operatorname{sen}(u_2)}{2 - \sqrt{2}\operatorname{sen}(u_2)} (-\operatorname{sen}(u_1), \cos(u_1), 0, 0),$$

$$Y_{,2} = \frac{2}{(2 - \sqrt{2}\operatorname{sen}(u_2))^2} \left(-\cos(u_2)\cos(u_1), -\cos(u_2)\operatorname{sen}(u_1), 1 - \sqrt{2}\operatorname{sen}(u_2), 0 \right).$$

Substituindo (3.11) e (3.12) em (3.2), obtemos

$$h(u_1, u_2) = \frac{\operatorname{sen}(u_2)}{\sqrt{2} - \operatorname{sen}(u_2)}.$$

Observe que $X(u_1, u_2) + h(u_1, u_2)N(u_1, u_2) = Y(u_1, u_2) + h(u_1, u_2)e_1$, portanto, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ está associado localmente por uma transformação de Ribaucour a \mathbb{S}^2 , sempre que $1 \pm h \neq 0$, se, e somente se, $u_2 \neq \frac{\pi}{4}$.

A seguinte Proposição estende o resultado obtido em [2] para \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 .

Proposição 2. *Sejam Σ uma superfície orientável de $\overline{M}^3(c)$, N o campo normal unitário de Σ em $\overline{M}^3(c)$, tal que $N(p) \neq e_c, \forall p \in \Sigma$ e $X : U \rightarrow \Sigma$ uma parametrização local de Σ em p . Suponha que vale (3.1), Então existe uma parametrização local $Y : U \rightarrow M(c)$ tal que*

$$(3.13) \quad X(u) = Y(u) + h(u) [e_c - N(u)], \quad u \in U.$$

Além disso, se Y é uma parametrização local ortogonal de $M(c)$, então

$$(3.14) \quad X = Y - \frac{2h}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}}{L_{ii}} Y_{,i} - e_c + chY \right),$$

$$(3.15) \quad N = \frac{2}{S} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}}{L_{ii}} Y_{,i} - e_c + chY \right) + e_c,$$

onde

$$(3.16) \quad S = \sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}^2}{L_{ii}} + ch^2 + 1.$$

As formas fundamentais I, II e III de Σ em $\overline{M}^3(c)$ são dadas por

$$(3.17) \quad I = \langle X_{,i}, X_{,j} \rangle = L_{ij} - \frac{2h}{S} (V_{ji}L_{ii} + V_{ij}L_{jj}) + \frac{4h^2}{S^2} \sum_{k=1}^2 V_{ik}V_{jk}L_{kk},$$

$$(3.18) \quad II = -\langle N_{,i}, X_{,j} \rangle = \frac{4h}{S^2} \sum_{k=1}^2 V_{ik}V_{jk}L_{kk} - \frac{2}{S} V_{ji}L_{ii},$$

$$(3.19) \quad III = \langle N_{,i}, N_{,j} \rangle = \frac{4}{S^2} \sum_{k=1}^2 V_{ik}V_{jk}L_{kk},$$

onde

$$(3.20) \quad V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ij} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) + c\delta_{ij}h, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

Γ_{ij}^l os símbolos de Christoffel da métrica $L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle$, $1 \leq i, j \leq 2$.
A matriz de Weingarten $W = (W_{ij})$ é dada por

$$(3.21) \quad W = 2V(SI_2 - 2hV)^{-1},$$

onde I_2 é a matriz identidade e $V = (V_{ij})$.
A condição de regularidade é dada por

$$(3.22) \quad \det(SI_2 - 2hV) \neq 0.$$

Reciprocamente, dada uma parametrização local ortogonal $Y : U \rightarrow M(c) \subset \overline{M}^3(c)$, onde U é um aberto conexo de \mathbb{R}^2 e uma função diferenciável $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, então (3.14) define uma superfície em $\overline{M}^3(c)$ com aplicação normal de Gauss dada por (3.15). Além disso, (3.16)-(3.21) são satisfeitas.

Prova: Sejam $Y : U \rightarrow M(c)$ uma parametrização local ortogonal de $M(c)$ tal que vale (3.13) e N o campo normal unitário de Σ em $\overline{M}^3(c)$ dado por

$$(3.23) \quad N = \sum_{i=1}^2 b_i Y_{,i} + b_3 e_c + b_4 Y, \quad \text{se } c = \pm 1$$

e

$$(3.24) \quad N = \sum_{i=1}^2 b_i Y_{,i} + b_3 e_c, \quad \text{se } c = 0,$$

tal que

$$(3.25) \quad \langle N, N \rangle = \sum_{i=1}^2 b_i^2 L_{ii} + b_3^2 + cb_4^2 = 1.$$

Calculando a derivada parcial de (3.13), obtemos

$$(3.26) \quad X_{,i} = Y_{,i} + h_{,i}(e_c - N) - hN_{,i}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Usando (3.23) e (3.26), temos que

$$0 = \langle N, X_{,i} \rangle = b_i L_{ii} + h_{,i}(b_3 - 1), \quad 1 \leq i \leq 2,$$

daquí segue que

$$(3.27) \quad b_i = \frac{h_{,i}(1 - b_3)}{L_{ii}}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Por outro lado, se $c = \pm 1$, usando (3.13) e o fato que $\langle X, N \rangle = 0$, obtemos

$$0 = \langle X, N \rangle = \langle Y + h(e_c - N), N \rangle = \langle Y, N \rangle + h(\langle e_c, N \rangle - 1),$$

segue disto que

$$(3.28) \quad b_4 = ch(1 - b_3).$$

Substituindo (3.27), (3.28) em (3.25), obtemos

$$\sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{h_{,i}}{L_{ii}} \right)^2 (1 - b_3)^2 L_{ii} \right] + b_3^2 + ch^2(1 - b_3)^2 = 1,$$

daí,

$$\left(\sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}^2}{L_{ii}} + ch^2 - 1 \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}^2}{L_{ii}} + ch^2 \right) b_3 + \left(\sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}^2}{L_{ii}} + ch^2 + 1 \right) b_3^2 = 0.$$

Substituindo (3.16) na equação anterior

$$(3.29) \quad (S - 2) - 2(S - 1)b_3 + Sb_3^2 = 0.$$

As soluções da equação (3.29) com respeito a b_3 são dadas por

$$b_3 = 1 \text{ ou } b_3 = 1 - \frac{2}{S}.$$

Se $b_3 = 1$, então $N = e_c$ o qual é uma contradição, logo

$$(3.30) \quad b_3 = 1 - \frac{2}{S}.$$

Assim, substituindo (3.27), (3.28) e (3.30) em (3.23) e (3.24), obtemos (3.15). Substituindo (3.15) em (3.13), obtemos (3.14).

Agora, derivando S dada por (3.16)

$$\begin{aligned} S_{,i} &= \sum_{j=1}^2 \frac{2h_{,j}h_{,ji}L_{jj} - L_{jj,i}h_{,j}^2}{L_{jj}^2} + 2chh_{,i}, \\ &= \frac{2}{L_{ii}} \left(h_{,ii} - \frac{L_{ii,i}h_{,i}}{2L_{ii}} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^2 \frac{L_{ii,l}}{2L_{ii}} h_{,l} \right) h_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{2}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \frac{L_{jj,i}h_{,j}}{2L_{jj}} - \frac{L_{ii,j}h_{,i}}{2L_{ii}} \right) h_{,j} + 2chh_{,i}, \\ &= \frac{2}{L_{ii}} \left(h_{,ii} - \Gamma_{ii}^i h_{,i} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^2 \Gamma_{ii}^l h_{,l} \right) h_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{2}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) h_{,j} + 2chh_{,i} \\ &= 2 \sum_{j=1}^2 \left[\frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) + c\delta_{ij}h \right] h_{,j}, \quad 1 \leq i \leq 2. \end{aligned}$$

Logo, substituindo (3.20) na equação anterior, obtemos

$$(3.31) \quad S_{,i} = 2 \sum_{j=1}^2 V_{ij}h_{,j}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Observemos que

$$(3.32) \quad Y_{,ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k Y_{,k} + b_3 e_c + b_4 Y, \text{ se } c = \pm 1, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

e

$$(3.33) \quad Y_{,ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k Y_{,k} + b_3 e_c, \text{ se } c = 0, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Se $c = \pm 1$, então $\langle Y, Y_{,j} \rangle = 0$, $1 \leq j \leq 2$, daí, $\langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle + \langle Y, Y_{,ji} \rangle = 0$, logo $b_4 = -cL_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$. Por outra parte, como $\langle Y_{,j}, e_c \rangle = 0$, $1 \leq j \leq 2$, então $\langle Y_{,ji}, e_c \rangle = 0$, daí, $b_3 = 0$. Substituindo $b_3 = 0$ e $b_4 = -cL_{ij}$ em (3.32) e (3.33), obtemos

$$(3.34) \quad Y_{,ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k Y_{,k} - cL_{ij}Y, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Assim, usando (3.34)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} &= \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^j Y_{,j} + \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^2 \Gamma_{ji}^k Y_{,k} - c \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j} L_{ji}}{L_{jj}} Y, \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^j Y_{,j} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^2 \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^k Y_{,k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^2 \Gamma_{ji}^k Y_{,k} - ch_{,i}Y, \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^j Y_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^j Y_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^i Y_{,i} - ch_{,i}Y. \end{aligned}$$

Usando as relações (2.12) na equação anterior, temos que

$$\sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} = \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j} L_{jj,i}}{2L_{jj}^2} Y_{,j} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,i} L_{ii,j}}{2L_{jj} L_{ii}} Y_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,j} L_{ii,j}}{2L_{ii} L_{jj}} Y_{,i} - ch_{,i}Y,$$

logo,

$$(3.35) \quad \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} = \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j} L_{jj,i}}{2L_{jj}^2} Y_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii} L_{jj}} (h_{,j} Y_{,i} - h_{,i} Y_{,j}) - ch_{,i}Y.$$

Definimos

$$(3.36) \quad C = Y + h e_c, \quad D = \sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}}{L_{ii}} Y_{,i} + chY + \left(\frac{S}{2} - 1 \right) e_c.$$

Derivando as expressões (3.36)

$$(3.37) \quad C_{,i} = Y_{,i} + h_{,i} e_c, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

$$\begin{aligned} D_{,i} &= \sum_{j=1}^2 \left[\left(\frac{h_{,ji} L_{jj} - L_{jj,i} h_{,j}}{L_{jj}^2} \right) Y_{,j} + \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} \right] + ch_{,i}Y + chY_{,i} + \frac{S_{,i}}{2} e_c, \\ &= \sum_{j=1}^2 \left[\left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{L_{jj}^2} \right) Y_{,j} + \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} \right] + ch_{,i}Y + chY_{,i} + \sum_{j=1}^2 \left(\frac{2h_{,j} h_{,ji} L_{jj} - L_{jj,i} h_{,j}^2}{2L_{jj}^2} \right) e_c \\ &\quad + ch_{,i} e_c, \\ &= \sum_{j=1}^2 \left[\left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{L_{jj}^2} \right) Y_{,j} + \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} + \left(\frac{h_{,j} h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}^2}{2L_{jj}^2} \right) e_c \right] + chC_{,i} + ch_{,i}Y. \end{aligned}$$

Usando (3.35) na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} D_{,i} &= \sum_{j=1}^2 \left[\left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{L_{jj}^2} \right) Y_{,j} + \frac{h_{,j} L_{jj,i}}{2L_{jj}^2} Y_{,j} + \left(\frac{h_{,j} h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}^2}{2L_{jj}^2} \right) e_c \right] + chC_{,i} + ch_{,i}Y \\ &\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii} L_{jj}} (h_{,j} Y_{,i} - h_{,i} Y_{,j}) - ch_{,i}Y, \\ &= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} Y_{,j} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{2L_{jj}^2} Y_{,j} + \frac{h_{,j} h_{,ji}}{L_{jj}} e_c - \frac{L_{jj,i} h_{,j}^2}{2L_{jj}^2} e_c \right) + chC_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii} L_{jj}} (h_{,j} Y_{,i} - h_{,i} Y_{,j}), \\ &= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{2L_{jj}^2} \right) C_{,j} + chC_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii} L_{jj}} (h_{,j} Y_{,i} - h_{,i} Y_{,j}), \end{aligned}$$

somando zero na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 D_i &= \frac{h_{,ii}}{L_{ii}} C_{,i} - \frac{L_{ii,i} h_{,i}}{2L_{ii} L_{ii}} C_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{2L_{jj}} \right) C_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j} h_{,j}}{2L_{ii} L_{jj}} C_{,i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j} h_{,i}}{2L_{ii} L_{jj}} C_{,j} \\
 &\quad + ch C_{,i}, \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{2L_{jj}} - \frac{L_{ii,j} h_{,i}}{2L_{ii}} \right) C_{,j} + \frac{1}{L_{ii}} \left(h_{,ii} - \frac{L_{ii,i} h_{,i}}{2L_{ii}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j} h_{,j}}{2L_{jj}} \right) C_{,i} \\
 &\quad + ch C_{,i}, \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \Gamma_{ij}^j h_{,j} - \Gamma_{ij}^i h_{,i} \right) C_{,j} + \frac{1}{L_{ii}} \left(h_{,ii} - \Gamma_{ii}^i h_{,i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \Gamma_{ii}^j h_{,j} \right) C_{,i} + ch C_{,i}, \\
 &= \sum_{j=1}^2 \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) C_{,j} + ch C_{,i}, \\
 &= \sum_{j=1}^2 \left[\frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ji} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) + c \delta_{ij} h \right] C_{,j}.
 \end{aligned}$$

Logo, substituindo (3.20) na equação anterior, obtemos

$$(3.38) \quad D_{,i} = \sum_{j=1}^2 V_{ij} C_{,j}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Observemos que

$$(3.39) \quad X = C - \frac{2Dh}{S} \quad e \quad N = \frac{2D}{S}.$$

Derivando as expressões (3.39) e usando (3.31), (3.37) e (3.38), obtemos

$$\begin{aligned}
 (3.40) \quad X_{,i} &= C_{,i} - \frac{2h_{,i} D}{S} + \left(2 \sum_{j=1}^2 V_{ij} h_{,j} \right) \frac{2hD}{S^2} - \frac{2h}{S} \sum_{j=1}^2 V_{ij} C_{,j}, \\
 &= C_{,i} - h_{,i} N + \left(\sum_{j=1}^2 V_{ij} h_{,j} \right) \frac{2hN}{S} - \frac{2h}{S} \sum_{j=1}^2 V_{ij} C_{,j}, \\
 &= C_{,i} - h_{,i} N + \frac{2h}{S} \sum_{j=1}^2 V_{ij} (h_{,j} N - C_{,j}), \quad 1 \leq i \leq 2,
 \end{aligned}$$

$$(3.41) \quad N_{,i} = \frac{2}{S} \left(\sum_{j=1}^2 V_{ij} C_{,j} - \left(\sum_{j=1}^2 V_{ij} h_{,j} \right) \frac{2D}{S} \right) = \frac{2}{S} \sum_{j=1}^2 V_{ij} (C_{,j} - h_{,j} N), \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Como $X_{,i} + h_{,i} N + h N_{,i} = C_{,i}$, para $1 \leq i \leq 2$, então

$$(3.42) \quad C_{,i} - h_{,i} N = X_{,i} + h N_{,i}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Substituindo (3.42) em (3.41) e lembrando que $N_{,i} = \sum_{k=1}^2 W_{ik} X_{,k}$, obtemos

$$S \sum_{k=1}^2 W_{ik} X_{,k} - 2h \sum_{j=1}^2 V_{ij} \sum_{k=1}^2 W_{jk} X_{,k} = 2 \sum_{k=1}^2 V_{ik} X_{,k},$$

logo

$$\sum_{k=1}^2 \left[S W_{ik} - 2h \sum_{j=1}^2 V_{ij} W_{jk} \right] X_{,k} = 2 \sum_{k=1}^2 V_{ik} X_{,k}.$$

Como o conjunto $\{X_{,1}, X_{,2}\}$ é uma base, da equação anterior obtemos

$$SW_{ik} - 2h \sum_{j=1}^2 V_{ij}W_{jk} = 2V_{ik}.$$

Em notação matricial a equação anterior é escrita como

$$(SI_2 - 2hV)W = 2V,$$

daquí obtemos (3.21), desde que $\det(SI_2 - 2hV) \neq 0$ (condição de regularidade).

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle C_{,k}, C_{,l} \rangle &= L_{kl} + h_{,k}h_{,l}, \quad 1 \leq k, l \leq 2, \\ \langle C_{,k}, N \rangle &= h_{,k}, \quad 1 \leq k \leq 2. \end{aligned}$$

De (3.40) a forma fundamental I é dada por

$$\begin{aligned} \langle X_{,i}, X_{,j} \rangle &= \left\langle C_{,i} - h_{,i}N + \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^2 V_{ik}(h_{,k}N - C_{,k}), C_{,j} - h_{,j}N + \frac{2h}{S} \sum_{l=1}^2 V_{jl}(h_{,l}N - C_{,l}) \right\rangle, \\ &= L_{ij} - \frac{2h}{S} \sum_{l=1}^2 V_{jl}L_{il} - \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^2 V_{ik}L_{jk} + \frac{4h^2}{S^2} \sum_{k,l=1}^2 V_{ik}V_{jl}L_{kl}, \\ &= L_{ij} - \frac{2h}{S} V_{ji}L_{ii} - \frac{2h}{S} V_{ij}L_{jj} + \frac{4h^2}{S^2} \sum_{k=1}^2 V_{ik}V_{jk}L_{kk}, \end{aligned}$$

esta equação é equivalente a (3.17).

Também, de (3.40) e (3.41) a forma fundamental II é dada por

$$\begin{aligned} -\langle X_{,i}, N_{,j} \rangle &= \left\langle C_{,i} - h_{,i}N + \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^2 V_{ik}(h_{,k}N - C_{,k}), -\frac{2}{S} \sum_{l=1}^2 V_{jl}(C_{,l} - h_{,l}N) \right\rangle, \\ &= -\frac{2}{S} \sum_{l=1}^2 V_{jl}L_{il} + \frac{4h}{S^2} \sum_{k,l=1}^2 V_{ik}V_{jl}L_{kl}, \end{aligned}$$

esta equação é equivalente a (3.18).

Finalmente, de (3.41) a forma fundamental III é dada por

$$\begin{aligned} \langle N_{,i}, N_{,j} \rangle &= \frac{4}{S^2} \left\langle \sum_{k=1}^2 V_{ik}(C_{,k} - h_{,k}N), \sum_{l=1}^2 V_{jl}(C_{,l} - h_{,l}N) \right\rangle, \\ &= \frac{4}{S^2} \sum_{k,l=1}^2 V_{ik}V_{jl}L_{kl}, \end{aligned}$$

esta equação é equivalente a (3.19). Assim a prova esta completa. \square

Corolário 1. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \subset \overline{M}^3(c)$ uma parametrização de uma superfície dada por (3.14). Então a sua curvatura de Gaussiana K , é dada por*

$$(3.43) \quad K = \frac{4}{P} \det(V),$$

onde $P = \det(SI_2 - 2hV)$.

Prova: Como a matriz de Weingarten W associada a Σ é dada por (3.21), então

$$K = \det(W) = \det(2V [SI_2 - 2hV]^{-1}) = 4\det(V)\det([SI_2 - 2hV]^{-1}),$$

de onde segue o resultado. \square

4. Aplicações. O seguinte resultado estabelece algumas equivalências quando X está parametrizada por linhas de curvatura.

Corolário 2. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \subset \overline{M}^3(c)$ uma parametrização de uma superfície dada por (3.14). Então as seguintes afirmações são equivalentes*

1. X está parametrizada por linhas de curvatura,
2. $V_{ij} = 0$ para $1 \leq i \neq j \leq 2$,
3. $N_{,i} = -k_i X_{,i}$, $1 \leq i \leq 2$,

onde

$$(4.1) \quad k_i = \frac{2V_{ii}}{2hV_{ii} - S}, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

são as curvaturas principais de X .

Prova: Pela equação (3.21), se a matriz de Weingarten W é diagonal, então a matriz V , também é diagonal. Portanto, V é diagonal se, e somente se, X está parametrizada por linhas de curvatura.

Se $V_{ij} = 0$ para $1 \leq i \neq j \leq 2$, então pelas equações (3.41) e (3.42) obtemos

$$N_{,i} = \frac{2}{S} V_{ii} (X_{,i} + hN_{,i}),$$

isolando $N_{,i}$ da equação anterior, temos

$$N_{,i} = \left(\frac{2V_{ii}}{S - 2hV_{ii}} \right) X_{,i}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Como V é uma matriz diagonal, V_{ii} são os autovalores da matriz V . Pela equação (3.21) temos

$$-k_i = \frac{2V_{ii}}{S - 2hV_{ii}}, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

o qual conclui a prova. \square

Observação 5. Pela equação (4.1) obtemos os autovalores σ_i da matriz V os quais são dados por

$$(4.2) \quad \sigma_i = \frac{Sk_i}{2(hk_i - 1)}, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

onde k_i são os autovalores da matriz de Weingarten W .

A seguir apresentamos famílias de superfícies parametrizadas por linhas de curvatura em \mathbb{S}^3 e \mathbb{H}^3 .

exemplo 2. Seja $Y : (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ uma parametrização local ortogonal de \mathbb{S}^2 dada por

$$Y(u_1, u_2) = (\cos(u_1), \operatorname{sen}(u_1)\cos(u_2), \operatorname{sen}(u_1)\operatorname{sen}(u_2), 0).$$

A base local ortogonal para o plano tangente associado a Y é dada por

$$\begin{aligned} Y_{,1} &= (-\operatorname{sen}(u_1), \cos(u_1)\cos(u_2), \cos(u_1)\operatorname{sen}(u_2), 0), \\ Y_{,2} &= (0, -\operatorname{sen}(u_1)\operatorname{sen}(u_2), \operatorname{sen}(u_1)\cos(u_2), 0). \end{aligned}$$

O campo normal unitário de Y ao longo de \mathbb{S}^3 é dado por $e_1 = (0, 0, 0, 1)$.

Observe que a métrica de Y é dada por

$$(4.3) \quad L_{12} = L_{21} = 0, \quad L_{11} = 1, \quad L_{22} = \operatorname{sen}^2(u_1).$$

Daí, os símbolos de Christoffel associados à métrica L_{ij} são dados por

$$(4.4) \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \cot(u_1), \quad \Gamma_{22}^1 = -\operatorname{sen}(u_1)\cos(u_1).$$

Substituindo (4.3) e (4.4) em (3.20), obtemos

$$\begin{aligned} V_{11} &= h_{,11} + h, \\ V_{12} &= \operatorname{csc}^2(u_1) [h_{,12} - \cot(u_1)h_{,2}], \\ V_{21} &= h_{,21} - \cot(u_1)h_{,2}, \\ V_{22} &= \operatorname{csc}^2(u_1) [h_{,22} + \operatorname{sen}(u_1)\cos(u_1)h_{,1}] + h. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2 e Corolário 2, a superfície X dada por (3.14) será parametrizada por linhas de curvatura em \mathbb{S}^3 se, e somente se, $h_{,12} - \cot(u_1)h_{,2} = 0$, cujas soluções são dadas por

$$h(u_1, u_2) = \text{sen}(u_1)f(u_2) + g(u_1),$$

onde f, g são funções reais.

exemplo 3. Seja $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ uma parametrização local ortogonal de \mathbb{H}^2 dada por

$$Y(u_1, u_2) = (\text{senh}(u_1), \text{cosh}(u_1)\text{senh}(u_2), 0, \text{cosh}(u_1)\text{cosh}(u_2)).$$

A base local ortogonal para o plano tangente associado a Y é dada por

$$\begin{aligned} Y_{,1} &= (\text{cosh}(u_1), \text{senh}(u_1)\text{senh}(u_2), 0, \text{senh}(u_1)\text{cosh}(u_2)), \\ Y_{,2} &= (0, \text{cosh}(u_1)\text{cosh}(u_2), 0, \text{cosh}(u_1)\text{senh}(u_2)). \end{aligned}$$

O campo normal unitário de Y ao longo de \mathbb{H}^3 é dado por $e_{-1} = (0, 0, 1, 0)$.

Observe que

$$(4.5) \quad L_{12} = L_{21} = 0, \quad L_{11} = 1, \quad L_{22} = \text{cosh}^2(u_1).$$

Daí, os símbolos de Christoffel associados à metrica L_{ij} são dados por

$$(4.6) \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \tanh(u_1), \quad \Gamma_{22}^1 = -\text{cosh}(u_1)\text{senh}(u_1).$$

Substituindo (4.5) e (4.6) em (3.20), obtemos

$$\begin{aligned} V_{11} &= h_{,11} - h, \\ V_{12} &= \text{sech}^2(u_1) [h_{,12} - \tanh(u_1)h_{,2}], \\ V_{21} &= h_{,21} - \tanh(u_1)h_{,2}, \\ V_{22} &= \text{sech}^2(u_1) [h_{,22} + \text{cosh}(u_1)\text{senh}(u_1)h_{,1}] - h. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2 e Corolário 2, a superfície X dada por (3.14) será parametrizada por linhas de curvatura em \mathbb{H}^3 se, e somente se, $h_{,12} - \tanh(u_1)h_{,2} = 0$, cujas soluções são dadas por

$$h(u_1, u_2) = \text{cosh}(u_1)f(u_2) + g(u_1),$$

onde f, g são funções reais.

Como as projeções estereográficas (esférica e hiperbólica), são difeomorfismos conformes, as imagens das projeções estereográficas das superfícies $\Sigma \subset \overline{M}^3(c)$ com $c = -1, 1$, são superfícies de \mathbb{R}^3 conformes a Σ .

A seguir damos alguns gráficos de superfícies conformes em \mathbb{R}^3 a uma superfície dada em $\mathbb{S}^3(c = 1)$ ou em $\mathbb{H}^3(c = -1)$.

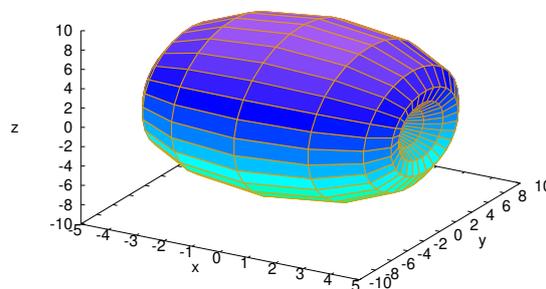


FIGURE 4.1. Projeção esférica. $c = 1$, $\phi(u_1, u_2) = \tan^{-1}(\sin(u_1))$.

Pela Observação 5, segue que

$$V_{11} + V_{22} = \frac{S(hK - H)}{(hk_1 - 1)(hk_2 - 1)},$$

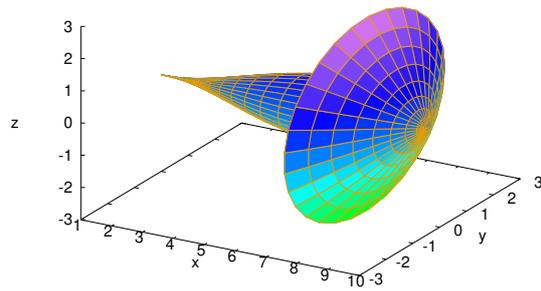


FIGURE 4.2. *Projeção esférica.* $c = 1$, $\phi(u_1, u_2) = \tan^{-1}(u_1)$.

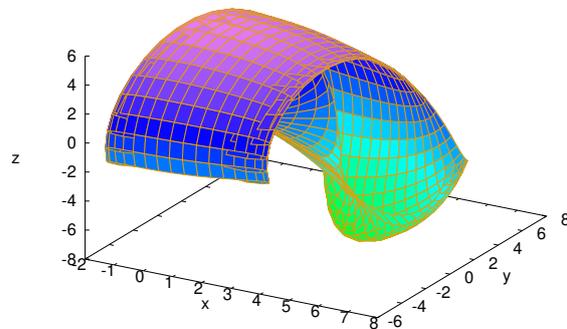


FIGURE 4.3. *Projeção esférica.* $c = 1$, $\phi(u_1, u_2) = \tan^{-1}(\sin(u_1)u_2 + u_1)$.

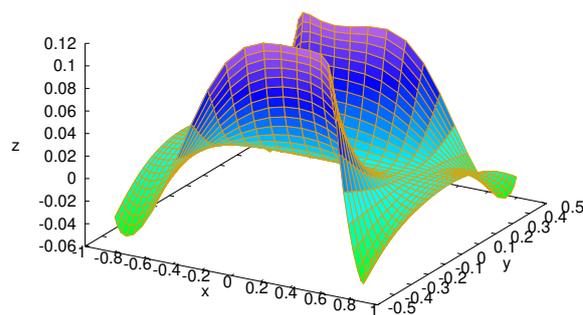


FIGURE 4.4. *Projeção hiperbólica.* $c = -1$, $\phi(u_1, u_2) = \tanh^{-1}(\cosh(u_1)v^2)$.

onde H é a curvatura média, K é a curvatura Gaussiana de Σ em $\overline{M}^3(c)$, h é a função raio e S é dado por (3.16).

Assim, $\text{tra}(V) = V_{11} + V_{22} = 0$, se, e somente se, $h = \frac{H}{K}$, sempre que $K \neq 0$.

Definição 7. Dizemos que uma superfície Σ de $\overline{M}^3(c)$ é uma *superfície de tipo esférico em $\overline{M}^3(c)$* se existe

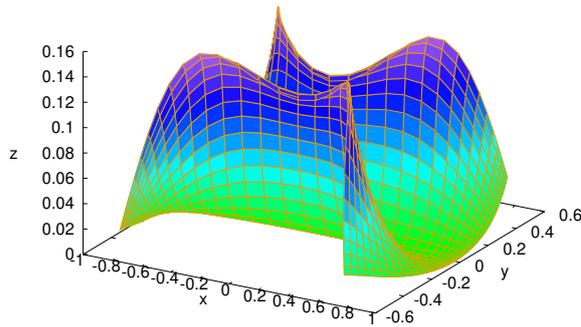


FIGURE 4.5. *Projeção hiperbólica.* $c = -1$, $\phi(u_1, u_2) = \tanh^{-1}(u_1^2)$.

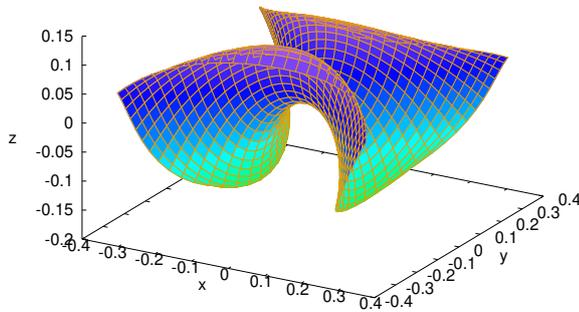


FIGURE 4.6. *Projeção hiperbólica.* $c = -1$, $\phi(u_1, u_2) = \tanh^{-1}(\cosh(u_1)u_2^2 - u_1^2)$.

uma congruência de esferas geodésicas entre Σ e $M(c)$ com função raio h dada por

$$h = \frac{H}{K}$$

onde H e K são a curvatura média e Gaussiana da superfície Σ em $\overline{M}^3(c)$.

Observação 6. Seja $Y(z) = g(z)$ a parametrização de $M(c) \subset \overline{M}^3(c)$, definida por (2.13), (2.19) e (2.23), isto é,

$$(4.7) \quad g(z) := \begin{cases} G_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2, & \text{se } c = 1, \\ G_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, & \text{se } c = 0, \\ G_{\mathbb{H}^2} : B^2(1) \rightarrow \mathbb{H}^2, & \text{se } c = -1. \end{cases}$$

Se $c = 0$, temos que $Y_{,1} = g'$ e $Y_{,2} = ig'$. Daí, obtemos $L_{11} = L_{22} = 1$ e $L_{12} = 0$, logo, Y é uma parametrização ortogonal de \mathbb{R}^2 com símbolos de Christoffel identicamente nulos, isto é, $\Gamma_{ij}^m = 0$, para todo $1 \leq i, j, m \leq 2$. Daí, por (3.20) obtemos: $V_{11} = h_{,11}$, $V_{12} = V_{21} = h_{,12}$, $V_{22} = h_{,22}$. Consequentemente,

$$\text{tra}(V) = h_{,11} + h_{,22} = \Delta h.$$

Se $c = \pm 1$, então $L_{12} = 0$ e $L_{11} = L_{22} = J_c$, onde J_c é a função definida por

$$(4.8) \quad J_c = \begin{cases} \frac{4}{(1+\langle z, z \rangle)^2}, & \text{se } c = 1 \\ \frac{4}{(1-\langle z, z \rangle)^2}, & \text{se } c = -1. \end{cases}$$

Logo, Y é uma parametrização ortogonal de \mathbb{S}^2 e \mathbb{H}^2 , respectivamente. Por (2.12), os símbolos de Christoffel são dados por

$$(4.9) \quad \Gamma_{ii}^i = \frac{J_{c,i}}{2J_c} \quad e \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{J_{c,j}}{2J_c} = -\Gamma_{ii}^j, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2.$$

Segue de (4.9) que os coeficientes da matriz V são dados por

$$(4.10) \quad \begin{aligned} V_{11} &= \frac{1}{J_c} \left(h_{,11} - \frac{J_{c,1}}{2J_c} h_{,1} + \frac{J_{c,2}}{2J_c} h_{,2} \right) + ch, \\ V_{12} &= V_{21} = \frac{1}{J_c} \left(h_{,12} - \frac{J_{c,2}}{2J_c} h_{,1} - \frac{J_{c,1}}{2J_c} h_{,2} \right), \\ V_{22} &= \frac{1}{J_c} \left(h_{,22} + \frac{J_{c,1}}{2J_c} h_{,1} - \frac{J_{c,2}}{2J_c} h_{,2} \right) + ch. \end{aligned}$$

Consequentemente, de (4.10) temos

$$\text{tra}(V) = \frac{h_{,11} + h_{,22}}{J_c} + 2ch = \frac{\Delta h}{J_c} + 2ch.$$

Proposição 3. *Seja Σ uma superfície de $\overline{M}^3(c)$ dada pela parametrização (3.14). Então, Σ é uma superfície de tipo esférico em $\overline{M}^3(c)$ se, e somente se, $\text{tra}(V)=0$. Equivalentemente, Σ é uma superfície de tipo esférico em $\overline{M}^3(c)$ se, e somente se, h é solução da equação de Helmholtz dada por*

$$\Delta h + 2J_c ch = 0,$$

onde J_c é definida por (4.8).

Prova: Segue da Observação 6. \square

5. Conclusões. Dos resultados obtidos neste artigo podemos fazer as seguintes conclusões:

Dada uma superfície orientável $\Sigma \subset \overline{M}^3(c)$ satisfazendo as condições da Proposição 1, então Σ e $M(c)$ estão localmente associadas por uma congruência de esferas geodésicas em $\overline{M}^3(c)$. Também, dada uma superfície orientável $\Sigma \subset \overline{M}^3(c)$ satisfazendo as condições do Teorema 1, então Σ e $M(c)$ estão localmente associadas por uma transformação de Ribaucour em $\overline{M}^3(c)$. A Proposição 2, é uma extensão do resultado obtido em [2] para os espaços \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}^3 . Finalmente, a Proposição 3, estende o resultado obtido em [4] para o caso de superfícies.

REFERENCES

- [1] Blaschke, W. *Über die geometrie von Laguerre: I. grundformeln der flächentheorie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg., 1924; 3: 176 - 194.
- [2] Corro, A. V. *Generalized Weingarten surfaces of bryant type in hyperbolic 3-space*, Matemática Contemporânea, 2006; 30: 71 - 89.
- [3] Li, T. Z. *Laguerre geometry of surfaces in \mathbb{R}^3* , Acta Mathematica Sinica, 2005; 21(6): 1525 - 1534.
- [4] Machado, C. D. F. *Hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico*, Tese de doutorado, Universidade de Brasília, 2018.
- [5] Pottmann, H., Grohs P. and Mitra, N. J. *Laguerre minimal surfaces, isotropic geometry and linear elasticity*, Advances in computational mathematics, 2009; 31(4): 391 - 419.
- [6] Sarkar, T. K., Chung, Y. S. and Palma, M. S. *Solution of the general Helmholtz equation starting from Laplace's equation*, Applied Computational Electromagnetics Society Journal, 2002; 17(3): 187 - 197.
- [7] Tenenblat, K. and Wang, Q. *Ribaucour transformations for hypersurfaces in space forms*, Annals of Global Analysis and Geometry, 2006; 29(2): 157 - 185.