



Operadores θ - monótonos multivaluados

Multivalued θ - monotone operators

Edú Paredes Rojas *

Received, Jan. 02, 2017

Accepted, Apr. 04, 2018

DOI: <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2018.01.08>

Resumen

En este artículo damos una introducción a los operadores multivaluados, presentamos un nuevo concepto de monotonía, la θ - monotonía, que es una generalización de todos los tipos de monotonía conocidos, esta teoría es de gran utilidad, ya que nos permite estudiar propiedades para todos los tipos de monotonía, analizando solo un tipo de ellas. Generalizamos bajo ciertas condiciones algunos teoremas que solo se tenían en dimensión finita a espacios de Banach infinito dimensionales. Finalmente mostramos una aplicación a la sobreyectividad en dimensión finita que se puede usar en teoría de semigrupos e imponiendo restricciones puede ser probado en espacios mas generales.

Palabras clave. Operador Multivaluado, Operador Monótono, Operador Monótono Generalizado, Maximal monótono, Operador Localmente Acotado.

Abstract

This article we give an introduction to the multivalued operators, we present a new concept of monotonicity, the θ - monotonicity, Which is a generalization of all known types of monotonicity, this theory is very useful, since it allows us to study properties for all types of monotonicity by analyzing only one type of them. We generalize under certain conditions theorems that were only in finite dimension to infinite dimensional Banach spaces. Finally we show an application to the sobreyectividad in dimension finite that can be used in the theory of semigroups and imposing restrictions can be tested in more general spaces.

Keywords. Multivalued operators, Monotone operators, Generalized Monotone Operator, Maximal monotone, Locally Bounded Operator.

1. Introducción. En la escuela desde temprana edad, cuando conocimos las funciones básicas y sus gráficas en el plano, nos enseñaron el método gráfico de la recta vertical para reconocer cuando una curva representa la gráfica de una función. Por ejemplo, las elipses, hipérbolas, circunferencias y parábolas, son curvas que no representan gráfico de función alguna, pero son sin duda muy usadas tanto en las matemáticas como en la vida cotidiana.

El método nos dice que si al dibujar una recta vertical por cualquier parte de una curva y esta la intercepta en más de un punto, entonces esa gráfica no corresponde a una función. Esto quiere decir que a un elemento del dominio, le debe corresponder solamente un elemento del rango, lo que pone en evidencia la definición usual de función.

Pero ¿existirá alguna relación esas curvas y una función? al menos en algún sentido.

Ya en los primeros ciclos de la universidad nos topamos otra vez con las cónicas y conocimos el cálculo. Algo que me llamó la atención sobremanera fue la constante de integración omnipresente

* Escuela de Posgrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. Universitaria s/n. - Av. Venezuela cdra. 34, Ciudad Universitaria, Lima-Perú. edu.paredes@unmsm.edu.pe

al calcular una integral indefinida. Esa constante nos decía que por ejemplo que para un polinomio, la integral indefinida no era un solo polinomio, sino una infinidad de ellos, es decir a un elemento del conjunto de polinomios, le asignaba no un elemento, sino un conjunto de polinomios. Así es natural definir $\int : \mathbb{R}[x] \rightarrow P(\mathbb{R}[x])$ como $\int p(x) dx = \{q(x) \in \mathbb{R}[x] / q'(x) = p(x)\}$.

Ya en los estudios de maestría me tope con una tesis post doctoral donde se trataban estas cuestiones e investigando llegue a Rockafellar y muchos mas, donde definían un tipo especial de funciones, las multivaluadas, que responde, al menos de manera parcial a la pregunta planteada y decimos parcial por que para que esas gráficas les correspondan a una función multivaluada, necesitamos modificar un epsilon las definiciones de dominio, rango y grafo de una función de tal manera que resulten ser una generalización de lo ya conocido.

2. Funciones multivaluadas.

Sean A y B conjuntos no vacíos, definamos el conjunto $\mathcal{F}(A, B) = \{f : A \rightarrow B / f \text{ es función}\}$

Sea $f : A \rightarrow B$ una función, entonces para cada $x \in \text{Dom}(f)$ tenemos $\{f(x)\} \in P(B)$, donde $P(B) = \{D / D \subseteq B\}$ es el conjunto potencia de B .

Si $\text{Dom}(f) \neq A$, a cada $x \in A - \text{Dom}(f)$, se le puede asociar el conjunto vacío.

Así podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_f : A &\rightarrow P(B) \\ x &\rightarrow \mathcal{C}_f x \end{aligned}$$

Como

$$\mathcal{C}_f x = \begin{cases} \{f(x)\}, & x \in \text{Dom}(f) \\ \emptyset, & x \notin \text{Dom}(f) \end{cases}$$

La buena definición de \mathcal{C}_f se debe a que f es una función. Observemos que $\text{Dom}(\mathcal{C}_f) = A$, algo que no necesariamente se cumple para f .

Tenemos definida entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{F}(A, B) &\rightarrow \mathcal{F}(A, P(B)) \\ f &\mapsto \mathcal{C}_f \end{aligned}$$

Afirmamos que \mathcal{C} es inyectiva.

En efecto, sean $f, g \in \mathcal{F}(A, B)$ tales que $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_g$. Dado $x \in A$, si $x \in \text{Dom}(f)$, obtenemos $\{f(x)\} = \mathcal{C}_f x = \mathcal{C}_g x = \{g(x)\}$, luego $x \in \text{Dom}(g)$, lo que nos permite concluir que $f = g$.

Observación 1.

Algo que debemos notar en lo anterior es que no hizo falta analizar el caso en que $x \notin \text{Dom}(f)$ para probar la inyectividad, de hecho solo nos restringimos al conjunto $\{x \in A / \mathcal{C}_f(x) \neq \emptyset\} = \text{Dom}(f)$. Este conjunto nos será de mucha utilidad en la siguiente sección para dar una nueva definición de dominio.

Veamos ahora un ejemplo que muestra que \mathcal{C} no es sobreyectiva.

Ejemplo 1.

Sean $A = \{0, 1\}$ y $B = \{0, 1\}$, definamos $\psi : A \rightarrow P(B)$ por $\psi(0) = \{0\}$ y $\psi(1) = \{0, 1\} = B$. Supongamos que existe $f : A \rightarrow B$ tal que $\mathcal{C}_f = \psi$. Entonces $\{0, 1\} = B = \psi(1) = \mathcal{C}_f 1 = \{f(1)\}$ lo que contradice la definición usual de función. Así $\psi \notin \text{Ran}(\mathcal{C})$.

Podemos generalizar el resultado del ejemplo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 1. Si $T : A \rightarrow P(B)$ es tal que existe $x_0 \in A$ con $\text{Card}(T(x_0)) > 1$, entonces $T \notin \text{Ran}(\mathcal{C})$.

Definición 1. Decimos que una función es una función multivaluada si el conjunto de llegada es un conjunto cuyos elementos son también conjuntos.

Ejemplo 2. Sean $A = \{0, 1\}$ y $B = \{1\}$, entonces $P(B) = \{\emptyset, B\} = \{\emptyset, \{1\}\}$, definamos $\varphi : A \rightarrow P(B)$ como $\varphi(0) = \emptyset$ y $\varphi(1) = B$, entonces φ es una función multivaluada.

Para simplificar la notación, si $T : A \rightarrow P(B)$, escribimos $T : A \rightrightarrows B$ y si $x \in A$, frecuentemente escribiremos Tx en lugar de $T(x)$, esto para tener presente que Tx es un conjunto.

2.1. Dominio, rango y gráfico.

Sea $T : A \rightrightarrows B$ una función multivaluada. De la observación 1 notamos que si nuestra intención es ampliar el concepto de función, la definición de dominio mas conveniente es:

Definición 2. El **Dominio** de T es definido como $D(T) = \{x \in A / Tx \neq \emptyset\}$.

Las definiciones de rango y gráfico de una función multivaluada son similares a las definiciones usuales para una función.

Definición 3. El **Rango** de T se define por: $R(T) = \bigcup_{x \in D(T)} Tx$.

Definición 4. El **Gráfico** de T es el conjunto: $G(T) = \{(x, u) \in A \times B / u \in Tx\}$.

Observación 2. Para cada $T : A \rightrightarrows B$, tal que $T \in \text{Ran}(C)$, la inyectividad de C nos asegura que existe una única $T_C : A \rightarrow B$ satisfaciendo $T = C_{T_C}$. Esto y las definiciones anteriores nos permiten identificar y no hacer distinción entre T y T_C , es decir, podemos ver a T como una función usual y la llamaremos función univaluada.

Observación 3. La buena definición de una función multivaluada T puede interpretarse como: a conjuntos distintos ($Tx \neq Ty$) le corresponden pre-imagenes distintas ($x \neq y$).

Observación 4. En general no se cumple $\text{Dom}(T) = D(T)$ como podemos ver en el ejemplo 2.

Observación 5. La gráfica de una función multivaluada no es general una curva.

Las funciones multivaluadas están presentes en las matemáticas que usamos frecuentemente, incluso desde nuestra vida escolar, como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3. Conjuntos unitarios de números naturales:
$$\begin{aligned} i : \mathbb{N} &\rightrightarrows \mathbb{N} \\ n &\mapsto in = \{n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(i) &= \mathbb{N} \\ R(i) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N} \\ G(i) &= \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 / m = n\} \end{aligned}$$

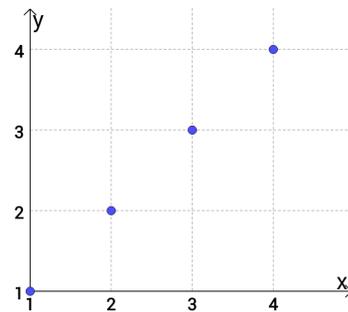


FIGURA 2.1. Gráfico de i .

Ejemplo 4. Conjuntos de índices de números naturales:
$$\begin{aligned} I : \mathbb{N} &\rightrightarrows \mathbb{N} \\ n &\mapsto In = \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(I) &= \mathbb{N} \\ R(I) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} In = \mathbb{N} \\ G(I) &= \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 / m \in In, n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

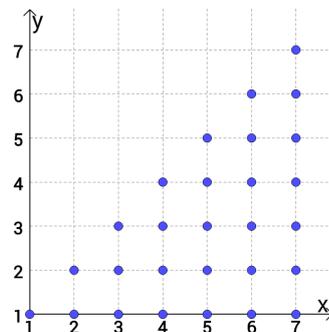


FIGURA 2.2. Gráfico de I .

Ejemplo 5. Intervalos infinitos abiertos por derecha: $\varphi_- : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$
 $x \mapsto \varphi_-(x) = \langle -\infty, x \rangle$

$$D(\varphi_-) = \mathbb{R}$$

$$R(\varphi_-) = \mathbb{R}$$

$$G(\varphi_-) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < x\}$$

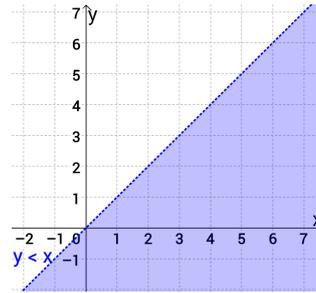


FIGURA 2.3. Gráfico de φ_- .

Ejemplo 6. Intervalos infinitos abiertos por izquierda: $\varphi_+ : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$
 $x \mapsto \varphi_+(x) = \langle x, +\infty \rangle$

$$D(\varphi_+) = \mathbb{R}$$

$$R(\varphi_+) = \mathbb{R}$$

$$G(\varphi_+) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x\}$$

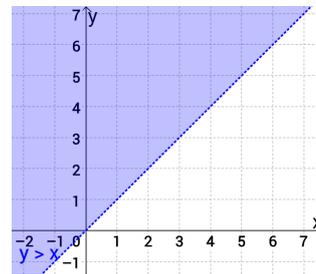


FIGURA 2.4. Gráfico de φ_+ .

Ejemplo 7. Intervalos infinitos cerrados por derecha: $\bar{\varphi}_- : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$
 $x \mapsto \bar{\varphi}_-(x) = \langle -\infty, x \rangle$

$$D(\bar{\varphi}_-) = \mathbb{R}$$

$$R(\bar{\varphi}_-) = \mathbb{R}$$

$$G(\bar{\varphi}_-) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x\}$$

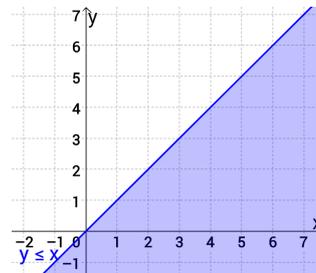


FIGURA 2.5. Gráfico de $\bar{\varphi}_-$.

Ejemplo 8. Intervalos infinitos cerrados por izquierda: $\bar{\varphi}_+ : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$
 $x \mapsto \bar{\varphi}_+(x) = [x, +\infty \rangle$

$$D(\bar{\varphi}_+) = \mathbb{R}$$

$$R(\bar{\varphi}_+) = \mathbb{R}$$

$$G(\bar{\varphi}_+) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x\}$$

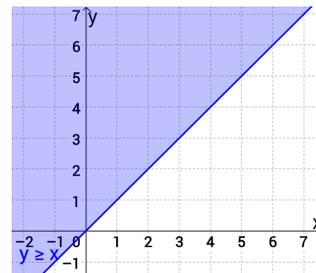


FIGURA 2.6. Gráfico de $\bar{\varphi}_+$.

Ejemplo 9. Imagen inversa de un funcional lineal:

Sea X un espacio de Banach, $f \in X^*$ no nula. Definamos: $T_f : \mathbb{R} \rightrightarrows X$ como $T_f r = f^{-1}\{r\}$, para todo $r \in \mathbb{R}$.

$D(T_f) = \mathbb{R}$ ya que si f es no nula, entonces es sobreyectiva, luego para todo $r \in \mathbb{R}$, $f^{-1}\{r\} \neq \emptyset$.

$$R(T_f) = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} T_f r = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} f^{-1}\{r\} = X$$

$$G(T_f) = \{(r, x) \in \mathbb{R} \times X / x \in f^{-1}\{r\}\} = \{(r, x) \in \mathbb{R} \times X / f(x) = r\}$$

Observemos que $0 \times \text{Nuc}(f) \subseteq G(T_f)$.

Ejemplo 10. Bolas con centro en el origen de coordenadas: Sea $A = [0, 1]$, definamos:

$$\begin{aligned} \varphi : A &\rightrightarrows \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \varphi t = B_t(0) \end{aligned}$$

Donde $B_t(0) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < t\}$

$$D(\varphi) = \langle 0, 1 \rangle$$

$$R(\varphi) = B_1(0)$$

$$G(\varphi) = \{(t, x) \in \langle 0, 1 \rangle \times \mathbb{R}^n / \|x\| < t\}$$

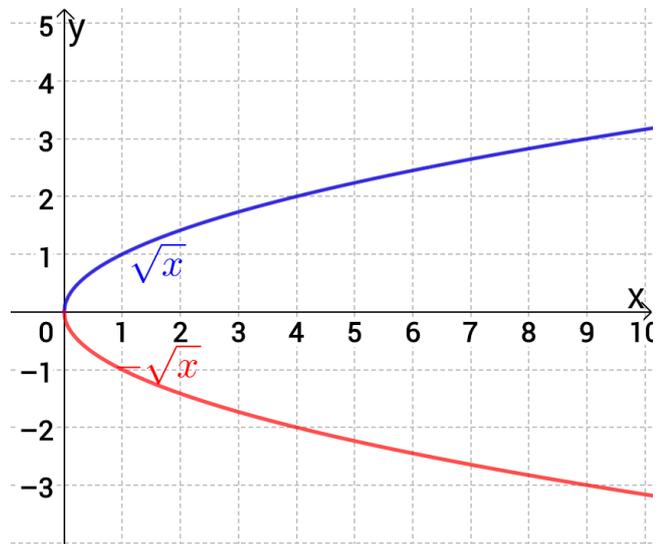


FIGURA 2.7. Gráfico de φ para $n = 2$.

Ejemplo 11. Conjunto Dualidad:

Sea X un espacio de Banach, X^* su dual topológico. Definamos:

$$\begin{aligned} J : X &\rightrightarrows X^* \\ x &\mapsto Jx = \{f \in X^* / \|f\| = \|x\|; \langle f, x \rangle = \|x\|^2\} \end{aligned}$$

Esta aplicación es conocida como Aplicación Dualidad y gracias al teorema de Hahn Banach, $D(J) = X$.

Ejemplo 12. Parábola con eje focal horizontal: Sea $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, +\infty)$, definamos:

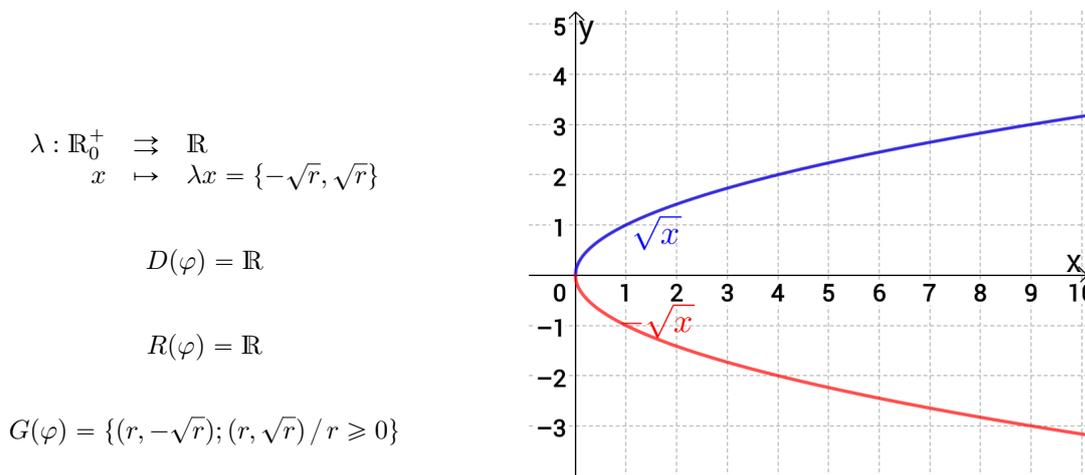


FIGURA 2.8. El gráfico de λ y de $y^2 = x$ coinciden.

Veamos algunas observaciones notables sobre los ejemplos dados:

Observación 6. En los ejemplos 3 y 4, si vemos a \mathbb{N} como subespacio normado, con la norma usual heredada de \mathbb{R} tenemos que los conjuntos $in = \{n\}$ y $In = \{1, 2, \dots, n\}$ son acotados $\forall n \in \mathbb{N}$, pero $R(i) = \mathbb{N}$ y $R(I) = \mathbb{N}$ no son acotados.

Observación 7. Dada $a \in \mathbb{R}$, de los ejemplos 5, 6, 7 y 8: $\varphi_-(a)$, $\varphi_+(a)$, $\bar{\varphi}_-(a)$ y $\bar{\varphi}_+(a)$ no son acotados, y su rango tampoco lo es.

Observación 8. En el ejemplo 10, $\varphi t = B_t(0)$ es acotado $\forall t \in [0, 1]$ y su rango $R(\varphi) = B_1(0)$ también lo es.

Observación 9. Siguiendo en el ejemplo 10, para cada $t \in [0, 1]$, dado $\varepsilon > 0$, definamos $V_t = \langle t - \varepsilon, t + \varepsilon \rangle \cap [0, 1]$ (vecindad de t). Entonces $\varphi(V_t) = \bigcup_{r \in V_t} \varphi r = \bigcup_{r \in V_t} B_r(0) \subseteq B_1(0)$, de donde $\varphi(V_t)$ es acotado.

Estas observaciones nos permiten extender los conceptos de funciones acotadas, globalmente acotadas y localmente acotadas a operadores multivaluados.

2.2. Operadores multivaluados acotados.

Sean X un conjunto no vacío y Y un espacio normado. Sea $T : X \rightrightarrows Y$.

Definición 5. Decimos que T es acotado si Tx es acotado en Y , $\forall x \in X$. Es decir, si para cada $x \in X$, $\exists r_x > 0$ tal que $\|y\| \leq r_x \forall y \in Tx$.

Definición 6. T es globalmente acotado si $T(X) = R(T)$ es acotado en Y , es decir, si $\exists r > 0$ tal que $\|y\| \leq r \forall y \in R(T)$.

Definición 7. (Vecindad) Sea (X, τ) un espacio topológico. Sean $x \in X$, $V \subseteq X$, decimos que V es una vecindad de x , si existe un conjunto abierto $A \in \tau$ tal que $x \in A \subseteq V$.

Definición 8. T es localmente acotado en $x \in X$, si existe una vecindad de x , $V_x \subset X$ tal que $T(V_x)$ es acotado en Y , es decir $\exists r_x > 0 / \|y\| \leq r_x, \forall y \in T(V_x)$. Decimos que T es localmente acotado en X , si es localmente acotado para todo $x \in X$.

Observación 10. De la observación 6, i e I son acotadas pero no globalmente acotadas. Además al ser \mathbb{N} un conjunto discreto, claramente son localmente acotadas.

Observación 11. Las aplicaciones $\varphi_-, \varphi_+, \bar{\varphi}_-, \bar{\varphi}_+$, como ya lo habíamos notado en la ob-

servación 7, no son acotadas, por ende tampoco localmente ni globalmente acotadas.

Observación 12. Si una aplicación no es acotada, entonces tampoco es globalmente ni localmente acotada.

Observación 13. De la observación 8, φ es acotada y globalmente acotada. Por la observación 9 vemos que también es localmente acotada.

Las tres diferentes definiciones de acotación de una función multivaluada, se relacionan en el siguiente:

Teorema 2. Sean X un espacio topológico, Y espacio normado y $T : X \rightrightarrows Y$, entonces se cumplen las siguientes implicaciones:

- a) T es globalmente acotada.
- b) T es localmente acotada.
- c) T es acotada.

Demostración:

- $(a \Rightarrow b)$ Puesto que T es globalmente acotado, entonces $T(X)$ es acotado. Sean $x \in X$ y $V_x \subseteq X$ una vecindad de x , como $T(V_x) \subseteq T(X)$, se tiene que $T(V_x)$ es acotado y por tanto T es localmente acotado.
- $(b \Rightarrow c)$ Si T es localmente acotado, entonces dado $x \in X$, existe $V_x \subseteq X$, vecindad de x tal que $T(V_x)$ es acotado. Ya que $x \in V_x$, tenemos $Tx \subseteq T(V_x)$, luego Tx es acotado. Como x fue elegido arbitrariamente, concluimos que T es acotado. □

2.3. Operaciones con aplicaciones multivaluadas.

Sean U, V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{R} . Sean $A, B \subseteq V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Definimos

$$A + B = \{a + b/a \in A \wedge b \in B\}$$

$$\alpha A = \{\alpha A/a \in A\}$$

Sean $T : U \rightrightarrows V$ y $R : U \rightrightarrows V$, si $D(T) \cap D(R) \neq \emptyset$.

Definición 9. La suma de aplicaciones multivaluadas $T + R : U \rightrightarrows V$ se define como:

$$(T + R)x = \begin{cases} Tx + Rx; & x \in D(T) \cap D(R) \\ \emptyset; & x \notin D(T) \cap D(R) \end{cases}$$

Claramente $D(T) \cap D(R) = D(T + R)$ y además se puede probar sin dificultad que la suma de aplicaciones multivaluadas es asociativa.

Ejemplo 13. Aplicación Nula

$$0 : U \rightrightarrows V$$

$$x \mapsto 0x = \{0\}$$

$$D(0) = U, R(0) = \{0\} \text{ y } G(0) = \{(x, y) \in U \times V/y \in 0x\} = \{(x, y) \in U \times V/y = 0\} = U \times \{0\}.$$

Notemos que $T + 0 = T$ para todo $T : U \rightrightarrows V$.

Ejemplo 14. Aplicación vacía

$$\phi : U \rightrightarrows V$$

$$x \mapsto \phi x = \emptyset$$

$$D(\phi) = \emptyset, R(\phi) = \emptyset \text{ y } G(\phi) = \emptyset.$$

Definición 10. La multiplicación de un escalar por una aplicación multivaluada es definida:

$$\begin{aligned} \alpha T : U &\rightrightarrows V \\ x &\mapsto (\alpha T)x = \alpha(Tx) \end{aligned}$$

Es claro que $D(\alpha T) = D(T)$.

En particular para $\alpha = -1$ tenemos $-T : U \rightrightarrows V$ como $(-T)x = -Tx$. Pero la aplicación $-T$ está muy lejos de ser el inverso aditivo de T como veremos a continuación.

Ejemplo 15. Definamos $T : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ como

$$Tx = \begin{cases} \{1, 2\}; & x \in \mathbb{Q} \\ \{0\}; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Entonces $-Tx = \{-1, -2\}$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $-Tx = \{0\}$ si $x \notin \mathbb{Q}$, luego, escribiendo $T - T$ en lugar de $T + (-T)$, tenemos definida $T - T : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ por

$$(T - T)x = \begin{cases} \{-1, 0, 1\}; & x \in \mathbb{Q} \\ \{0\}; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Observación 14. El ejemplo anterior pone en evidencia que $T - T \neq 0$, es decir, no siempre existe el inverso aditivo de una aplicación multivaluada y por tanto el conjunto de todas las aplicaciones multivaluadas de U en V , con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas, no es un espacio vectorial.

Observación 15. Si U y V son espacios vectoriales, sean $T_1, R : U \rightrightarrows V$, $T_2 : U \rightrightarrows V$, entonces para todo $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, tenemos que $p_1 T_1 + p_2 T_2 : U \rightrightarrows V$ está bien definida.

Definición 11. (Aplicación Inversa) Sea $T : X \rightrightarrows Y$, definimos la aplicación inversa o simplemente la inversa de T :

$$\begin{aligned} T^{-1} : Y &\rightrightarrows X \\ y &\mapsto T^{-1}y = \{x \in X / y \in Tx\} \end{aligned}$$

Observemos que $x \in T^{-1}y \Leftrightarrow y \in Tx$ y como es de esperar $D(T^{-1}) = R(T)$, luego $R(T^{-1}) = D(T)$.

Respecto al gráfico: $G(T^{-1}) = \{(y, x) \in Y \times X / x \in T^{-1}y\} = \{(y, x) \in Y \times X / y \in Tx\}$.

Por tanto $(y, x) \in G(T^{-1}) \Leftrightarrow (x, y) \in G(T)$.

Según esta definición siempre existe el operador inverso de cualquier aplicación multivaluada, incluso de la aplicación vacía, cuya inversa también es la aplicación vacía.

Ejemplo 16. La inversa de la aplicación nula, vista en el ejemplo 13:

$$\begin{aligned} 0^{-1} : V &\rightrightarrows U \\ y &\mapsto 0^{-1}y \end{aligned}$$

Esta definida por:

$$0^{-1}y = \begin{cases} U; & y = 0 \\ \emptyset; & y \neq 0 \end{cases}$$

De donde tenemos $D(0^{-1}) = \{0\}$, $R(0^{-1}) = U$, $G(0^{-1}) = \{0\} \times U$.

3. Operadores θ -monótonos.

3.1. Generalizando la monotonía.

Sea X un espacio de Banach real y X^* su dual topológico.

Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador multivaluado.

Sea $\theta : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\theta(x, y) = \theta(y, x) \forall x, y \in D(T)$.

Definición 12. Decimos que T es θ -monótono si:

$$\langle f - g, x - y \rangle \geq \theta(x, y) \|x - y\| \forall (x, f), (y, g) \in G(T)$$

Donde \langle, \rangle es el producto dualidad en $X^* \times X$.

T es llamado estrictamente θ -monótono si la desigualdad anterior, es una igualdad solo si $x = y$.

Veamos como el concepto operador θ - monótono, generaliza todos los conceptos de monotonía conocidos.

Ejemplo 17. Si $\theta(x, y) = 0 \forall x, y \in D(T)$ tenemos el concepto operador monótono en el sentido de Minty-Browder, es decir:

$$\langle f - g, x - y \rangle \geq 0 \forall (x, f), (y, g) \in G(T).$$

Observación 16. Si en el ejemplo anterior, el operador T es univaluado, identificandolo con la funcion T_C como en la observación 2, tenemos la definición de monotonía usual.

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq 0 \forall x, y \in \text{Dom}(T).$$

Ejemplo 18. Si $\theta(x, y) = r\|x - y\| \forall x, y \in D(T); r > 0$ tenemos el concepto de fuertemente monótono, es decir,

$$\langle f - g, x - y \rangle \geq r\|x - y\|^2 \forall (x, f), (y, g) \in G(T).$$

Ejemplo 19. Si

$$\theta(x, y) = \begin{cases} f(\|x - y\|) & \forall x, y \in D(T) \text{ si } x \neq y \\ 0 & ; \text{ Si } x = y \in D(T) \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función creciente, tal que:

a) $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$

Entonces decimos que T es uniformemente monótono.

Ejemplo 20. Si $\theta(x, y) = -\varepsilon \forall x, y \in D(T)$ donde $\varepsilon > 0$.

Tenemos el concepto de ε -monótono, es decir,

$$\langle f - g, x - y \rangle \geq -\varepsilon \|x - y\| \forall (x, f), (y, g) \in G(T)$$

Ejemplo 21. Si $\theta(x, y) = -c\|x - y\|^{p-1} \forall x, y \in D(T)$, donde $p > 1$ obtenemos el concepto de operador p -paramonótono, es decir,

$$\langle f - g, x - y \rangle \geq -c\|x - y\|^p \forall (x, f), (y, g) \in G(T)$$

Ejemplo 22. De lo anterior, para $p = 2$ tenemos

$$\theta(x, y) = -c\|x - y\|$$

Entonces, estamos frente a un operador $-c$ monótono relajado, esto es:

$$\langle f - g, x - y \rangle \geq -c\|x - y\|^2 \quad \forall (x, f), (y, g) \in G(T)$$

Ejemplo 23. Si $\theta(x, y) = -\min\{\sigma(x), \sigma(y)\} \quad \forall x, y \in D(T)$ y $\theta(x, y) = 0$ en otro caso. Donde $\sigma : D(T) \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ es una función.

Tenemos así el concepto de pre-monótono:

$$\langle f - g, x - y \rangle \geq -\min\{\sigma(x), \sigma(y)\}\|x - y\| \quad \forall (x, f), (y, g) \in G(T).$$

3.2. Operadores acotados.

Lema 1. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ -monótono y $\theta' : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación que satisfice las siguientes condiciones para todo $x, y \in X$:

- a) $\theta'(x, y) = \theta'(y, x)$
- b) $\theta(x, y) \geq \theta'(x, y)$

Entonces T es θ' -monótono.

Demostración: Como T es θ -monótono, tenemos:
 $\langle f - g, x - y \rangle \geq \theta(x, y)\|x - y\| \geq \theta'(x, y)\|x - y\| ; \forall (x, f), (y, g) \in G(T)$,
 por tanto T es θ' -monótono. \square

Proposición 1. Sean $T_1 : X \rightrightarrows X^*$, $T_2 : X \rightrightarrows X^*$ operadores θ_1 y θ_2 - monótonos.
 Si $D(T_1) \cap D(T_2) \neq \emptyset$, entonces para todo $p_1, p_2 > 0$, el operador $p_1T_1 + p_2T_2$ es θ -monótono.
 Con $\theta = p_1\theta_1 + p_2\theta_2$ en $D(T_1) \cap D(T_2)$.

Demostración: De la observación 15 $p_1T_1 + p_2T_2 : X \rightrightarrows X^*$ está bien definido.
 Sean $x, y \in D(T_1) \cap D(T_2)$, dados $f \in T_1x ; g \in T_1y ; h \in T_2x ; l \in T_2y$. Se tiene:
 $\langle f - g, x - y \rangle \geq \theta_1(x, y)\|x - y\| \quad \text{y} \quad \langle h - l, x - y \rangle \geq \theta_2(x, y)\|x - y\|.$

Como $p_1, p_2 > 0$, entonces: $p_1\theta_1(x, y)\|x - y\| \leq p_1(\langle f - g, x - y \rangle) = \langle p_1f - p_1g, x - y \rangle$

Tambien: $p_2\theta_2(x, y)\|x - y\| \leq p_2(\langle h - l, x - y \rangle) = \langle p_2h - p_2l, x - y \rangle$

Sumando y ordenando:

$$(3.1) \quad \langle (p_1f + p_2h) - (p_1g + p_2l), x - y \rangle \geq \underbrace{(p_1\theta_1(x, y) + p_2\theta_2(x, y))}_{\theta(x, y)}\|x - y\|$$

Puesto que $f \in T_1x$ y $h \in T_2x$, se tiene $p_1f + p_2h \in (p_1T_1 + p_2T_2)x$.
 Análogamente $p_1g + p_2l \in (p_1T_1 + p_2T_2)y$.
 Definamos

$$\theta(x, y) = \begin{cases} p_1\theta_1(x, y) + p_2\theta_2(x, y); & x, y \in D(T_1) \cap D(T_2) \\ 0; & x \text{ o } y \notin D(T_1) \cap D(T_2) \end{cases}$$

Finalmente para todo $(x, r), (y, s) \in G(p_1T_1 + p_2T_2)$, se tiene que $r \in (p_1T_1 + p_2T_2)x$ y $s \in (p_1T_1 + p_2T_2)y$, luego por 3.1 tenemos $\langle r - s, x - y \rangle \geq \theta(x, y)\|x - y\|$

Por lo tanto, $p_1T_1 + p_2T_2$ es θ -monótono. \square

Teorema 3. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador acotado. Entonces T es θ_A -monótono con

$$\theta_A(x, y) = \begin{cases} -(\{\sup_{u \in Tx} \|u\| + \sup_{v \in Ty} \|v\|\}); & x, y \in D(T) \\ 0; & x \text{ o } y \notin D(T) \end{cases}$$

Demostración: Puesto que T es acotado, dado $z \in X$, se tiene que $Tz \subseteq X^*$ es acotado, entonces existe $r_z > 0$ tal que $\|h\| \leq r_z$ para todo $h \in Tz$. De esto, existe $\sup_{u \in Tz} \|u\|$ satisfaciendo

$$\|h\| \leq \sup_{u \in Tz} \|u\| \leq r_z \quad \forall h \in Tz.$$

Sean (x, f) y $(y, g) \in G(T)$, de lo anterior $\sup_{u \in Tx} \|u\| \geq \|f\|$ y $\sup_{v \in Ty} \|v\| \geq \|g\|$.

Multiplicando por $\|x - y\|$ a ambos miembros de las desigualdades y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos:

$$\begin{cases} (\sup_{u \in Tx} \|u\|)\|x - y\| \geq \|f\|\|x - y\| \geq |\langle f, x - y \rangle| \geq -\langle f, x - y \rangle \\ (\sup_{v \in Ty} \|v\|)\|x - y\| \geq \|g\|\|x - y\| \geq |\langle g, x - y \rangle| \geq \langle g, x - y \rangle \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} \langle f, x - y \rangle \geq -(\sup_{u \in Tx} \|u\|)\|x - y\| \\ -\langle g, x - y \rangle \geq -(\sup_{v \in Ty} \|v\|)\|x - y\| \end{cases}$$

Sumando:

$$\langle f - g, x - y \rangle \geq -(\{\sup_{u \in Tx} \|u\| + \sup_{v \in Ty} \|v\|\})\|x - y\|$$

Finalmente definiendo:

$$\theta_A(x, y) = \begin{cases} -(\{\sup_{u \in Tx} \|u\| + \sup_{v \in Ty} \|v\|\}); & x, y \in D(T) \\ 0; & x \text{ o } y \notin D(T) \end{cases}$$

Tenemos que T es θ_A -monótono. \square

Observación 17. En el teorema anterior notemos que se cumple la desigualdad

$$-(\{\sup_{u \in Tx} \|u\| + \sup_{v \in Ty} \|v\|\}) \geq -2 \max\{\sup_{u \in Tx} \|u\|, \sup_{v \in Ty} \|v\|\}; \forall x, y \in D(T)$$

Podemos definir entonces:

$$\theta_a(x, y) = \begin{cases} -2 \max\{\sup_{u \in Tx} \|u\|, \sup_{v \in Ty} \|v\|\}; & x, y \in D(T) \\ 0; & x \text{ o } y \notin D(T) \end{cases}$$

Y tenemos el siguiente:

Corolario 1. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador acotado. Entonces T es θ_a -monótono

Demostración:

De la observación 17 tenemos $\theta_A \geq \theta_a$, luego por el lema 1, T es θ_a -monótono. \square

Corolario 2. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador globalmente acotado. Entonces T es θ_A -monótono y por tanto también θ_a -monótono.

Demostración: Del teorema 2, T es acotada, luego por el teorema 3 y el corolario anterior, T es θ_A y θ_a -monótono. \square

Observación 18. La acotación global del operador, garantiza la existencia de $M > 0$ tal que $\|h\| \leq M \forall h \in R(T)$, luego $-2 \max\{\sup_{u \in Tx} \|u\|, \sup_{v \in Ty} \|v\|\} \geq -2M$; $\forall x, y \in D(T)$.

Definamos entonces:

$$\theta_g(x, y) = \begin{cases} -2M; & x, y \in D(T) \\ 0; & x \text{ o } y \notin D(T) \end{cases}$$

Obteniendo el siguiente corolario.

Corolario 3. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador globalmente acotado. Entonces T es θ_g -monótono

Demostración: Idéntica al corolario 1. \square

Corolario 4. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador localmente acotado. Entonces T es θ_A y θ_a -monótono

Demostración: Idéntica al corolario 2. \square

Probamos que si T es globalmente acotado, localmente acotado o acotado, entonces T es θ -monótono, uno de los resultados que veremos en la siguiente sección es que bajo ciertas condiciones en espacios finitos también se cumple lo recíproco.

Pero antes veamos un Lema que nos será de mucha utilidad.

Lema 2. *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador θ -monótono, entonces*

$$\sup_{u \in Tx} \langle u, y - x \rangle \leq \left(\inf_{v \in Ty} \|v\| - \theta(x, y) \right) \|x - y\|$$

Demostración: Sean $x, y \in D(T)$, si $f \in Tx, g \in Ty$, por ser T θ -monótono:

$$\theta(x, y) \|x - y\| \leq \langle f - g, x - y \rangle = \langle f, x - y \rangle - \langle g, x - y \rangle = \langle g, y - x \rangle - \langle f, y - x \rangle$$

Entonces: $\langle f, y - x \rangle \leq \langle g, y - x \rangle - \theta(x, y) \|x - y\| \quad \forall f \in Tx, \forall g \in Ty.$

Fijemos $g \in Ty$, entonces existe $\sup_{u \in Tx} \langle u, y - x \rangle$ tal que

$$\langle f, y - x \rangle \leq \sup_{u \in Tx} \langle u, y - x \rangle \leq \langle g, y - x \rangle - \theta(x, y) \|x - y\|$$

Ordenando $\sup_{u \in Tx} \langle u, y - x \rangle + \theta(x, y) \|x - y\| \leq \langle g, y - x \rangle \quad \forall g \in Ty.$

Se tiene entonces que existe $\inf_{v \in Ty} \langle v, y - x \rangle$, cumpliendo

$$\sup_{u \in Tx} \langle u, y - x \rangle + \theta(x, y) \|x - y\| \leq \inf_{v \in Ty} \langle v, y - x \rangle \leq \inf_{v \in Ty} \|v\| \|y - x\|$$

Por tanto

$$\sup_{u \in Tx} \langle u, y - x \rangle \leq \left(\inf_{v \in Ty} \|v\| - \theta(x, y) \right) \|x - y\|$$

□

3.3. Semicontinuidad inferior.

Cuando en 1986 Baire da contra ejemplos para el Segundo Teorema Falso de Cauchy (una función que es continua en cada una de sus variables, es continua), obtiene por primera vez funciones semicontinuas inferiormente y superiormente.

Veremos ahora que si T es un operador θ -monótono y θ es semicontinua inferior, con algunas condiciones más, entonces T será localmente acotado.

Definición 13. *Sea $f : (X; \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ una función, decimos que f es semicontinua inferior (s.c.i.) en $x_0 \in (X; \tau)$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe una vecindad $V_{\varepsilon, x_0} \subseteq X$ de x_0 tal que $f(x_0) - \varepsilon \leq f(x), \forall x \in V_{\varepsilon, x_0}$, es decir: $f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \inf f(x)$, o en términos de sucesiones: $f(x_0) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf f(x_n), \forall x_n \rightarrow x_0$ en $(X; \tau)$.*

Diremos que f es s.c.i. en $U \subseteq X$ si f es s.c.i. en $x, \forall x \in U$.

Notemos que en la definición anterior, la convergencia de $x_n \rightarrow x_0$ no es necesariamente la convergencia en norma, sino que esa convergencia depende de la topología de X .

Ejemplo 24. *Sea $H : [-1; 1] \times [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

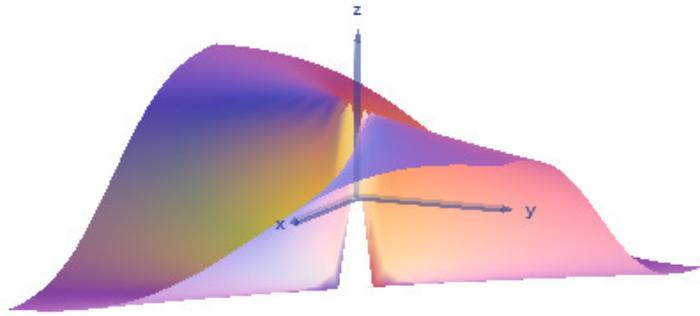


FIGURA 3.1. Gráfica de H .

H es acotada y discontinua pero continua respecto a cada una de sus variables.

Puesto que H es acotada, para cada $x \in [-1; 1]$ existe $\sup_{y \in [-2; 2]} H(x, y)$, esto nos permite considerar la función $m : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como: $m(x) = \sup_{y \in [-2; 2]} H(x, y)$.

Notemos que para $0 \in [-1; 1]$ se tiene $m(0) = \sup_{y \in [-2; 2]} H(0, y) = 0 = H(0, 0)$.

Como en $(0, 0)$, H es continua respecto a x , entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $|x| < \delta$ se tiene $|H(0, 0) - H(x, 0)| < \varepsilon$.

Luego $-\varepsilon < H(0, 0) - H(x, 0) < \varepsilon$, en particular $H(0, 0) - H(x, 0) < \varepsilon$, reemplazando $m(0) = H(0, 0)$, se tiene $m(0) - H(x, 0) < \varepsilon$, es decir:

$$m(0) < H(x, 0) + \varepsilon \leq \sup_{y \in [-2; 2]} H(x, y) + \varepsilon = m(x) + \varepsilon$$

Así $m(0) - \varepsilon \leq m(x)$, para todo $|x| < \delta$. Por tanto m es s.c.i. en 0.

Observación 19. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene $0 \leq (x - y)^2$, luego $2xy \leq x^2 + y^2$. Si $x \neq 0$, entonces $\frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 1, \forall y \in \mathbb{R}$ y en particular $\forall y \in [-2; 2]$, así tenemos $m(x) = \sup_{y \in [-2; 2]} H(x, y) \leq 1$.

Considerando $x = y \neq 0$, se tiene $\frac{2xy}{x^2+y^2} = 1$, por lo tanto:

$$m(x) = \begin{cases} 1; & \text{si } x \neq 0 \\ 0; & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

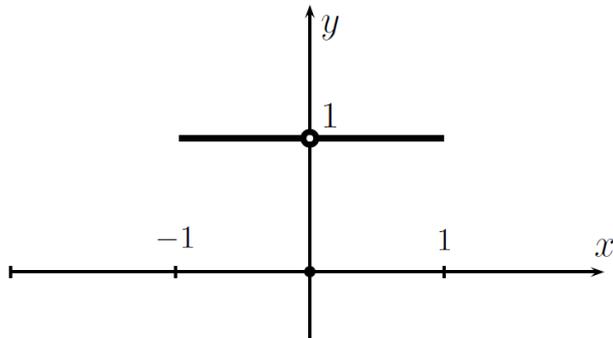


FIGURA 3.2. Gráfica de m .

4. Resultados

. El siguiente teorema es probado en espacios finitos, ya que estos espacios tienen la ventaja de que la bola unitaria es compacta, algo que no suele suceder en espacios de dimensión infinita, salvo que recurramos a las topologías débiles, en particular la topología débil *, sin embargo la compacidad y la existencia de una subsucesión débilmente convergente, no son suficientes para un objetivo más ambicioso, pero seguimos en la lucha, tratando de debilitar alguna condición o en búsqueda de nuevas herramientas para lograrlo.

Teorema 4.

Sea $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un operador θ -monótono, si $\theta(\cdot, y)$ es s.c.i. en $\text{int}(D(T)) \forall y \in \text{int}(D(T))$. Entonces T es localmente acotado en $\text{int}(D(T))$.

Demostración: Procedamos por el absurdo, es decir supongamos que T no es localmente acotado en $\text{int}(D(T))$.

Entonces existe $x \in \text{int}(D(T))$ tal que T no es localmente acotado en $x \in \text{int}(D(T))$.

Luego, para toda $V_x \subseteq X$ (vecindad de x) se tiene que $T(V_x)$ no es acotado.

Como $x \in \text{int}(D(T))$, existe $\varepsilon > 0/B_{2\varepsilon}(x) \subset D(T)$, así para cada $k \in \mathbb{N}$:

$B_{\frac{\varepsilon}{k}}(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset D(T)$. Entonces $T(B_{\frac{\varepsilon}{k}}(x))$ no es acotada, luego, existe $f_k \in T(B_{\frac{\varepsilon}{k}}(x))$ tal que $\|f_k\| \geq k$, es decir $\|f_k\| \rightarrow +\infty$.

Como $f_k \in \bigcup_{y \in B_{\frac{\varepsilon}{k}}(x)} Ty$, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in B_{\frac{\varepsilon}{k}}(x)$ tal que $f_k \in Tx_k$.

Notemos que $\|x - x_k\| < \frac{\varepsilon}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, luego $x_k \rightarrow x$

Consideremos $B_\varepsilon[x] = \overline{B_\varepsilon(x)} \subset B_{2\varepsilon}(x) \subset D(T)$

Sea $h_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}$, entonces $\|h_k\| = 1$, $\forall k \geq 1$.

Recordemos que $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$.

Como $(h_k)_{k \geq 1}$ es una sucesión acotada, existe $(h_{k_i})_{i \geq 1}$ subsucesión de $(h_k)_{k \geq 1}$ y existe $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $h_{k_i} \rightarrow h$, entonces $\|h_{k_i}\| \rightarrow \|h\|$, es decir $\|h\| = 1$. (Esta es la principal dificultad para extender este teorema a espacios reflexivos.)

Consideremos $y = x + \varepsilon h$, entonces $y \in B_\varepsilon[x]$.

Del Lema 2

$$\sup_{u \in Tx} \langle u, y - x \rangle \leq \left(\inf_{v \in Ty} \|v\| - \theta(x, y) \right) \|x - y\| \quad \forall x, y \in D(T)$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \langle f_k, (x + \varepsilon h) - x_k \rangle &\leq \left(\inf_{v \in T(x + \varepsilon h)} \|v\| - \theta(x_k, x + \varepsilon h) \right) \|x_k - (x + \varepsilon h)\| \\ \left\langle \frac{f_k}{\|f_k\|}, (x + \varepsilon h) - x_k \right\rangle &\leq \frac{\left(\inf_{v \in T(x + \varepsilon h)} \|v\| - \theta(x_k, x + \varepsilon h) \right) \|x_k - (x + \varepsilon h)\|}{\|f_k\|} \\ \langle h_k, (x + \varepsilon h) - x_k \rangle &\leq \frac{\left(\inf_{v \in T(x + \varepsilon h)} \|v\| - \theta(x_k, x + \varepsilon h) \right) \|x_k - (x + \varepsilon h)\|}{\|f_k\|} \\ \langle h_{k_i}; (x + \varepsilon h) - x_{k_i} \rangle &\leq \frac{\left(\inf_{v \in T(x + \varepsilon h)} \|v\| - \theta(x_{k_i}, x + \varepsilon h) \right) \|x_{k_i} - (x + \varepsilon h)\|}{\|f_{k_i}\|} \\ \langle h_{k_i}, x_{k_i} - (x + \varepsilon h) \rangle &\geq \frac{\left(\theta(x_{k_i}, x + \varepsilon h) - \inf_{v \in T(x + \varepsilon h)} \|v\| \right) \|x_{k_i} - (x + \varepsilon h)\|}{\|f_{k_i}\|} \end{aligned}$$

Tomando límite inferior

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \langle h_{k_i}; x_{k_i} - (x + \varepsilon h) \rangle \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\theta(x_{k_i}, x + \varepsilon h) - \inf_{v \in T(x + \varepsilon h)} \|v\| \right) \frac{\|x_{k_i} - (x + \varepsilon h)\|}{\|f_{k_i}\|}$$

Entonces

$$\langle h, x - (x + \varepsilon h) \rangle \geq \frac{\left(\theta(x, x + \varepsilon h) - \inf_{v \in T(x + \varepsilon h)} \|v\| \right) \|x - (x + \varepsilon h)\|}{\liminf_{i \rightarrow \infty} \|f_{k_i}\|}$$

Luego $\langle h, -\varepsilon h \rangle \geq 0$ ya que $\|f_{k_i}\| \rightarrow \infty$
 Así $-\varepsilon \|h\|^2 \geq 0$ de donde $0 \geq \varepsilon$, lo cual es absurdo.
 Por lo tanto, T es localmente acotada en $\text{int}(D(T))$. \square

Definición 14. Sea $T : X \rightrightarrows X^*$. Si $G(T)$ es cerrado en $X \times X^*$ (con la topología inducida por la norma $\|(,)\| = \sqrt{\|u\|_x^2 + \|v\|_{x^*}^2}$). Decimos que T es semicontinua exterior.

Definición 15. T es coercivo si $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{\inf_{u \in T_x} \langle u, x \rangle}{\|x\|} = +\infty$

Teorema 5. Si $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es θ -monótono a valores convexos, semicontinua exterior y $D(T) = \mathbb{R}^n$.

$\theta(\cdot, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ semicontinua inferior $\forall y \in \mathbb{R}^n$ y $\theta(\cdot, 0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ acotada inferiormente. Entonces $T + \lambda I$ es sobreyectiva $\forall \lambda > 0$.

Demostración:

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, como $\langle x - y, x - y \rangle = \|x - y\|^2 = \|x - y\| \|x - y\|$.

Definamos $\theta_1(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Sea

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R}^n &\rightrightarrows \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Ix = \{x\} \end{aligned}$$

Claramente I es θ_1 -monótono.

Tenemos entonces que T es θ -monótono y I es θ_1 -monótono con $D(T) = D(I) = \mathbb{R}^n$.

De la proposición 1, para todo $\lambda > 0$ se tiene que $T_\lambda = T + \lambda I$ es $\tilde{\theta}$ -monótono con

$$\tilde{\theta}(x, y) = 1 \cdot \theta(x, y) + \lambda \theta_1(x, y)$$

Como $\theta_1(x, y) \geq 0$, tenemos $\tilde{\theta}(x, y) \geq \theta(x, y)$, entonces por el Lema 1 $T_\lambda = T + \lambda I$ es θ -monótono $\forall \lambda > 0$.

Por hipótesis, $\theta(\cdot, y)$ es semicontinua inferior en $\mathbb{R}^n = \text{int}(D(T_\lambda))$, entonces por el Teorema 4 T_λ es localmente acotado en $\mathbb{R}^n = \text{int}(D(T_\lambda))$.

Veamos que $T + \lambda I$ es semicontinua exterior.

En efecto, sea $((x_n, u_n))_{n \geq 1} \in G(T + \lambda I)$ y $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $(x_n, u_n) \rightarrow (x, u)$.

Como $u_n \in (T + \lambda I)x_n = Tx_n + \lambda Ix_n$. Entonces existe $v_n \in Tx_n$ tal que $u_n = v_n + \lambda x_n$, ordenando: $v_n = u_n - \lambda x_n$, tomando límite tenemos $v_n \rightarrow (u - \lambda x)$.

Como T es semicontinua exterior y $v_n \in Tx_n$, entonces $(x, u - \lambda x) \in G(T)$, luego $u - \lambda x \in Tx$. De donde $u \in (T + \lambda I)x$.

Por lo tanto $(x, u) \in G(T + \lambda I)$

Facilmente se puede comprobar que $T + \lambda I$ toma valores convexos y es coerciva, de donde concluimos la suryectividad. \square

5. Comentarios finales.

Bajo ciertas condiciones en el teorema anterior se puede conseguir inyectividad, esto implicaría la existencia de la inversa del operador, que para nuestro placer también es θ_1 -monótono, para una θ_1 adecuada, la existencia del operador inverso la podemos usar en teoria de semigrupos, esta vez con operadores multivaluados.

Profundizando aun más podemos generalizar los conceptos de localmente monótono, maximal monótono, subdiferenciabilidad, etc.

Agradecimientos. A mis padres Olinda y Julio, tios y hermanos, en especial a mi esposa Miriam, mi hija Emy y la que se viene en camino, por todo su apoyo y amor brindado, que es lo que me impulsa a seguir adelante.

A mi asesora Dra. Yolanda, colegas y amigos que con sus críticas contribuyeron a preparar este manuscrito.

Referencias

- [1] Iusem,A., Kassay, G. and Sosa, W. *An existence result for equilibrium problems with some surjectivity consequences*, Journal of Convex Analysis, 16(3&4) (2009), pp. 807-826.
- [2] Marian,D.; Peter,I.R. and Pintea, C. *A class of generalized monotone operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 421(2) (2015), pp. 1827 - 1843.
- [3] Browder, F.E. *Multi-valued monotone nonlinear mappings and duality mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 118 (1965), pp. 338-351.
- [4] Browder, F.E. *Nonlinear maximal monotone operators in Banach space*, Math. Annalen. 175(1968), pp. 89-113.
- [5] Browder, F.E. *The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces*, Math. Annalen. 177(1968), pp. 283-301.
- [6] Kassay, G.; Pintea, C. *On preimages of a class of generalized monotone operators*, Journal of Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 73(11) (2010), pp. 3537 - 3545.
- [7] Kassay,G.; Pintea,C.; László, S. *Monotone operators and closed countable sets*, Optimization, A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, 60(8-9) (2011), pp. 1059 - 1069.
- [8] Rockafellar, R.T. Wets, R.J-B. *Variational Analysis 743 pages, ISBN: 978-3-642-02431-3* Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2009). v. 3
- [9] László, S. *Generalized Monotone Operators, Generalized Convex Functions and Closed Countable Sets* , Journal of Convex Analysis, 18(4) (2011), pp. 1075 - 1091.
- [10] László, S. *Ph.D Thesis: The Theory of Monotone Operators with Applications*, Babes-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania(2011).
- [11] László, S. *Monotone Operators: Theory and Applications 300 pages, ISBN: 978-3659497636* LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.
<http://www.amazon.com/Monotone-Operators-Applications-Szilárd-László/dp/3659497630>.
- [12] Santiago Ayala, Y. *Principios Fundamentales del Análisis Funcional 79 pages. Libro Resumen XXXI Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana, Ica(2013).* v. 1