Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 05(01): 34 - 38 (2018)

# Los Operadores $T_t$ , $\tilde{T}_t$ y el Operador Diferencial $\mathcal{A}$

# The Operators $T_t$ , $\tilde{T}_t$ and the Differential Operator $\mathcal{A}$

Alejandro Ortiz Fernández*

*Received, Feb. 14, 2018* *Accepted, Jun. 10, 2018*

**DOI:** http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2018.01.05

**Resumen**

*En esta breve nota continuamos con el estudio del grupo $\{A_t\}$ lo cual ayuda a definir los operadores $T_t$ y $\tilde{T}_t$, así como definir el operador diferencial $\mathcal{A}$ (ver[1]); en cada caso damos los detalles de algunos resultados.*

**Palabras claves**. Grupo, Operadores, Integrales singulares, Homogeneidad.

**Abstract**

*In this brief note we continue with the study of the group $\{A_t\}$, which it help to define the operators $T_t$ y $\tilde{T}_t$, also to define the differential operator $\mathcal{A}$ (see [1]).*

**Keywords**. Group, Operators, Singular Integrals, Homogeneity.

**1. Introducción.** En esta nota continuamos con lo expuesto en [2] en donde presentamos algunos argumentos sobre el grupo $\{A_t\}$, el que fue introducido por Calderón-Torchinsky ( [1]) y donde se estudian convoluciones de la forma $F(x,t) = (f * \varphi_t)(x)$, donde $f \in S'$ (distribuciones temperadas) y $\varphi_t$ es una aproximación de la identidad de la forma $\varphi_t(x) = (\det A_t)^{-1}\varphi(A_t^{-1}x)$, $t > 0$, siendo $\varphi$ infinitamente diferenciable y rápidamente decreciente en $\mathbb{R}^n$. $A_t$ es un grupo multiplicativo de dilataciones lineales de $\mathbb{R}^n$.

Conforme Calderón - Torchinsky lo dicen, estos tipos de funciones están relacionadas con las integrales singulares con homogeneidad mixta (ver [2]) y también lo están con operadores, como el operador difusión (calor); los citados profesores consideran los operadores $T_t$ y $\tilde{T}_t$ que pasamos a describir.

**2. Los Operadores $T_t$ y $\tilde{T}_t$.** Estos operadores son definidos vía:

$$(T_t f)(x) = f(A_t x) \quad \text{y} \quad (\tilde{T}_t f)(x) = f(A_t^* x).$$

Se tienen las siguientes consecuencias:

**(a).** $T_t(fg) = (T_t\, f)(T_t\, g)$
pues $T_t(fg)(x) = fg(A_t x) = (T_t\, f)(x)(T_t\, g)(x)$.

**(b).** Si $T'$ es la transpuesta de $T$, entonces $T_t' = t^{-\gamma}T_t^{-1}$.

*Pontificia Universidad Católica del Perú, Sección Matemáticas. Perú (jortiz@pucp.edu.pe).

En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle T_t f, g\rangle &= \int T_t f(x) g(x) dx \\
&= \int f(A_t x) g(x) dx \\
&\quad \big(\text{poniendo } y = A_t x, \text{de donde } dy = t^{\gamma} dx,\ x = A_t^{-1} y, dx = t^{-\gamma} dy\big) \\
&= \int f(y) g(A_t^{-1} y) t^{-\gamma} dy \\
&\quad \big(\text{considerando que } g(A_t^{-1} y) = (T_t^{-1} g)(y)\,\big) \\
&= \int f(y)(T_t^{-1} g)(y) t^{-\gamma} dy \\
&= \langle f, t^{-\gamma} T_t^{-1} g\rangle,
\end{aligned}$$

**(c).** $(T_t f)^{\wedge} = t^{-\gamma} \tilde{T}_t^{-1} f$.
En efecto, se sabe que $\langle T_t f, \hat{\varphi}\rangle = \langle (T_t f)^{\wedge}, \varphi\rangle$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\langle T_t f, \hat{\varphi}\rangle &= \int (T_t f)(x)\hat{\varphi}(x) dx = \int f(A_t x)\hat{\varphi}(x) dx = \int f(y)\hat{\varphi}(A_t^{-1} y) t^{-\gamma} dy \\
&= \int f(y) \left( \int e^{2\pi i \langle y, z\rangle} \varphi(A_t^{-1} z) dz \right) t^{-\gamma} dy \\
&\quad (\text{considerando } z' = A_t^{-1} z,\ dz = t^{\gamma} dz') \\
&= \int f(y) \left( \int e^{2\pi i \langle y, A_t z'\rangle} \varphi(z') t^{\gamma} dz' \right) t^{-\gamma} dy \\
&= \int \varphi(z') \left( \int e^{2\pi i \langle y, A_t z'\rangle} f(y) dy \right) dz' = \int \varphi(z') \left( \int e^{2\pi i \langle A_t^{*} y, z'\rangle} f(y) dy \right) dz' \\
&\quad (\text{ de nuevo si } A_t^{*} y = y',\ dy' = t^{\gamma} dy) \\
&= \int \varphi(z') \left( \int e^{2\pi i \langle y', z'\rangle} f((A_t^{*})^{-1} y') t^{-\gamma} dy' \right) dz' \\
&= \int \varphi(z') \left( \int e^{2\pi i \langle y', z'\rangle} (\tilde{T}_t^{-1} f)(y') t^{-\gamma} dy' \right) dz' \\
&= \int \varphi(z') t^{-\gamma} (\tilde{T}_t^{-1} f)^{\wedge}(z') dz = \langle \varphi, t^{-\gamma} (\tilde{T}_t^{-1} f)^{\wedge}\rangle.
\end{aligned}$$

Conclusión: $\langle (T_t f)^{\wedge}, \varphi\rangle = \langle \varphi, t^{-\gamma} (\tilde{T}_t^{-1} f)^{\wedge}\rangle$; que es la tesis.

**(d).** $T_t^{-1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} T_t$ es un operador diferencial con coeficientes constantes para cada $t$.
En efecto,
$T_t^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} T_t f(x) = T_t^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(A_t x)$.
Pero, en general, $g(x) = T_t^{-1} g(A_t x)$, luego se tiene $T_t^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} T_t f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(x)$.

Además la transpuesta del operador es:
$(T_t^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} T_t)' f = (-1)^{|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f$.

**(e).** $T_t^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} T_t (t^{-\gamma} T_t^{-1} \psi) = t^{-\gamma} T_t^{-1} (\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \psi)$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
T_t^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} T_t (t^{-\gamma} T_t^{-1} \psi(x)) &= T_t^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} T_t (t^{-\gamma} \psi(A_t^{-1} x)) \\
&= T_t^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} t^{-\gamma} \psi(x).
\end{aligned}$$

Nota. Observemos que tenemos $f(A_t^{-1} y) = T_t^{-1} f(y)$ ya que $(T_t f)(x) = f(A_t x)$ implica $f(x) = T_t^{-1} f(A_t x)$; basta poner $y = A_t x$ para tener la igualdad deseada.

**(f).** Sea el operador $B_t = (I - A_tA_t^*)^{\frac{1}{2}}$, $0 \leq t < 1$. Entonces se tiene que $\langle B_t^2 x, x\rangle \geq 0$ y $B_t^2$ es una matriz positiva autoadjunta tal que:

*(i)* $(1-t^2)\|B_t^{-1}x\|^2 \leq \|x\|^2 \leq 2\|P\|(1-t)\|B_t^{-1}x\|^2,\ x \in \mathbb{R}^n;$

*(ii)* $|\det B_t^{-1}| \leq (1-t)^{-\frac{n}{2}}.$

En efecto:

El grupo $\{A_t\}$ satisface $\|A_tx\| \leq t\|x\|$, así tenemos

$$\begin{aligned}\langle B_t^2 x, x\rangle &= \langle (I - A_tA_t^*)x, x\rangle = \langle x, x\rangle - \langle A_tA_t^* x, x\rangle \\ &= \|x\|^2 - \|A_t^*x\|^2 \\ &\geq \|x\|^2 - t^2\|x\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Además observamos que $\langle B_1^2 x, x\rangle = \|x\|^2 - \|A_1x\|^2 = 0.$

Se observa que $B_t^2$ es autoadjunto.

(*i*). Pongamos $y = B_t^{-1}x$ ó $x = B_ty$, de donde

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= \langle B_ty, B_ty\rangle \\ &= (1-t)\tfrac{2}{u}\langle P^*A_u^*y, A_u^*y\rangle,\ \text{con } t \leq u \leq 1.\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de $= \left(\frac{d}{dt}\langle A_tx, A_tx\rangle = \frac{2}{t}\langle PA_tx, A_tx\rangle\right).$

Luego,

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &\leq (1-t)\tfrac{2}{u}\|P^*\|\,\|A_u^*y\|\,\|A_u^*y\| \\ &\leq (1-t)\frac{2}{u}\|P\|u^2\|y\|^2 \\ &\leq 2\|P\|(1-t)\|B_t^{-1}x\|^2.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \langle B_ty, B_ty\rangle = \langle B^2y, y\rangle \\ &= \langle (I - A_tA_t^*)y, y\rangle = \langle y, y\rangle - \langle A_tA_t^*y, y\rangle \\ &= \|y\|^2 - \|A_t^*y\|^2 \\ &\geq \|y\|^2 - t^2\|y\|^2 = (1-t^2)\|B_t^{-1}x\|^2.\end{aligned}$$

(*ii*) Sabemos que $(1-t^2)\|B_t^{-1}x\|^2 \leq \|x\|^2$ ó $\|B_t^{-1}x\|^2 \leq (1-t^2)^{-1}\|x\|^2$, de donde $\|B_t^{-1}\| \leq (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$,

y así $|\det B_t^{-1}| \leq \|B_t^{-1}\|^n \leq (1-t^2)^{-\frac{n}{2}}$.

**3. El Operador Diferencial $\mathcal{A}$.** Como se sabe, la teoría moderna de operadores diferenciales parciales es una área central en la matemática y su progreso fue enorme en la segunda mitad del siglo XX y las investigaciones continúan aún en nuestros días. El análisis funcional y la teoría de distribuciones contribuyeron a dar las bases sólidas para lograr tal progreso.

Por otro lado también se estableció una importante relación de tales operadores con las integrales singulares, esto gracias a los profundos trabajos del gran analista Alberto Calderón, quien con métodos e ideas muy originales estableció puentes entre las ecuaciones en derivadas parciales con el análisis armónico. En esta dirección es famoso su trabajo sobre la unicidad de la solución del problema de Cauchy, así como también lo son sus teoremas de existencia y unicidad.

En este contexto es significativo e importante la introducción por parte de Calderón -Torchinsky [1] del operador diferencial $\mathcal{A}$, el cual es general y está relacionado con el grupo $\{A_t\}$; así, este operador recupera ciertos operadores diferenciales clásicos.

La propiedad (d) nos motiva afirmar que un operador diferencial con coeficientes constantes se puede representar en términos de $\{A_t\}$, con posibles ventajas.

Sea el gradiente $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Entonces se define el operador $\mathcal{A}$ vía :

$$\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2\pi t}\langle P^*A_t^*\nabla, A_t^*\nabla\rangle.$$

Si $L^2 = \frac{P+P^*}{4\pi}$, se tiene

$$\begin{aligned}\langle LA_t^*\nabla, LA_t^*\nabla\rangle &= \langle L^2A_t^*\nabla, A_t^*\nabla\rangle = \langle\frac{P+P^*}{4\pi}A_t^*\nabla, A_t^*\nabla\rangle\\ &= \frac{1}{4\pi}\langle PA_t^*\nabla, A_t^*\nabla\rangle + \frac{1}{4\pi}\langle P^*A_t^*\nabla, A_t^*\nabla\rangle\\ &= \frac{1}{2\pi}\langle P^*A_t^*\nabla, A_t^*\nabla\rangle.\end{aligned}$$

De esta manera el operador $\mathcal{A}$ toma la forma

$$\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{t}\langle LA_t^*\nabla, LA_t^*\nabla\rangle.$$

Veamos casos particulares:

Asumamos que $P$ es autoadjunto y $P = diag\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 1$, es la transformación considerada por Fabes-Riviere (ver [2],2) entonces se tiene que $A_t^* = diag(t^{\alpha_1}, ..., t^{\alpha_n})$ y además

$$\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2\pi t}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j t^{2\alpha_j}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Aún, si $P = I$ (identidad) y $\alpha_j = 1$, se tendrá $\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{t}{2\pi}\Delta$.

En el estudio de problemas en ecuaciones en derivadas parciales es fundamental determinar la solución, o al menos su existencia, de la ecuación diferencial; por ejemplo de la ecuación $\Delta u = 0$, entre muchas otras.

Por analogía, sea la ecuación

$$\mathcal{A}u = 0.$$

Si $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ y $\varphi_t(x) = t^{-\gamma}\varphi(A_t^{-1}x)$ es su dilatación, entonces

$$\mathcal{A}\varphi_t(x) = 0.$$

Prueba.

Observemos que $\hat{\varphi}_t(x) = \hat{\varphi}(A_t^*x)$.

En efecto,

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_t(x) &= \int e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\varphi_t(y)dy\\ &= \int e^{2\pi i\langle x,y\rangle}t^{-\gamma}\varphi(A_t^{-1}y)dy\\ &\quad (\text{ poniendo} A_t^{-1}y = y', y = A_t y', dy = t^{\gamma}dy')\\ &= \int e^{2\pi i\langle x,A_t y'\rangle}\varphi(y')dy'\\ &= \int e^{2\pi i\langle A_t^* x,y'\rangle}\varphi(y')dy'\\ &= \hat{\varphi}(A_t^*x).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_t(x) = \hat{\varphi}(A_t^*x) &= \left(e^{-\pi|A_t^*|^2}\right)^{\wedge} = e^{-\pi|A_t^*\xi|^2}\\ &\quad (\text{llamando } \psi(t) = |A_t^*\xi|^2)\\ &= e^{-\pi\psi(t)}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varphi}_t(x) = -\pi e^{-\pi\psi(t)}\psi'(t),$$

y considerando que

$$\psi'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\langle A_t^*\xi, A_t^*\xi\rangle = 2\langle \frac{\partial}{\partial t}A_t^*\xi, A_t^*\xi\rangle$$

y que $\frac{\partial}{\partial t}A_t^* = \frac{1}{t}P^*A_t^*$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varphi}_t(x) &= -\frac{2\pi}{t}\langle P^*A_t^*\xi, A_t^*\xi\rangle e^{-\pi|A_t^*\xi|^2}\\ &= -\frac{2\pi}{t}\langle P^*A_t^*\xi, A_t^*\xi\rangle\hat{\varphi}_t(\xi),\end{aligned}$$

de donde tomando antitransformadas de Fourier se obtiene $\mathcal{A}\varphi_t(x) = 0$.

Nota. Si se considera la convolución $u(x,t) = (f * \varphi_t)(x)$, con $f \in S'$, se verifica que $\mathcal{A}u(x,t) = 0$, lo que es útil para problemas de valor de contorno en un contexto más general.

**4. Proyección.** El grupo $\{A_t\}_{t>0}$ y el operador diferencial $\mathcal{A}$ fueron motivados por clásicos problemas en las ecuaciones en derivadas parciales como fue el problema de Dirichlet cuyo estudio condujo a la introducción de ciertos espacios de funciones y al uso de métodos del análisis funcional, y esto influyó en fundamentales extensiones en el área del análisis armónico.

Informalmente el problema de Dirichlet consiste en dada $f$ sobre $\mathbb{R}^n$, encontrar $u$ tal que $\Delta u = 0$ sobre $\mathbb{R}^{n+1}_+$ y $\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$ en $\mathbb{R}^n$.

Para que este problema sea estable la función $f$ debe estar en cierto espacio de funciones como, por ejemplo, el espacio de Lebesgue $L^p$ ó en $BMO$ (espacio de funciones con oscilación media acotada).

Si $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, y $u(x,t) = (P_t * f)(x)$, donde $P_t$ es el núcleo de Poisson, entonces la integral de Poisson $u(x,t)$ es armónica sobre $\mathbb{R}^{n+1}_+$ tal que $\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$ c.t.p en $\mathbb{B}^n$.

En esta dirección se construyeron los espacios de funciones armónicas $HMO$ y Fabes-Johnson-Neri verificaron que $HMO = P_t * BMO$. (Mayores detalles serán dados en un posterior trabajo). De esta manera, el espacio $BMO$ aparece como un espacio traza ó espacio de valores de contorno.

Aún mas, Fabes-Johnson-Neri consideran espacios más amplios como son los espacios $E^{\alpha,p} = \mathcal{L}^{p,\lambda}$, donde $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$, $0 \leq \lambda \leq n+p$, $1 \leq p < \infty$; y también consideran a los espacios de funciones armónicas, sobre $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $H^{\alpha,p}$ donde $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < \infty$. Ellos prueban que $H^{\alpha,p} = P_t * E^{\alpha,p}$.

En esta dirección Ortiz-Torchinsky estudiaron el caso parabólico de esta caracterización. En el trabajo que se está anunciando el objetivo es obtener una caracterización para los espacios $E^{\alpha,p}_\varphi$ y $H^{\alpha,p}_\varphi$ para $\varphi$, una conveniente función y haciendo uso del grupo $\{A_t\}$ y del operador $\mathcal{A}$.

Referencias

[1] Calderón,A.P. and Torchinsky, A. *Parabolic Maximal Functions Asociated with a Distribution*. Adv.in Math. I.1975.II.1977.
[2] Ortiz, A. *El Grupo* $\{A_t\}$. Selecciones Matemáticas. UNT. Vol.05 por aparecer.2018.