Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 05(01): 27 - 33 (2018)

El Grupo $\{A_t\}$

The Group $\{A_t\}$

Alejandro Ortiz Fernández*

Received, Feb. 24, 2018 *Accepted, May. 20, 2018*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2018.01.04

Resumen

En esta nota damos la motivación y algunos detalles del grupo $\{A_t\}$, el cual surge al generalizar la clásica teoría de Calderón-Zygmund sobre las integrales singulares.

Palabras claves. Integrales singulares, Núcleo, Homogeneidad, Operador infinitesimal, Calderón-Zygmund.

Abstract

In this note we give the motivation and some details about the group $\{A_t\}$, which appears in the generalization of the classical Calderón-Zygmund's theory on singular integrals.

Keywords. Singular Integrals, Kernel, Homogeneity, Infinitesimal operator, Calderón-Zygmund.

1. Introducción. Un capítulo importante en el análisis armónico es la teoría de Calderón-Zygmund sobre integrales singulares, pues ella, por ejemplo, estableció conexiones con las ecuaciones en derivadas parciales; ver, por ejemplo, [1] y [5] para una presentación del tal teoría. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy$ una integral singular donde el núcleo $k(x)$ satisface la condición de homogeneidad de grado $-n$, esto es, $k(tx) = t^{-n}k(x)$, con $t > 0$. Esta condición para el núcleo permite tener una buena teoría, así tales operadores son continuos en los espacios L^p, $1 < p < \infty$. El éxito de la teoría de Calderón-Zygmund permitió la investigación de las ecuaciones de tipo parabólico en donde se consideran núcleos $k(x,s)$ que satisfacen la condición de homogeneidad $k(tx, t^m s) = t^{-n-m}k(x,s)$; los operadores construídos en base a ellos son también continuos en L^p, $1 < p < \infty$. Este tipo de operadores fueron estudiados por B.F.Jones (1964), E.B. Fabes (1966), y continuado por otros analistas. Tales condiciones de homogeneidad fueron generalizados por E.B. Fabes - N. Riviere en 1966 [3] quienes consideran núcleos que satisfacen una condición de homogeneidad mixta:

$$k(t^{\alpha_1}x_1, ..., t^{\alpha_n}x_n) = t^{-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}k(x_1, ..., x_n),$$

donde $t > 0$, $\alpha_i \geq 1$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos ahora la función

$$F(x,\rho) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\rho^{2\alpha_j}},$$

donde x es fijo, $\rho > 0$. Se observa que $F(x,\rho)$ es una función decreciente de ρ, luego la ecuación $F(x,\rho) = 1$ tiene una única solución que se llamará $\rho(x)$. Pongamos $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| = 1\}$. Entonces se tiene

*Pontificia Universidad Católica del Perú, Sección Matemáticas. Perú (jortiz@pucp.edu.pe).

$\left(\frac{x_1}{\rho^{\alpha_1}(x)}, ..., \frac{x_n}{\rho^{\alpha_n}(x)}\right) \in S^{n-1}$ pues

$$\frac{x_1^2}{\rho^{2\alpha_1}(x)} + ... + \frac{x_n^2}{\rho^{2\alpha_n}(x)} = F(x, \rho) = 1.$$

Además tenemos el

Lema 1.1. $\rho(x)$ *es una métrica.*

Prueba. $\rho(x) \leq 1$ es equivalente a $|x| \leq 1$, ya que $\rho(x) \leq 1$ implica $\frac{1}{\rho^{2\alpha_j}(x)} \geq 1$ de donde $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\rho^{2\alpha_j}(x)} = 1$, esto es, $|x| \leq 1$.

Además se tiene

$$\rho(t^{\alpha_1}x_1, ..., t^{\alpha_n}x_n) = t\rho(x_1, ..., x_n), \qquad (+)$$

esto es, se tiene $\rho(t^{\alpha}x) = t\rho(x)$.

En efecto;

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{t^{2\alpha_j}x_j^2}{\rho^{2\alpha_j}(t^{\alpha_1}x_1, ..., t^{\alpha_n}x_n)} = 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\rho^{2\alpha_j}(x_1, ..., x_n)},$$

de donde

$$\frac{t^{2\alpha_j}}{\rho^{2\alpha_j}(t^{\alpha_1}x_1, ..., t^{\alpha_n}x_n)} = \frac{1}{\rho^{2\alpha_j}(x_1, ..., x_n)},$$

esto es, $t^{2\alpha_j}\rho^{2\alpha_j}(x_1, ..., x_n) = \rho^{2\alpha_j}(t^{\alpha_1}x_1, ..., t^{\alpha_n}x_n)$, de donde se obtiene $(+)$.

Probemos ahora la desigualdad triangular: $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

En efecto:

Llamemos $t_1 = \rho(x)$, $t_2 = \rho(y)$. $t = t_1 + t_2$.

Por las observaciones hechas es suficiente ver que

$$\left(\frac{x_1 + y_1}{t^{\alpha_1}}, ..., \frac{x_n + y_n}{t^{\alpha_n}}\right) = \left(\left(\frac{t_1}{t}\right)^{\alpha_1} x_1^*, ..., \left(\frac{t_1}{t}\right)^{\alpha_n} x_n^*\right) + \left(\left(\frac{t_2}{t}\right)^{\alpha_1} y_1^*, ..., \left(\frac{t_2}{t}\right)^{\alpha_n} y_n^*\right),$$

donde $(x_1^*, ..., x_n^*)$ y $(y_1^*, ..., y_n^*)$ están en S^{n-1}. Esta igualdad es cierta ya que

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1 + y_1}{t^{\alpha_1}}, ..., \frac{x_n + y_n}{t^{\alpha_n}}\right) &= \left(\frac{x_1}{t^{\alpha_1}}, ..., \frac{x_n}{t^{\alpha_n}}\right) + \left(\frac{y_1}{t^{\alpha_1}}, ..., \frac{y_n}{t^{\alpha_n}}\right) \\ &= \left(\frac{t_1^{\alpha_1}}{t^{\alpha_1}}\frac{x_1}{t_1^{\alpha_1}}, ..., \frac{t_1^{\alpha_n}}{t^{\alpha_n}}\frac{x_n}{t_1^{\alpha_n}}\right) + \left(\frac{t_2^{\alpha_1}}{t^{\alpha_1}}\frac{y_1}{t_2^{\alpha_1}}, ..., \frac{t_2^{\alpha_n}}{t^{\alpha_n}}\frac{y_n}{t_2^{\alpha_n}}\right).\end{aligned}$$

Pongamos $x_i^* = \frac{x_i}{t_1^{\alpha_i}}$, donde $i = 1, 2, ..., n$. Luego,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{t_1^{2\alpha_1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\rho^{2\alpha_i}(x)} = 1;$$

de ello $(x_1^*, ..., x_n^*) \in S^{n-1}$.

De igual modo si $y_i^* = \frac{y_i}{t_2^{\alpha_i}}$, se tiene también $(y_1^*, ..., y_n^*) \in S^{n-1}$.

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{t_1}{t}\right)^{\alpha_1} x_1^*, ..., \left(\frac{t_1}{t}\right)^{\alpha_n} x_n^*\right) + \left(\left(\frac{t_2}{t}\right)^{\alpha_1} y_1^*, ..., \left(\frac{t_2}{t}\right)^{\alpha_n} y_n^*\right) \\ &= \frac{t_1}{t}\left(\left(\frac{t_1}{t}\right)^{\alpha_1 - 1} x_1^*, ..., \left(\frac{t_1}{t}\right)^{\alpha_n - 1} x_n^*\right) + \frac{t_2}{t}\left(\left(\frac{t_2}{t}\right)^{\alpha_1 - 1} y_1^*, ..., \left(\frac{t_2}{t}\right)^{\alpha_n - 1} y_n^*\right) \in S^n,\end{aligned}$$

donde $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq 1\}$, ya que $(x_1^*, ..., x_n^*) \in S^{n-1}, (y_1^*, ..., y_n^*) \in S^{n-1}$, $0 \leq \frac{t_i}{t} \leq 1$, y por la convexidad de la bola S^n observando que $\frac{t_1}{t} + \frac{t_2}{t} = 1$.

Resumen: Se ha probado que $\left(\frac{x_1+y_1}{t^{\alpha_1}}, ..., \frac{x_n+y_n}{t^{\alpha_n}}\right) \in S^n$, esto es, $\frac{x+y}{t^\alpha} \in S^n$, lo que implica que $\left|\frac{x+y}{t^\alpha}\right| \leq 1$, lo que es equivalente a $\rho\left(\frac{x+y}{t^\alpha}\right) \leq 1$, de donde $\frac{1}{t}\rho(x+y) \leq 1$ o $\rho(x+y) \leq t = t_1 + t_2 = \rho(x) + \rho(y)$.
Esto termina el lema. □

Nota. Los argumentos dados hasta acá encierran el germen de un nuevo enfoque del análisis real clásico a través de métrica parabólica $\rho(x)$.

Fabes-Riviere [3] estudiaron la siguiente clase de operadores integrales singulares. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y el núcleo $k : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{C}$, y sean α_i números reales, $\alpha_i \geq 1, i = 1, 2, ..., n$. Asumamos que $1 = \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq .... \leq \alpha_n$ y consideremos las siguientes hipótesis sobre $k(x)$:

(i). $k(t^{\alpha_1}x_1, ..., t^{\alpha_n}x_n) = t^{-\sum \alpha_i} k(x_1, ..., x_n)$, con $t > 0$, esto es $k(t^\alpha x) = t^{-|\alpha|}k(x)$.
Observemos que si:

$$t = \begin{bmatrix} t^{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t^{\alpha_n} \end{bmatrix},$$

la condición de homogeneidad sería $k(tx) = |\det(t)|^{-1}k(x)$.

(ii). $\int_{S^{n-1}} |k(x)|d\sigma < \infty$; se puede asumir $\int_{S^{n-1}} |k(x)|d\sigma \leq 1$ y $\int_{S^{n-1}} k(x)J(\varphi_1, ..., \varphi_{n-1})d\sigma = 0$, donde el jacobiano J aparece al hacerse el cambio de variables

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho^{\alpha_1} \cos\varphi_1 ... \cos\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ x_2 &= \rho^{\alpha_2} \cos\varphi_1 ... \sin\varphi_{n-1} \\ \cdots &= \cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \rho^{\alpha_n} \sin\varphi_1, \end{aligned}$$

y donde $dx = dx_1 \cdots dx_n = \rho^{(\sum \alpha_i)^{-1}} J(\varphi_1, ..., \varphi_{n-1})d\rho d\sigma$; $d\sigma$ es el elemento de área de S^{n-1}.
Consideremos ahora el núcleo truncado

$$k_\varepsilon(x) = \begin{cases} k(x) & si \quad \rho(x) > \varepsilon \\ 0 & si \quad \rho(x) \leq \varepsilon \end{cases}$$

y el operador truncado $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ definido vía

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int k_\varepsilon(x-y)f(y)dy,$$

donde $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, si

$$\int_{\{x/\rho(x) \geq 4\rho(y)\}} |k(x-y) - k(x)|dx \leq C,$$

entonces Fabes-Riviere verifican que

(a). $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_{L^p} \leq A_p\|f\|_{L^p}, 1 < p < \infty$, donde $A_p = A_p(p, \alpha_1, ..., \alpha_n, \int_{S^{n-1}} |k(x)|d\sigma)$.

(b). $\exists \tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{\varepsilon \to 0} \|\tilde{f} - \tilde{f}_\varepsilon\|_{L^p} = 0$.

Nota. Este resultado es una significativa generalización de la teoría de Calderón-Zygmund.

2. Definición y Propiedades del Grupo $\{A_t\}$. Volvamos a la cuestión de la homogeneidad del núcleo de los operadores integrales singulares considerados antes.

Observemos que la condición de homogeneidad de Fabes-Riviere sugiere la siguiente transformación

$$A_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

donde $A_t(x_1, ..., x_n) = (t^{\alpha_1} x_1, ..., t^{\alpha_n} x_n)$. Surge entonces la cuestión si se podrían considerar transformaciones lineales más generales de $\mathbb{R}^n$ tales que aún se tenga la continuidad de tales operadores sobre los espacios $L^p, 1 < p < \infty$, o sobre otros espacios de funciones!...

A finales de los años 1960's la generalización de la teoría de Calderón-Zygmund a través del grupo $\{A_t\}$ se imponía en forma natural. En esta dirección mencionemos los trabajos de M. de Guzmán [4], N. Riviere [6] y A. Torchinsky [7]. El siguiente argumento descansa en ideas de Riviere.

Sea $\{A_t\}_{t>0}$ un grupo de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ tal que:

(i). $A_s A_t = A_{st}$; esta condición es motivada por el anterior argumento,

$$\begin{aligned} A_{st}(x_1, ..., x_n) = ((st)^{\alpha_1} x_1, ..., (st)^{\alpha_n} x_n) &= (s^{\alpha_1} t^{\alpha_1} x_1, ..., s^{\alpha_n} t^{\alpha_n} x_n) \\ \text{(poniendo } y_i = t^{\alpha_i} x_i) \qquad &= (s^{\alpha_1} y_1, ..., s^{\alpha_n} y_n) \\ &= A_s\left(t^{\alpha_1} x_1, ..., t^{\alpha_n} x_n\right) \\ &= A_s A_t(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

(i)'. $A_1 = I$ (identidad). Esto es, $I = A = A_{t.t^{-1}} = A_t A_{t^{-1}}$ y asumimos que $A_{t^{-1}} = (A_t)^{-1}$. Así, en el caso particular que nos ocupa tendríamos, $A_1(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n)$.

(ii). La aplicación $\begin{array}{ccc} \Pi : (0, \infty) & \longrightarrow & L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ t & \longmapsto & A_t \end{array}$ es continua con respecto a la topología uniforme de operadores, esto es, con respecto a la topología del espacio normado $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

(iii). El grupo satisface $\|A_t x\| \leq t\|x\|$, para $0 < t \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, y de esta manera $\|A_t\| \leq t$.

Notas:

- La condición (i) sugiere tomar una representación para el grupo $\{A_t\}$, $t > 0$. Tal respresentación es $\{e^{P \log t}\}$, donde P es una matriz real $n \times n$ llamada el operador infinitesimal del grupo; esto es sugerido pues $A_{st} = e^{P \log st} = e^{P \log s} e^{P \log t} = A_s A_t$.
  En el caso de Fabes-Riviere se tendría $A_t(x_1, ..., x_n) = e^{P \log t}(x_1, ..., x_n) = (t^{\alpha_1} x_1, ..., t^{\alpha_n} x_n)$, donde

$$P = \begin{bmatrix} t^{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t^{\alpha_n} \end{bmatrix}.$$

  En lo que sigue, desde que $A_t = e^{P \log t} = t^P$, $t > 0$, se usará la notación $\{A_t\}$ o $\{t^P\}$. Si $t \geq 1$ se tiene $\|A_t\| \leq t^{\|P\|}$.

•• Estas transformaciones generales son utilizadas para considerar operadores integrales singulares asociados a núcleos $k(x)$ satisfaciendo la condición de homogeneidad generalizada

$$k(e^{P \log t} x) = k(A_t x) = t^{-trP} k(x),$$

con $x \neq 0$, $t > 0$, $trP =$ traza de P.

Algunas Propiedades de $\{A_t\}$.

(a). $\frac{\|t^P x\|}{t}$ es una función **no-decreciente** de t.

En efecto, si $s < t$ se tiene $\|s^P x\| = \|\left(\frac{s}{t}\right)^P t^P x\| \leq \frac{s}{t}\|t^P x\|$, esto es, $\frac{1}{s}\|s^P x\| \leq \frac{1}{t}\|t^P x\|$.

Esta propiedad implica que $\|t^P x\|$ es una función estrictamente no-decreciente ya que si $s < t$ se tiene $\frac{1}{s}\|s^P x\| \leq \frac{1}{t}\|t^P x\|$, lo que implica $\|s^P x\| \leq \frac{s}{t}\|t^P x\| < \|t^P x\|$.

(b). Para $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ existe un único vector t_x tal que $t_x^{-P} x \in S^{n-1}$.

En efecto, se observa que $t^{-P} = (t^{-1})^P$. Por otro lado, $t_x^{-P} x \in S^{n-1}$ implica $\|t_x^{-P} x\| = 1$ o $\|(t_x^{-1})^P x\| = 1$ o en la otra notación que $\|A_{t_x^{-1}} x\| = 1$.

La propiedad quedaría probada si se verifica que
(i). $\|A_{t_x^{-1}} x\| \to 0$ si $t_x \to \infty$.
(ii). $\|A_{t_x^{-1}} x\| \to \infty$ si $t_x \to 0$.
(iii). $\|A_{t_x^{-1}} x\|$ es una función continua decreciente de t.
En efecto,
(i). $\|A_{t_x^{-1}} x\| \leq$ [desde que si $t_x \to \infty, t_x^{-1} \to 0$ y podemos considerar que $t_x^{-1} < 1] \leq t_x^{-1}\|x\|$.

(ii). Si $t_x \to 0$ podemos tomar $t_x \leq 1$. Pongamos $x = A_{t_x} y$ de donde $y = A_{t_x^{-1}} x$. Luego, $\|x\| = \|A_{t_x} y\| \leq t_x \|y\| = t_x \|A_{t_x^{-1}} x\|$; de esta manera $\frac{\|x\|}{t_x} \leq \|A_{t_x^{-1}} x\|$. Pero $\frac{\|x\|}{t_x} \to \infty$ si $t_x \to 0$, luego $\|A_{t^{-1}} x\| \to \infty$.

(iii). Si $t_1 \leq t_2$, $\|A_{t_2^{-1}} x\| = \|A_{t_1 t_2^{-1}} A_{t_1^{-1}} x\| \leq t_1 t_2^{-1} \|A_{t_1^{-1}} x\| \leq \|A_{t_1^{-1}} x\|$. Por tanto queda probado (b).

Nota. La norma $\|t_x^{-P} x\| \equiv \|A_{t_x^{-1}} x\|$ es lo que en la anterior notación es la función $F(x, \rho(x))$ donde ponemos $\rho(x) = t_x$. De esta manera Fabes-Riviere estudian a la función $F(x, \rho(x)) = \|A_{\rho^{-1}(x)} x\|$.

(c). La función $\rho(x) = \begin{cases} t_x & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$, satisface $\rho(t^P x) = t\rho(x)$ (condición de homogeneidad) y la desigualdad triangular $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

En efecto, pongamos $\rho(t^P x) = s$; como $\rho(t^P x) = t_{t^P x}$ tal que $t_{t^P x}^{-P} t^P x \in S^{n-1}$ se tiene que $s^{-P} t^P x \in S^{n-1}$ o $\left(\frac{t}{s}\right)^P x \in S^{n-1}$.
Tenemos $s = t\rho(x)$ ya que esto es equivalente a $\frac{s}{t} = \rho(x)$, esto es, $\frac{s}{t} = t_x$ tal que $t_x^{-P} x \in S^{n-1}$.
Por lo tanto, $\left(\frac{s}{t}\right)^P x = t_x^P x$ o $\left(\frac{t}{s}\right)^P x = t_x^{-P} x$ y como $t_x^{-P} x \in S^{n-1}$ concluímos que $s = t\rho(x)$ es equivalente a decir que $\left(\frac{t}{s}\right)^P x \in S^{n-1}$, lo que ya fue probado antes.

Veamos ahora la desigualdad triangular $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ [7].
Por comodidad pongamos $x = x_1$, $y = x_2$; $t_1 = \rho(x_1)$. Luego $t_1 = t_{x_1}$ con $t_{x_1}^{-P} x_1 \in S^{n-1}$ o $t_1^{-P} x_1 = x_1' \in S^{n-1}$ y $x_1 = t_1^P x_1'$.
En forma similar, si ponemos $t_2 = \rho(x_2)$ entonces $t_2 = t_{x_2}$ con $t_2^{-P} x_2 \in S^{n-1}$ o $t_2^{-P} x_2 = x_2' \in S^{n-1}$, y $x_2 = t_2^P x_2'$.
Además, si $t_3 = \rho(x_1 + x_2)$ y llamando $x_3 = x_1 + x_2$ tendremos $t_3 = t_{x_3}$ con $t_3^{-P} x_3 = x_3' \in S^{n-1}$, de donde $x_3 = t_3^P x_3'$. Luego, $t_1^P x_1' + t_2^P x_2' = t_3 x_3'$.
Ahora se observa que la tesis es equivalente a probar que $t_3 \leq t_1 + t_2$.
Por el absurdo, supongamos que $t_3 > t_1 + t_2$; entonces tendríamos:
$1 = \|x_3'\| = \|\left(\frac{t_1}{t_3}\right)^P x_1' + \left(\frac{t_2}{t_3}\right)^P x_2'\| \leq \frac{t_1}{t_3} + \frac{t_2}{t_3} < 1$, algo no posible.
Esto prueba (c).

Nota. Se observa que $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ es más general que la desigualdad vista en el lema 1. Remarcamos que (b) y (c) nos dicen que dado $x \neq 0$, $\rho(x)$ es por definición el único $t_x$que satisface

$$\|t_x^{-P} x\| = 1.$$

(d). El siguiente resultado, debido a Torchinsky[7], caracteriza a los grupos $\{t^P\}$, para los cuales se tiene una condición suficiente para definir a la métrica $\rho(x)$.

$(\ , \ )$ indica el producto interno familiar en $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.1. *Se cumple*

$$\|t^P x\| \le t\|x\|,\ 0 < t \le 1,\ x \in \mathbb{R}^n \qquad \Leftrightarrow \qquad (Px, x) \ge (x, x),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Prueba. $(\Rightarrow)$. Sea $f(t) = \|t^P x\|^2 - t^2\|x\|^2$, luego $f(t) \le 0$ para $0 < t < 1$, $f(t) = 0$ para $t = 1$, $f(t) \ge 0$ para $t > 1$; ya que $\frac{\|t^P x\|}{t} \ge \frac{\|1^P x\|}{1}$, se tiene $\|t^P x\|^2 \ge t^2\|x\|^2$, luego se debe tener $\frac{d}{dt} f(t)|_{t=1} \ge 0$.
Desde que $\frac{d}{dt}\|t^P x\|^2 = \frac{2}{t}(Pt^P x, t^P x)$ se obtiene

$$0 \le \frac{d}{dt} f(t)|_{t=1} = \frac{2}{t}(Pt^P x, t^P x) - 2t(x, x)|_{t=1} = 2(Px, x) - 2(x, x),$$

de donde se tiene la tesis.

$(\Leftarrow)$. Pongamos $g(t) = \|t^P x\|^2$, entonces

$$\frac{d}{dt} g(t) = \frac{2}{t}(Pt^P x, t^P x) \ge \frac{2}{t}(t^P x, t^P x) = \frac{2}{t}\|t^P x\|^2 = \frac{2}{t} g(t).$$

De esta desigualdad se obtiene para $0 < s \le 1$,

$$\int_s^1 \frac{g'(t)}{g(t)} dt \ge 2\log\left(\frac{1}{s}\right),$$

lo que implica

$$\log\left(\frac{g(1)}{g(s)}\right) = \log\left(\frac{\|x\|^2}{\|s^P x\|^2}\right) \ge \log\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

de donde $s^2\|x\|^2 \ge \|s^P x\|^2$, por tanto se tiene la tesis para $0 < s \le 1$. □

Consecuencias del lema 2.1:

(i). Si $(P^* x, x) = (x, Px) = (Px, x)$, entonces $(Px, x) \ge (x, x)$ implica que $\{t^{P^*}\}_{t>0}$ también satisface $\|t^{P^*} x\| \le t\|x\|$, $0 < t \le 1$, $x \in \mathbb{R}^n$.
De esta manera $\{t^{P^*}\}$ determina una función $\rho^*(x)$, la cual tiene propiedades análogas a las de $\rho(x)$. Si γ es la traza de P, entonces se tiene $\det t^P = \det t^{P^*} = t^\gamma$.

(ii). Pongamos $S = \frac{P+P^*}{2}$, entonces

$$(Sx, x) = \left(\frac{P + P^*}{2} x, x\right) = \left(\frac{P}{2} x, x\right) + \left(\frac{P^*}{2} x, x\right) = \frac{1}{2}(Px, x) + \frac{1}{2}(Px, x) = (Px, x).$$

Luego, $\|t^P x\| \le t\|x\|$ es equivalente al hecho de que el más pequeño valor propio de S será ≥ 1.
En efecto, $\|t^P x\| < t\|x\| \leftrightarrow (Px, x) \ge (x, x) \leftrightarrow (Sx, x) \ge (x, x)$. Luego, si λ es un valor propio de S, tendremos $\lambda \ge 1$.

(e). (i). $A_t P = PA_t$, desde que $PA_t = e^{\log P + P\log t} = A_t P$.

(ii). $t\frac{d}{dt} A_t = PA_t$, desde que $t\frac{d}{dt} A_t = t\frac{d}{dt} e^{P\log t} = A_t P = PA_t$.

(f). Si $t^\alpha\|x\| \le \|A_t x\| \le t^\beta\|x\|$, $1 \le \alpha \le \beta$, $t \ge 1$ $\qquad (+)$
entonces $t^\beta\|y\| \le \|A_t y\| \le t^\alpha\|y\|$, $t \le 1$ (y a ser determinado).
En efecto, $t \le 1 \leftrightarrow t^{-1} \ge 1$, luego si $1 \le \alpha \le \beta$ se tiene $(t^{-1})^\alpha\|x\| \le \|A_{t^{-1}} x\| \le (t^{-1})^\beta\|x\|$; si ponemos $A_{t^{-1}} x = y$, $A_t y = x$ y se tiene la tesis.

Nota. Posteriormente asumiremos la relación $(+)$. Remarcamos que la introducción de la métrica parabólica fue usada intensivamente por Calderón-Torchinsky [2],quiénes reconstruyeron en base a tal métrica áreas fundamentales del análisis. Por otro lado, la topología inducida por $\rho(x)$ coincide con la topología familiar de $\mathbb{R}^n$.

Recalcamos que por definición, $\|\rho^{-P}(x)\| \equiv \|A^{-1}_{\rho(x)}x\| \equiv \|A_{\rho^{-1}(x)}x\| = 1$.

(g). (i). $\rho(x) \leq 1$ si y solo si $\|x\| \leq 1$.

(ii). $\rho(x)^\beta \leq \|x\| \leq \rho(x)^\alpha$ si $\|x\| \leq 1$ o $\rho(x) \leq 1$.

(iii). $\rho(x)^\alpha \leq \|x\| \leq \rho(x)^\beta$ si $\|x\| \geq 1$ o $\rho(x) \geq 1$.

En efecto,

(i). $\rho(x) \leq 1$ si y solo si $\|A_1 x\| \leq 1$ si y solo si $\|x\| \leq 1$.

(ii). Si $\rho(x) \leq 1$ (o $\|x\| \leq 1$ por (i)), por (f) tenemos $\rho^\beta(x)\|y\| \leq \|A_{\rho(x)}y\| \leq \rho^\alpha(x)\|y\|$.
Pongamos $x = A_{\rho(x)}y$, entonces $A_{\rho^{-1}(x)}x = y$, de donde $\rho^\beta(x)\|A_{\rho^{-1}(x)}x\| \leq \|x\| \leq \rho^\alpha(x)\|A_{\rho^{-1}(x)}x\|$, lo que implica la tesis.

(iii). Sigue en forma similar a (ii).

Agradecimiento. El autor expresa su agradecimiento al Profesor Alberto Torchinsky de la Universidad de Indiana por motivarnos oportunamente a elaborar el presente trabajo.

Referencias

[1] Calderón, A.P. *Integrales Singulares y sus Aplicaciones a Ecuaciones Diferenciales Hiperbólicas*. Univ. de Buenos Aires. 1960.

[2] Calderón,A.P.; Torchinsky, A. *Parabolic Maximal Functions Associated with a Distribution*. Adv. in Math. I. 1975. Adv. in Math. II. 1977.

[3] Fabes, E.B.; Riviere, N.M. *Singular Integrals with Mixed Homogeneity*. Studia Math. 19-38- 1966.

[4] De Guzmán, M. *Singular Integral Operators with Generalized Homogeneity*. Rev. Acad. C. Madrid. 1970.

[5] Ortiz,A. *Operadores Integrales Singulares*. Dpto. Matemática. UNT. Trujillo, Perú, 1972.

[6] Riviere,N. *Singular Integrals and Multiplier Operators*. Ark. Mat. 9. 1971.

[7] Torchinsky,A. *Singular Integrals in the spaces* $\Lambda(B, X)$. Studia Math. 47. 1973.