Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 04(02): 230 - 241 (2017)

Alberto P. Calderón. Teoría del Potencial e Integrales Singulares. Una Perspectiva Histórica

Alberto P. Calderón. Theory of Potential and Singular Integrals. A Historical Perspective

Alejandro Ortiz Fernández*

Received, Set. 30, 2017 *Accepted, Dic. 03, 2017*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2017.02.10

Resumen

Este artículo está dedicado a dar una visión crítica-histórica sobre las contribuciones del gran matemático Alberto Calderón en la teoría clásica del potencial y en las integrales singulares. En general, el trabajo de Calderón fue central en el análisis armónico en la segunda mitad del siglo XX por la profundidad, alta originalidad y por la belleza de sus trabajos.

Palabras clave. Alberto Calderón, Teoría del Potencial, Integrales Singulares.

Abstract

This article is dedicated to give an historical critique vision about the contribution of the great mathematician Alberto P. Calderon on potential classical theory and on the singular integrals. In general, Calderon's work was central in harmonic analysis in the second half of 20th Century because of it's deepness, high originality and beauty of his Works.

Keywords. Alberto Calderón, Theory of Potential, Singular Integrals.

1. Introducción. Don Alberto Pedro Calderón nació en Mendoza, Argentina, en 1920. Sus padres lo enviaron a Suiza para que haga sus primeros estudios; joven regresa a Buenos Aires donde estudió ingeniería los que termina en 1947. Pero, ya por esa época su vocación por la matemática se va consolidando y es en la universidad de Buenos Aires donde encuentra un adecuado ambiente para desarrollar su gran capacidad matemática. En efecto, los profesores J. Rey Pastor, Alberto González Domínguez, Luis Santaló, lo estimulan y orientan en su inicial carrera matemática. En 1948 el prestigioso analista polaco Anthoni Zygmund, una autoridad en series trigonométricas, es invitado por la universidad para dictar un curso sobre integrales de Fourier; los oyentes son los profesores de la Facultad, también asiste Calderón. Zygmund, gran Maestro, pronto descubre las profundas ideas del joven ingeniero y lo invita para que estudie en la Universidad de Chicago bajo su orientación. En efecto, Calderón en el período 1948-50 escribe cinco artículos sobre análisis armónico que le sirvió para obtener su Ph. D. en 1950. A partir de entonces se va a iniciar una brillante carrera científica del más alto nivel. De 1950 a 1953 es profesor visitante en la Universidad de Ohio y en el período 1953-1955 está en el Instituto de Estudios Avanzados en Princeton; de 1955 a 1959 es investigador en el Instituto Tecnológico de Massachusetts.

Por su prestigio de gran matemático, Calderón fue profesor visitante en diversas universidades del mundo como las de Cornell, Stanford, Bogotá, College de Francia, Sorbona (Paris), Autónoma de Madrid; en la Universidad Complutense, la de Roma, en Gottingen. De 1968 a 1972 fue profesor "Louis Block.en la Universidad de Chicago, así como de 1975 a 1985; en 1975 fue Profesor Honorario de la Universidad de Buenos Aires. Por su alto prestigio como profundo matemático Calderón recibido diversos premios y homenajes; recibió grados honoríficos por diversas universidades. Así, en 1957 la American Academy of Arts and Sciences"lo incorpora; en 1969 la Universidad de Buenos Aires lo nombró Doctor Honoris Causa; en 1988 recibió el premio Çonsagración Nacional en Ciencias". En 1989 la American Mathematical Society le otorgó el premio Steele y el Instituto Technion de Israel le otorga el grado de Doctor Honoris Causa. El 1991 fue reconocido con la más alta distinción, el presidente George Bush le

*Pontificia Universidad Católica del Perú, Sección Matemática, Perú (jortiz@pucp.edu.pe).

entregó la Medalla Nacional de Ciencias de los Estados Unidos, por su original y profundo trabajo que relaciona los operadores integrales singulares con la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales.

Calderón escribió alrededor de 87 trabajos de alta originalidad, profundidad y belleza, muchos de los cuales eran fronteras hacia nuevos conocimientos y métodos matemáticos abriendo así nuevos horizontes de investigación, muchos de ellos realizados por quienes fueron sus alumnos. Por estos y otros méritos Calderón integró la primera delegación norteamericana de intercambio matemático con la antigua Unión Soviética. Con motivo de la IV Escuela Latinoamericana de Matemática celebrada en Lima, Calderón nos visitó y ofreció una conferencia magistral sobre recientes investigaciones en el análisis armónico.

Don Alberto P. Calderón, uno de los matemáticos más influyentes del siglo XX falleció en Chicago el 16 de abril de 1998. Félix Browder, ex-profesor de la Universidad de Chicago, dijo con motivo de su fallecimiento:

Calderón fue uno de los más originales y profundos analistas de los últimos 50 años.

FIGURA 1.1. *Alberto P. Calderón*

2. Teoría del Potencial. Proyecciones. Cómo sabemos Zygmund ofreció un curso sobre análisis de Fourier en la Universidad de Buenos Aires en el año académico 1948-49 y fue la oportunidad para que el maestro Zygmund descubriera el gran potencial matemático del joven ingeniero Calderón y ofrecerle que estudia en Chicago bajo su dirección y así, en un año tiene su doctorado en 1950 época en que salen publicados sus tres artículos:

- On the Theorems of M. Riesz and Zygmund
- On the Behaviour of Harmonic Functions on the Boundary
- On a Theorem of Marcinkiewics and Zygmund. Además en co autoría con Zygmund son publicados
- On the Theorem of Hausdorff-Young and its Extensions
- Note on the Boundary Values of Functions of Several Complex Variables

Estos trabajos habrían de ser pioneros de posteriores investigaciones muchos de ellos relacionados con áreas centrales del análisis armónico. En particular, el trabajo (ii) habría de enriquecer el área llamada teoría del potencial la cual contiene diversas ideas y métodos del análisis clásico relacionados con problemas de valor de contorno que surgen en el campo de la física. Brevemente el punto de partida es el teorema de Fatou (1906) que afirma:

Si $u(z)$ es una función armónica y limitada sobre $|z| < 1$, entonces u tiene un límite no-tangencial sobre todo punto $e^{i\theta}$? $c.t.p.$ de la frontera

En otras palabras, si tenemos un triángulo (un cono en general) con vértice en $e^{i\theta}$? (punto frontera de la bola unitaria), entonces el límite de $u(z)$ existe si z, estando en el triángulo, converge a $e^{i\theta}$?. Por otro lado, el saber cómo los puntos en un dominio D converge a un punto de la frontera está relacionado con el clásico **problema de Dirichlet**.

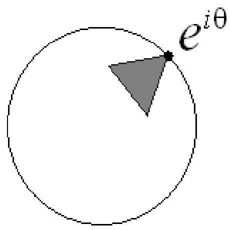

FIGURA 2.1. *Circulo triángulo*

$$\lim_{X \to Q} u(X) = f(Q)$$

En su trabajo (On the Behaviour of Harmonic Functions on the Boundary) Calderón estudia un problema propuesto por Zygmund el cual consiste sobre el comportamiento de las funciones armónicas en la frontera de un adecuado dominio (trabajo culminado en diciembre 1948). Calderón se propone probar un resultado de Priwaloff (1923) para el caso n-variables; como ilustración mencionemos el resultado obtenido:

Sea $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ el semi-espacio superior con frontera $\mathbb{R}^n$?. Si u es una función armónica sobre $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ y E es un conjunto de medida positiva en $\mathbb{R}^n$? tal que para todo $Q \in E$? existe un cono Γ_α?? tal que

$$\sup_{(x,t)\in\Gamma_Q} |u(x,t)| < \infty$$

entonces $c.t.p\ Q \in E$, u tiene un límite no tangencial.

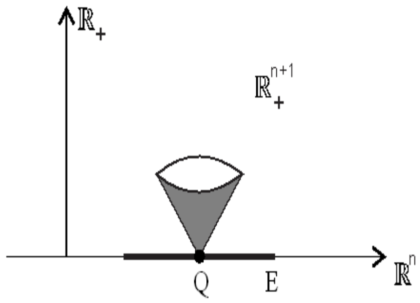

FIGURA 2.2. *Cono*

Así, Calderón probó que si u es una función armónica sobre $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ y es limitada sobre un cono truncado $\Gamma(x)$? con vértice en $x \in E$?. dónde E es un conjunto medible en $\mathbb{R}^n$?, entonces u tiene un límite no-tangencial para casi todo $x \in E$?. En otras palabras Calderón verifica que si:

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x,t)\ es\ limitada\ sobre\, \Gamma(x)\}$$

$$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : existe\ \lim_{t\to 0} u(x,t),\ cuando\, (x,t) \in \Gamma(x)\}$$

entonces $E_1 = E_2$, salvo un conjunto de medida nula. Esto implica que también se tiene: *si es una función armónica sobre* $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ *y* E *es un conjunto de medida positiva en* $\mathbb{R}^n$ *tal que para todo* $x \in E$ *existe un cono* $Gamma(x)$ *tal que*

$$\sup_{(x,t)\in\Gamma_Q} |u(x,t)| < \infty$$

entonces en casi todo punto de E, u tiene un límite no tangencial.

El citado trabajo de Calderón tuvo importantes proyecciones; así, L. Carleson [CAR] obtiene similares conclusiones que Calderón pero sólo exige que la función $u(x,t)$ sea limitada inferiormente sobre el cono $\Gamma(x)$, donde en general

$$\Gamma_\alpha(x_0) = \{(x,t) : |x - x_0| < \alpha t\}$$

es un cono con vértice en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y apertura $\alpha > 0$. En su trabajo aparece por primera vez la idea de medida armónica asociada al dominio ”dentado”

$$D = \bigcup_{x \in E} \Gamma_\alpha(x)$$

donde los conos son asumidos truncados y $E \subset \mathbb{R}^n$. Se verifica que D es un dominio de ”Lipschitz”(concepto que se definió después adecuadamente). El trabajo de Carleson abrió posteriores nuevas ideas como el ampliar la teoría para dominios más generales que $\mathbb{R}^{n+1}_+$ en donde la noción de convergencia no-tangencial tenga algún significado. Así, E. M. Stein en 1961 propuso llevar la teoría a espacios más amplios de lo que fue desarrollado por Hunt-Wheeden en 1968, quienes se proponen obtener resultados análogos, usando convergencia no-tangencial, pero ahora en el contexto de los dominios de Lipschitz en $\mathbb{R}^n$; estos dominios son tales que sus fronteras son ”parchadas”localmente con curvas de Lipschitz las cuales tienen cierto grado de regularidad y así se trata de evitar los puntos singulares o peligrosos que puedan existir (por ejemplo, un rectángulo es un dominio de Lipschitz).

La evolución del teorema de Fatou y la influencia de los trabajos de Calderón y Carleson, y sus conexiones con diferentes aspectos de la teoría del potencial clásico, fue investigado ampliamente en las décadas de los años 1970’s y 80’s, sobre todo en sus relaciones con el problema de Dirichlet; así Hunt-Wheeden estudiaron por primera vez los problemas de valor de contorno sobre los dominios de Lipschitz. Por otro lado, en los años 1976-78 el matemático sueco Bjorn Dahlberg desarrolla un ingenioso método para expresar la teoría del potencial en el contexto de los espacios de Lipschitz y de las medidas armónicas; así establece una relación entre una medida armónica w sobre un dominio de Lipschitz $D \subset \mathbb{R}^n$ con una medida de superficie σ. Así, si $E \subset \partial D$ es un conjunto de Borel, entonces

$$\omega(E) = 0 \; si \; y \; solo \; si \;\; : \sigma(E) = 0$$

Es decir, ω y σ son equivalentes sobre ∂D. Por otro lado, vía sus argumentos, Dahlberg estudia el problema de Dirichlet cuando el dado de contorno está en L^p.

Una cuestión, debida a ciertas dificultades analíticas, que se planteó desde la época de Marcinkiewicz-Zygmund (1938) y de Spencer (1943) fue encontrar otra caracterización para la existencia de límite no-tangencial de $u(x, t)$, lo que motivó el uso de las ideas de función integral área y la de función maximal no-tangencial. Así, para el círculo en el plano, Marcinkiewicz-Zygmund prueban la condición necesaria y Spencer la condición suficiente de la caracterización:

$u(z)$ tiene límite no-tangencial $c.t.d\theta$ en E sí y sólo si la integral área

$$A_\alpha(u)(e^{i\theta}) = \left(\int_{\Gamma_\alpha(e^{i\theta})} |\nabla u(x + iy)|^2 dxdy \right)^{1/2}$$

es finita $c.t.d\theta$ en E.

Posteriormente Calderón en [CAL.3] (1950) extiende parcialmente este resultado,

Si u es una función armónica limitada conos truncados con vértices en $E \subset \mathbb{R}^n = \partial\mathbb{R}^{n+1}$, entonces la función en integral de área

$$A_\alpha(u)(e^{i\theta}) = \left(\int_{\Gamma_\alpha(e^{i\theta})} dist(Q, \mathbb{R}^n)^{1-n} |\nabla u(x)|^2 dQ \right)^{1/2}$$

es finita $c.t.dx$ en E.

De esta manera quedaba abierto probar la condición suficiente lo que fue logrado por E. M. Stein en 1961. Este ambiente motivó otras investigaciones debidas, entre otras, a Burkholder, Gundy, R. Wheeden, en esta dirección en 1978 Dahlberg investiga la función integral área en relación con la función maximal no-tangencial sobre dominios de Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ y de esta manera extiende diversos resultados previos.

Precisemos algunas ideas. Si D es un dominio de Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ y asumamos que para cada $P \in \partial D$ le está asociado un cono abierto $\Gamma(P)$ con vértice en P y tal que $\Gamma(P) \subset D$. Si u es una función armónica en D entonces la función integral área es definida vía,

$$A(u,P) = \left(\int_{\Gamma(P)} |P-Q|^{2-n} |\nabla u(Q)|^2 dm(Q) \right)^{1/2}$$

y la función maximal no-tangencial vía,

$$N(u,P) = \sup_{\Gamma(P)} |u(Q)|$$

donde

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

y m es la medida de Lebesgue.

Así mismo, el trabajo de Dahlberg también incluye investigaciones relacionadas con el comportamiento radial sobre la frontera de funciones subarmónicas de Lipschitz, así como estudia los potenciales de Green en tales dominios.

3. El Problema de Neumann y otros tipos de dominios. Los trabajos de Calderón y los realizados junto con A. Zygmund, marcaron una época y constituye lo esencial de la Escuela de Análisis Çalderón-Zygmund"de Chicago. En efecto, muchos de los alumnos de esta Escuela continuaron aportando nuevos resultados métodos y teorías en el campo del análisis armónico y de las ecuaciones en derivadas parciales. Una amplia información y biografía en esta dirección puede verse en la publicación de Carlos E. Kenig [KEN] y de Alberto Torchinsky [TOR], capítulo $XVII$, ambos de la escuela Calderón-Zygmund. En esta ruta otro clásico problema investigado en el contexto de los problemas de valor de contorno es el problema de Neumann que consiste en:

Dada una función continua g sobre ∂D, encontrar una función $u \in C^1(\overline{D})$ tal que

$$\begin{aligned} &\triangle u = 0, \quad en\ D \\ &\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad sobre\ \partial D \end{aligned}$$

donde n es la normal unitaria interior a ∂D.

En esta dirección Dahlberg usando ciertas estimativas para la medida armónica resuelve el problema de Dirichlet con dado de contorno $f \in L^p(\partial D, d\sigma)$ para $p \geq 2$ si D es un dominio de Lipschitz, y para $p > 1$ si Des un dominio C^1, pero su método parece no funcionar para resolver el problema de Neumann sobre tales dominios y de esta manera hubo necesidad de otras contribuciones. Precisemos tales dominios.

Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde φ es llamada una función de Lipschitz si

$$|\varphi(x) - \varphi(x^{'})| \leq M|x - x^{'}|$$

si existe tal constante M.

Un dominio limitado $D \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un dominio de Lipschitz si a cada punto $Q \in \partial D$ le corresponde un sistema de coordenadas local $(x,t), x \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}$ así como una vecindad N de Q (una bola con centro Q, ó un cilindro circular recto con centro Q) tal que

$$N \cap D = N \cap \{(x,t) : t > \varphi(x)\}$$

$$N \cap D = N \cap \{(x,t) : t = \varphi(x)\}$$

donde φ es una función de Lipschitz.

Desde que ∂D es compacto, se puede determinar un número finito de tales funciones "parches"$\varphi' s$.

Si las funciones Lipschitz $\varphi' s$ fueran, además, asumidas continuamente diferenciables, entonces D es llamado un dominio C^1. Además, si aún tuviéramos que el gradiente $\nabla \varphi$ satisface

$$|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(x^{'})| \leq M|x - x^{'}|^{\alpha}$$

entonces D es llamado un dominio $C^{1,\alpha}$

Por razones de completitud de conceptos usados precisemos la noción de medida armónica (ya mencionada antes) en el contexto que estamos interesados. Sea D un dominio de Lipschitz y f una función continua sobre ∂D. Sea Hf la solución del problema de Dirichlet con dado de contorno f. Sea $P \in D$, entonces la aplicación $f \in Hf(P)$ es una funcional lineal continua sobre $C(\partial D)$; luego, por el teorema de la representación de F. Riesz existe una única medida de Borel w^P sobre ∂D tal que

$$Hf(P) = \int_{\partial D} f(Q)dw^P(Q) \tag{3.1}$$

w^P es llamada medida armónica para D evaluada en P. Si E es un conjunto de Borel en ∂D, $w^P(E)$ es su medida armónica, y es una función armónica sobre D. Por otro lado, si $w^{P_0}(E) = 0$, entonces por el principio del máximo se tiene que $w^P(E) = 0$ para todo P. Si $w^P(E) = 0$ diremos que E es un conjunto con medida armónica cero en D. Con estas ideas, la representación (3.1) es llamada la integral de Poisson de f, y $u(P) = Hf(P)$ es la solución generalizada del problema de Dirichlet para f y se tiene

$$\lim_{P\to Q} u(P) = f(Q)$$

ó

$$\lim_{P\to Q} \int_{\partial D} f(Q)dw^P(Q) = f(Q)$$

Con tal información básica digamos que las investigaciones sobre cuestiones relacionadas a los problemas de valor de contorno continuó, así, Fabes-Jodeit-Riviere en 1978 vuelven el clásico método de las camadas de potenciales para resolver problemas de valor de contorno usando dominios C^1, en particular resuelven el problema de Neumann dejando abierta la cuestión de saber si el método de las camadas funciona para resolver los problemas de Dirichlet y de Neumann sobre dominios de Lipschitz. Para mayor información ver [FAB-JOD-RIV]. En esta dirección David Jerison-Carlos Kenig logran resolver el problema de Neumann para dominios de Lipschitz en 1981 ([JER-KEN. 1]):

Si $g \in L^2(d\sigma)$ con $\int_{\partial D} gd\sigma$, entonces existe una única función u tal que

$$\begin{aligned} \triangle u = 0, &\quad en\ D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g &\quad sobre\ \partial D \end{aligned}$$

Además

$$\int_{\partial D} ud\sigma = 0$$

y

$$\|N(\nabla u)\|_{L^2(d\sigma)} \leq C\|g\|_{L^2(d\sigma)}$$

donde $N(v)$ es una función maximal no-tangencial de v sobre D.

Jerison-Kenig consideran otros tipos de dominios como los amplios ”Dominios no-tangencialmente accesibles”(NTA), los que incluyen a los dominios de Lipschitz y otros clásicos dominios (cómo son los llamados ”dominios de Zygmund”). Ellos extienden, por ejemplo, al teorema de Fatou para dominios NTA. Así mismo, Jerison-Kenig en [JER-KEN.2] (1982) extienden a los dominios NTA resultados sobre el comportamiento en la frontera de funciones armónicas en tales dominios. Así mismo, y motivados por la importancia de la teoría de los dominios de Lipschitz, Fabes-Neri estudian el problema de Dirichlet con datos de contorno en el espacio BMO (espacios con oscilación media acotada) sobre un dominio de Lipschitz lo cual es hecho primero en el caso $n = 2$ [FAB-NER.1] y después en el caso general [FAB-NER.2]. Terminamos esta sección con el anuncio que hicieron A.P. Calderón, C.P. Calderón, Fabes, M. Jodeit y N. M. Riviere (1978) sobre algunos progresos en análisis armónico, en particular resuelven el problema de Dirichlet y el problema de Neumann vía camadas doble y simple respectivamente. [CAL-otros].

4. Integrales Singulares. Proyecciones. (1) Una Vivencia Personal. Alrededor de 1972 Trujillo era una ciudad tranquila que aún conservaba sus clásicas costumbres y se llevaba una vida relativamente calma. Su Universidad, la Universidad Nacional de Trujillo, era el centro motor que dinamizaba a la ciudad, surgía una nueva clase de jóvenes aspirantes a superar sus propios status sociales y económicos. Dentro de este panorama, la matemática tenía un promedio de diez años de existencia y su nivel académico era bajo, con vacíos fundamentales, pero si poseía algunos jóvenes profesores que aspiraban a mejorar esta situación. Nos tocó la oportunidad de hacer estudios de posgrado primero en Brasilia, luego en Chicago. A nuestro regreso, fines de 1970, concebimos la idea, la tarea de difundir en nuestra Universidad, y a través de ella a todo el país, la matemática cultivada por la Escuela de Calderón-Zygmund sobre la teoría de integrales singulares, tarea que fue hecha con dificultades y limitaciones.

”Los operadores integrales singulares pueden ser concebidos como entes híbridos o intermedios entre los diferenciales y los integrables”. **Alberto P. Calderón**

Fue así que apareció en 1972 nuestra publicación Operadores Integrales Singulares, [ORT.1], la que gustó a especialistas del extranjero, en particular a los profesores Zygmund y Calderón.

Sin embargo, posiblemente por el desnivel entre el contenido de la publicación citada con la realidad académica que teníamos entonces, ella permaneció desconocida y olvidada, creo hasta la actualidad. En un intento por rescatar una bella y profunda teoría cómo es la de Calderón-Zygmund es que en el 2010 publicamos Integrales Singulares. La Escuela de Chicago, [ORT.2], cuando ya éramos profesor en la Pontificia Universidad Católica del Perú; esta publicación está también inédita. Ahora surge la posibilidad, a través de esta revista electrónica de la UNT, de difundir algunos aspectos de la obra del gran matemático, como fue Don Alberto P. Calderón.?

(2) **Breve Historia**. Inicialmente una integral singular, de tipo convolución, es de la forma

$$v.p. \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy$$

donde k es un apropiado núcleo; o aún tenemos un operador integral singular de tipo convolución

$$Tf(x) = cf(x) + v.p. \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy$$

Estos operadores, así como los operadores diferenciales y los operadores integrales juegan un papel importante en diversas áreas de la matemática (aplicada). A inicios del siglo XX F. Riesz considera operadores integrales y plantea bajo ciertas condiciones resolver la ecuación $Tf(x) = g(x)$, donde $f(x)$ es una función incógnita y $g(x)$ es dada. Por otro lado, los operadores integrales lineales son de vital utilidad; ellos son estables pero carecen de un sencillo cálculo funcional. En este panorama los operadores integrales singulares están entre los operadores diferenciales y los operadores integrales pues son lineales y las expresiones a integrar conducen integrales divergentes; a ellos se les define como límites de integrales familiares. Los operadores integrales singulares comparten las buenas propiedades de los operadores diferenciales así como de los operadores integrales, y tienen un cálculo funcional que es general y flexible! Pero, ¿cómo surgieron estos operadores integrales singulares?

Es consenso, incluyendo la opinión del profesor Calderón, que los siguientes clásicos problemas motivaron las primeras investigaciones sobre las integrales singulares: Sea D un dominio acotado del plano complejo, simplemente conexo, cuya frontera ∂D es suficientemente regular y sea Dc su complemento. Entonces si tienen los problemas,

1. (Hilbert, 1904). Encontrar una función analítica $F(z) = u + iv$ en D tal que $au + bv = f$ sobre ∂D, donde a, b y f son funciones reales sobre ∂D.
2. (Hilbert, 1905). Encontrar dos funciones analíticas F en D y G en Dc tales que $F = fG$ sobre ∂D, donde f es una función con valores complejos en ∂D.
3. (Plemelj, 1908). Encontrar F y G como en (2) donde $G \to 0$ en el infinito tal que $F - G = f$ sobre ∂D, donde f es una función dada con valor complejo sobre ∂D.
4. (Poincaré, 1910). Hallar una función armónica u en D tal que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \; sobre \; \partial D$$

donde f es una función dada sobre ∂D y n es un campo de vectores transversal a ∂D. Este problema es conocido como el *problema de la derivada oblicua*.

Es oportuno observar que Plemelj al resolver el problema (3) nos ilustra como intervienen las integrales singulares; así considera la siguiente integral sobre ∂D,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\phi(s)}{s-z}ds$$

donde ϕ es una función sobre ∂D, $z\in D$ ó $z\in D_c$, y da una función analítica F en D y otra función analítica G en D_c la cual tiende a cero en el infinito.

Se observó que si ϕ está en la clase Lipschitz Λ_α $[si\ 0<\alpha<1, f\in\Lambda_\alpha]$ si $f(x)$ es una función acotada en $\mathbb{R}^n$, esto es, si $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y satisface

$$w_\infty(t)=\|f(x+t)-f(x)\|_{L^\infty}\leq A|t|^\alpha$$

entonces ϕ tiene límites en ∂D los que están dados por ([CAL. 4]).

$$F(t)=\frac{1}{2}\phi(t)+\frac{1}{2\pi i}v.p.\int_{\partial D}\frac{\phi(s)}{s-t}ds$$
$$G(t)=-\frac{1}{2}\phi(t)+\frac{1}{2\pi i}v.p.\int_{\partial D}\frac{\phi(s)}{s-t}ds$$

donde la integral es entendida como valor principal y es una integral singular. Además, si $\phi(s)=f(x)$ se observa que $F-G=f$, lo cual resuelve el problema (3). Se observa también que si D fuera un semi-plano entonces el operador.

$$(H\phi)(t)=\frac{1}{\pi i}v.p.\int_{\partial D}\frac{\phi(s)}{s-t}ds$$

es llamado la **transformada de Hilbert**, la que es una clásica integral singular y fue el punto de partida de la teoría de Calderón-Zygmund sobre integrales singulares en $\mathbb{R}^n$ También se observó que $H=H^{-1}$, esto es $H^2=HH^{-1}=I$, operador identidad. Por otro lado, la solución de los otros problemas conducen también a integrales singulares ([CAL.4]), más concretamente a ecuaciones integrales singulares del tipo

$$a(t)\phi(t)+b(t)(H\phi)(t)+K\phi=f(t)$$

donde $a(t)$, $b(t)$ y $f(t)$ son funciones dadas y K es un usual operador integral. El hecho de que $H^2=I$ ayuda a la solución de esta ecuación. [CAL.4] para mayores comentarios.

Las motivaciones históricas que estamos tratando son un poco similares a las tenidas en las investigaciones hechas en el siglo XIX sobre las series trigonométricas; así Peter G. Dirichlet en 1829 establece que si Snf es una suma parcial de una serie de Fourier, entonces ella tiene la interesante representación

$$S_Nf(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt$$

donde $(\sin kt)/(\sin t)$ el núcleo es llamado *núcleo de Dirichlet*. En esta dirección, R. Lipschitz da un criterio de convergencia para una serie trigonométrica cuando f es una función de *Lipschitz*; además Ulisse Dini establece que si $f\in L^1(-\pi,\pi)$ y si existe $\delta>0$ tal que

$$\int_{|t|<\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt<\infty$$

entonces

$$\lim_{N\to\infty}S_Nf(x)=f(x)$$

Pero esto, y otros interesantes resultados es otra historia!.

El operador de Hilbert H fue estudiado con cierta intensidad surgiendo la cuestión de saber sobre qué clase de funciones H es bien definido y continuo; así, Privaloff en 1916 establece que sobre el espacio de funciones

Γ_α, H actúa continuamente. Por otro lado, ¿cómo se comporta sobre los entonces recientes espacios de Lebesgue L_p, $1 < p < \infty$. En 1928 M. Riesz verifica que H es bien definido y continuo sobre tales espacios L_p; además, investiga la relación que existe entre las funciones analíticas con el operador H. Así mismo, un paso importante fue dado por A. Besicovitch (en 1926) y por E. C. Titchmarsh (en 1928) al introducir métodos de la variable real en el estudiado del operador de Hilbert H; así mismo, el primer intento por generalizar H a varias variables fue hecho por F. G. Tricomi en los años 1925 y 1928 quién considera operadores integrales de la forma

$$Tf(x) = v.p. \int h(x-y)f(y)dy \tag{4.1}$$

donde el operador T actúa sobre funciones de dos variables en el plano; además considera (!) que el núcleo $h(x)$ es una función homogénea de grado-2 ($k(x)$ es homogénea de $grado - n$ si $k(\lambda x) = \lambda^{-n}k(x)$ para todo $\lambda > 0$); además, Tricomi proporciona un método para construir un operador S del mismo tipo tal que $ST = I$. Otra importante contribución fue dada por G. Giraud quien en 1934 investiga los operadores integrales singulares sobre variedades diferenciables, prueba la continuidad del operador sobre los espacios Γ_α pero, aún su trabajo no es lo suficientemente completo para dar la condición que permita reducir las ecuaciones integrales singulares a ecuaciones de tipo Fredholm, condición que fue hallada por S. G. Mihlin en 1936 al introducir la noción de *símbolo* asociado al operador, noción que habría de jugar un importante papel en posteriores investigaciones de las integrales singulares. Así, al operador T definido por (4.1) se le asocia su símbolo, el cuál es la función $\sum a_n r_n e^{in\theta}$, donde $\sum a_n e^{in\theta}$ es la serie de Fourier de $h(e^{in\theta})$ restringida a la circunferencia unitaria; r_n son adecuadas constantes. Mihlin verifica que el símbolo de la composición de dos operadores del tipo considerado es igual al producto de los símbolos correspondientes, con lo cual Mihlin pudo resolver la cuestión de hallar el inverso de este tipo de operadores y también pudo reducir una ecuación integral singular a ecuaciones de tipo Fredholm en donde existe una adecuada teoría a ser usada.

El paso siguiente lo dió Giraud al generalizar la idea de Mihlin el caso n-dimensional pero la naturaleza del símbolo siguió siendo no completamente claro para este tipo de operadores de convolución. Así hasta 1952!

Aún caminemos hacia la transformada de Hilbert

Sea $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ y $f(s,t)$ una función integrable; $\mathbb{R}^2_+$ el semi-espacio superior $z > 0$. Recordemos que el potencial newtoniano $U(x,y,z)$, con densidad $f(s,t)$, es definido siendo la integral

$$\int \frac{f(s,t)}{d} ds\, dt$$

donde $d^2 = (x-s)^2 + (y-t)^2 + z^2$.

Derivando U con respecto a x, y e z se obtiene

$$U_x(x,y,z) = -\int \frac{x-s}{d^3} f(s,t)ds\, dt$$
$$U_y(x,y,z) = -\int \frac{y-s}{d^3} f(s,t)ds\, dt$$
$$U_z(x,y,z) = -z\int \frac{f(s,t)}{d^3} f(s,t)ds\, dt$$

Ahora la idea es considerar $z \to 0$ en U_x para obtener

$$U_x(x,y,0) = -\int \frac{x-s}{\left[(x-s)^2 + (y-s)^2\right]^{3/2}} f(s,t)ds\, dt$$

Si ponemos $k(x,y) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, entonces U_x puede ser escrito en la forma,

$$\int k(x-s, y-s) f(s,t)ds\, dt$$

la que es una integral de tipo convolución y es similar a la integral singular

$$\int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy$$

Veamos otra situación la cual nos conducirá a la transformada de Hilbert. Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^1)$, es decir,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^p \, dx < \infty, \qquad 1 < p < \infty$$

y sea la función

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t - z} dt$$

donde $z = x + iy$, la cual es definida en el semi-espacio superior $y = Im(z) \geq 0$; se observa que $f(z)$ es bien definida por la desigualdad de Hölder y que

$$\frac{1}{t - z} \in L^{p'} \quad donde \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

También $f(z)$ es una función analítica en $Im(z) > 0$. Por otro lado tenemos,

$$\frac{1}{t - z} = \frac{t - x + iy}{(t - x)^2 + y^2} = \frac{iy}{(t - x)^2 + y^2} - \frac{x - t}{(t - x)^2 + y^2}$$

es decir,

$$\frac{1}{\pi i(t - z)} = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(t - x)^2 + y^2} + i \frac{1}{\pi} \frac{x - t}{(t - x)^2 + y^2}$$

Si ponemos

$$P_y(x) = \frac{1}{pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

llamado núcleo de Poisson, y

$$\widetilde{P}_y(x) = \frac{1}{pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

llamado núcleo de Poisson conjugado, se obtiene

$$\frac{1}{\pi i(t - z)} = P_y(x - t) + i\widetilde{P}_y(x - t)$$

y de esta manera se tendría

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x - t)u(t)dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{P}_y(x - t)u(t)dt = U(x, t) + iV(x, t)$$

$U(x, y)$ es llamado la integral de Poisson de u, y $V(x, y)$ es la integral conjugada de Poisson de u. Si se asume que u es de valor real, se verifica que U y V son funciones armónicas en $Im(z) > 0$. Además desde que $u \in Lp(\mathbb{R}^1)$ se tiene que

$$U(x, y) = (P_y * u)(x) \to u(x), \qquad c.t.p. \qquad si\, y \to 0^+$$

Esta convergencia podemos interpretarla como que la integral de Poisson $U(x, y)$ es la solución del problema de Dirichlet para el semi-espacio superior, con dado de contorno $u \in L^p, 1 < p < \infty$, sobre la frontera $y = 0$. Así mismo, desde que $u \in L^p(\mathbb{R}^1), 1 < p < \infty$ se obtiene

$$V(x, y) = (\widetilde{P}_y * u)(x) = (P_y * \widetilde{u})(x) \to \widetilde{u}(x) \qquad c.t.p\; si\; y \to 0^+$$

donde

$$\widetilde{u}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x - t| > \epsilon} \frac{u(t)}{x - t} dt$$

$\widetilde{u}(x)$ es llamada la transformada de Hilbert de $u(x)$ donde observamos la singularidad del núcleo en la diagonal $x = t$. Notación: $Hf = \widetilde{f}$, transformada de Hilbert de f.

(3) **Integrales Singulares en $\mathbb{R}^n$. Motivaciones**

Las primeras contribuciones hacia la generalización del operador de Hilbert H en el contexto de varias variables son debidas a F.G. Tricomi (1925, 1928) quien investiga operadores de la forma

(4.2) $$Tf(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^2} k(x-y)f(y)dy$$

para funciones definidas en el plano, en donde asume que $k(x)$ es una función homogénea de grado-2, esto es $k\lambda x = \lambda^{-2}k(x)\ \forall\ \lambda > 0$ y para $x \in \mathbb{R}^2$. Además logra construir un operador S del mismo tipo tal que $ST = I$, I la identidad. De esta manera Tricomi considera composiciones de tales operadores lo que le permite resolver la ecuación $Hf = g$. Por otro lado, G. Giraud investigó el problema de generalizar el método de estas integrales para resolver el problema de Poincaré (problema (4)) para el caso $n > 2$; así mismo en 1934 considera operadores integrales singulares sobre variedades diferenciables regulares cerradas de dimensión arbitraria, prueba que son continuas en espacios de Lipschitz, logra reducir las ecuaciones integrales singulares a ecuaciones integrales de tipo Fredholm pero aún no encuentra condiciones simples para lograr tal reducción. En esta ruta, un vital aporte fue dado por S. G. Mihlin en 1936 al asociar al aparador citado T la función $\sum a_n r_n e^{in\theta}$, que llamó símbolo como ya hemos mencionado antes. Fue importante observar que la relación entre los operadores $T's$ y sus símbolos es lineal y biunívoca. Si σT se denota el símbolo de T entonces se tiene

$$\sigma_{T_1 o T_2} = \sigma_{T_1} o \sigma_{T_2}$$

Con estos resultados Mihlin resuelve el problema de la inversión de los operadores T de tipo (4.2) así como la cuestión de la citada reducción. Giraud usa estas ideas para llevar a $\mathbb{R}^n$ la teoría de este tipo de operadores pero aún la naturaleza del símbolo tiene cierto misterio.

1952

Este año es histórico en la evolución de las integrales singulares pues se publicó [C-Z.3] de los profesores Calderón y Zygmund iniciando una hermosa teoría la cual tiene proyecciones hasta nuestros días. En tal trabajo quedó clarificado la noción de símbolo para operadores de tipo convolución. Así sea el operador definido sobre funciones de n variables

$$Tf(x) = cf(x) + v.p. \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy$$

donde $k(x)$ es una función homogénea de $grado - n$, con valor medio 0 sobre la esfera $|x| = 1$ y donde c es una constante entonces se tiene, $\sigma T = c + \widehat{k}(x)$. Según Calderón [CAL.4], él y el profesor Zygmund, motivados por la investigación de las propiedades de diferenciabilidad del potencial newtoniano, fueron conducidos a investigar a tales operadores y verificar que están bien definidos en los espacios L^P en dónde son operadores continuos si $1 < p < \infty$. [CAL-ZYG.3] fue un notable trabajo que estimuló mucho el interés por los operadores integrales singulares y muchos notables analistas le dedicaron atención, en particular los entonces estudiantes de Calderón y Zygmund. En 1972 salió nuestra publicación [ORT.1] en un intento por difundir la teoría de Calderón-Zygmund en nuestro país.

De un modo más general, en $\mathbb{R}^n$ se considera operadores integrales singulares de la forma

$$Tf(x) = a(x)f(x) + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-t|>\epsilon} k(x, x-y)f(y)dy$$

donde $a(x)$ pertenece a cierta clase de funciones acotadas con ciertas restricciones y donde

$$k(x, \lambda y) = \lambda^{-n}k(x,y) \int_{|y|=1} k(x,y)d\sigma = 0$$

donde $k(x,y)$ tiene ciertas condiciones de regularidad. El símbolo de T es definido siendo

$$\sigma_T(x, z^{'}) = a(x) + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon<|y|<\frac{1}{\epsilon}} e^{-iyz^{'}} k(x,y)dy$$

donde $z^{'} = \frac{z}{|z|}$. Se verifica que

$$\sigma_{T_1+T_2} = \sigma_{T_1} + \sigma_{T_2}$$

A partir del trabajo [CAL-ZYG.3] en los años siguientes Calderón-Zygmund publicaron diversos otros trabajos sobre la teoría de los operadores integrales singulares.

El lector interesado en mayores detalles debe consultar tales trabajos. Para una información local sugerimos consultar [ORT.1] y/o [ORT.2] para ciertos detalles de la teoría y sobre la bibliografía que existe en estos trabajos.

Referencias

[1] CALDERÓN, A.P, *On the theorems of M. Riesz and Zygmund*, Proc. A.M.S 533-5, 1950.
[2] CALDERÓN, A.P, *On the Behaviour of Harmonic Functions on the Boundary*, T.A.M.S, 68, 47-54, 1950.
[3] CALDERÓN, A.P, *On a theorems of Marchinkiewciz and Zygmund*, Proc. T.A.M.S 68, 55-61, 1950.
[4] CALDERÓN, A.P, *Integrales singulares y operadores seudo diferenciales historia y perspectiva*, Annal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fis. Nat. Bs. As, Tomo 38, 1986.
[5] CALDERÓN, A.P. AND ZYGMUND A., *On the Theorem of Hausdorff - Young and its Extensions*. Ann. Math. Studies. 25. 166-88, 1950.
[6] CALDERÓN, A.P. AND ZYGMUND A., *Note on the Boundary Values of Function of Several Complex Variables*. Ann. Math. Studies. 25. 144-65, 1950.
[7] CALDERÓN, A.P. AND ZYGMUND A., *On the Existence of Certain Singular Integrals*. Ann. Math. 88. 85-139, 1952.
[8] CALDERÓN, A.P. AND CALDERÓN C.P., *Applications of the Cauchy Integral on Lipschitz Curves*. Bull of the A.M.S Vol. 84, 1978.
[9] CARLESON L., *On the existence of Boundary Values for Harmonic Functions in Several Variables*. Ark. Math. 4. 393-399, 1962.
[10] FABES E. ANDA NERI U. , *Harmonic Functions with BMO Traves on Lipschitz Curves*. University of Maryland (Pre-Print), 1978.
[11] FABES E. AND NERI U. , *Dirichlet Problem with BMO Data in Lipschitz Domain*. Proc. Am. Math. Soc, 33-39, 1980.
[12] FABES E. AND JODEIT M. RIVIERE N. , *Potential Techniques for Boundary Value Problem on C^1 domains*. Acta Math. 141. 165-186, 1978.
[13] JERISON D. AND KENIG C. , *The Neumann Problem on Lipschitz Domains*. Bol. Amer. Soc. Vol. 4, 203-207, 1981.
[14] JERISON D. AND KENIG C. , *Boundary Behavior of Harmonic Functions in non-tangentially accessible domains*. Advances in Math. 80-147, 1982.
[15] KENIG CARLOS E., *Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Value Problems*. AMS, Nat. Scie. Foundation. CBMS 83, 1994.
[16] ORTIZ A. , *Operadores Integrales Singulares*. Dpto. Matemática. UNT. Trujillo, Perú, 1992.
[17] ORTIZ A. , *Integrales Singulares. La Escuela de Chicago*. Sección Matemática. PUCP. UNT. Lima, 2011.
[18] TORCHINSKY, A. , *Real-Variable Methdos in Harmonic Analysis*. Academic Press. Puer and Appl., Math. 123, 1986.