Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 04(02): 162 - 174 (2017)

# El problema de Cauchy para la ecuación de Korteweg-De Vries en espacios de Bourgain.

# The Cauchy problem for the Korteweg-De Vries equation in Bourgain's spaces.

Cesar Loza Rojas*

*Received, Jun. 18, 2017* *Accepted, oct. 27, 2017*

**DOI:** http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2017.02.03

**Resumen**

*En este artículo, estudiamos el problema de Cauchy a la ecuación de Korteweg-De Vries en $H^s$ con $s > -\frac{3}{4}$. Para ello utilizamos los espacios de Bourgain, $X_{s,b}$, y obtenemos buena formulación local al problema de Cauchy.*

**Palabras clave**.Teorema de existencia local y unicidad, transformaciones integrales, aplicaciones de EDP en áreas distintas de la física.

**Abstract**

*In this paper, we study Cauchy's problem to the Korteweg-De Vries equation in $H^s$ with $s > -\frac{3}{4}$. For this purpose we use the Bourgain spaces, $X_{s,b}$, and we get good local formulation to the Cauchy problem.*

**Keywords**. local existence and uniqueness theorems, integral transforms, applications of PDE in areas other than physics.

**1. Introducción.** En este artículo, tenemos como objetivo demostrar la buena fórmulación local del problema de Cauchy asociado a la ecuación de Korteweg-De Vries en $H^s$, con $s > -\frac{3}{4}$,

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + u^p(x,t)\,\partial_x u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

donde $p \in \mathbb{N}$.

La ecuación (1.1) en el caso $p = 1$, denominada ecuación de Korteweg-De Vries, [1], [5], [6], [7];ésta ecuación es un modelo de propagaciones de ondas débiles dispersivas no-lineales, [4], [9], [10], [11], [12]. Para establecer la buena formulación local para el PVI asociado a la ecuación de KdV, utilizaremos los espacios de la función $X_{s,b}$, denominados los espacios de Bourgain,[2].

Estos espacios de funciones, tienen una norma dada en términos cuyo símbolo, es el operador lineal asociado $\left(\text{en el caso } \partial_t + \partial_x^3\right)$, han sido muy útiles para comprender la interacción entre los efectos no-lineales y los efectos dispersivos. En este punto, las llamadas estimaciones bilineales, [8], desempeñan un papel principal para obtener resultados deseados.

*Departamento de Matemática;Facultad de Ciencias;Universidad Nacional San Luis Gonzaga, Av. Los Maestros s/n. Ica-Perú,e-mail:lozacr@gmail.com

**2. Los espacios de Bourgain.** En esta sección definimos los espacios de Bourgain [2], además de [3, pág 278] y [1] obtenemos

DEFINICIÓN 2.1. *Sean $s, b \in \mathbb{R}$, el espacio de Bourgain, denotado por $X_{s,b}$, es el subconjunto de $S'(\mathbb{R}^2)$ definido por*

$$X_{s,b} = \left\{ u \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^2\right) : \|u\|^2_{X_{s,b}} = \int_{\mathbb{R}^2} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \sigma \rangle^{2b} |\widehat{u}(\xi,\tau)|^2 \, d\xi \, d\tau < \infty \right\} \tag{2.1}$$

*donde $\sigma = \tau - \xi^3$ y $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|)$.*

Los espacios $X_{s,b}$ son espacios de Banach. Las siguientes propiedades de los espacios de Bourgain serán utilizadas en las siguientes demostraciones.

PROPOSICIÓN 2.1. *Si $s, b \in \mathbb{R}$, el espacio de Schwarts $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right)$ es denso en $X_{s,b}$.*

Demostración: *Sean $u \in X_{s,b}$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Consideremos la aplicación $v$ definida sobre $\mathbb{R}^2$, es decir*

$$\begin{aligned} v &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (\xi,\tau) &\mapsto v(\xi,\tau) = \widehat{u}\left(\xi, \tau + \xi^3\right) \end{aligned}$$

*entonces $v \in L^2\left(\langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2b} d\xi d\tau\right)$ pues*

$$\begin{aligned} \|v\|^2_{L^2\left(\langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2b} d\xi d\tau\right)} &= \int_{\mathbb{R}^2} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2b} |v(\xi,\tau)|^2 \, d\xi \, d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2b} \left|\widehat{u}\left(\xi, \tau + \xi^3\right)\right|^2 d\xi \, d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \langle \xi \rangle^{2s} \left\langle \tau - \xi^3 \right\rangle^{2b} |\widehat{u}(\xi,\tau')|^2 \, d\xi \, d\tau' = \|u\|^2_{s,b} < \infty. \end{aligned}$$

*Como el espacio $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right)$ es denso en $L^2\left(\langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2b} d\xi d\tau\right)$, existe una $\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right)$ tal que*

$$\|\varphi - v\|_{L^2\left(\langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2b} d\xi d\tau\right)} < \varepsilon$$

*y para $\varphi\left(\xi, \tau - \xi^3\right) \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right)$, existe $\psi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right)$ tal que $\widehat{\psi}(\xi,\tau) = \varphi\left(\xi, \tau - \xi^3\right)$. Por lo tanto*

$$\|\psi - u\|_{X^{s,b}} = \left\|\widehat{\psi} - \widehat{u}\right\|_{L^2\left(\langle \xi \rangle^{2s} \langle \sigma \rangle^{2b} d\xi d\tau\right)} = \|\varphi - v\|_{L^2\left(\langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2b} d\xi d\tau\right)} < \varepsilon.$$

*lo que demuestra la proposición.* □

PROPOSICIÓN 2.2. *Sean $s \in \mathbb{R}$ y $b > \frac{1}{2}$, entonces*

$$X_{s,b} \hookrightarrow C\left(\mathbb{R} : H^s_x(\mathbb{R})\right)$$

Demostración: *Sea $\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^2\right)$, tenemos,*

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2_{L^\infty_t(\mathbb{R}:H^s_x)} &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi(t)\|^2_{H^s} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \left|\widehat{\varphi(t)}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\widehat{\varphi(t)}(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|e^{-it\xi^3} \widehat{\varphi(t)}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \left\|e^{-it\xi^3} \widehat{\varphi(t)}(\xi)\right\|^2_{L^\infty_t} d\xi. \end{aligned} \tag{2.2}$$

*Como $b > \frac{1}{2}$, obtenemos por inmersión de Sobolev $H^s \hookrightarrow C_\infty \subset C \cap L^\infty$. Asi, utilizando (2.2) escribimos*

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2_{L^\infty_t(\mathbb{R}:H^s_x)} &\leq C \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \left\|e^{-it\xi^3} \widehat{\varphi(t)}(\xi)\right\|^2_{H^b_t(\mathbb{R})} d\xi \\ &= C \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^{2b} \left|\left[e^{-it\xi^3} \widehat{\varphi(t)}(\xi)\right]^\wedge (\tau)\right|^2 d\tau d\xi \\ &= C \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^{2b} \left|\widehat{\varphi}(\xi)\left(\xi, \tau + \xi^3\right)\right|^2 d\tau d\xi \\ &= C \|\varphi\|^2_{X_{s,b}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

*Por lo tanto, la aplicación $t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(t) \in H^s$ es acotada. Resta probar que tal aplicación es continua. Para ello tenemos que estimar*

$$\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \int_{\mathbb{R}} \langle\tau\rangle^{2b} \left|\widehat{\varphi(t+h)}(\xi) - \widehat{\varphi(t)}(\xi)\right|^2 d\xi. \tag{2.4}$$

*Como $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$, podemos mostrar que $\varphi(t) \in L_t^1$. Además de esto, tenemos*

$$\widehat{\varphi}(\xi,\tau) = \left[\widehat{\varphi(t)}(\xi)\right]^{\wedge}(\tau), \tag{2.5}$$

*donde adoptaremos siempre la convención que las variables $x$ y $t$ son llevadas en las variables $\xi$ y $\tau$ respectivamente por la transformada de Fourier. Definiendo, para casi todo $\xi$, la aplicación $g_\xi(t) = \widehat{\varphi(t)}(\xi)$, sigue de (2.5) que $\widehat{g}_\xi \in L_\tau^1$. Así tiene sentido usar la fórmula de inversión de Fourier en $g_\xi$. Entonces en (2.4), obtenemos*

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \left|\check{\widehat{g}}_\xi(t+h) - \check{\widehat{g}}_\xi(t)\right|^2 d\xi \\
&= C\int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \left|\int_{\mathbb{R}} e^{it\tau}\widehat{g}_\xi(\tau)\left(e^{ih\tau}-1\right)d\tau\right|^2 d\xi \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \left[\int_{\mathbb{R}} \left|\left(e^{ih\tau}-1\right)\widehat{\varphi}(\xi,\tau)\right| d\tau\right]^2 d\xi. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

*Así obtenemos*

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\left(e^{ih\tau}-1\right)\widehat{\varphi}(\xi,\tau)\right| d\tau \leq 2\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi,\tau)|\, d\tau < \infty, \tag{2.7}$$

*para casi todo punto $\xi$, pues integrando la desigualdad (2.7) en la variable $\xi$, tenemos que la integral doble de $\varphi$ es finita, por que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Luego la integral interna también es finita. Asi mismo, considerando el límite cuando $h \to 0$, y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue obtenemos la continuidad de $\varphi(t)$. Asi mismo, podemos denotar la desigualdad (2.3), de la siguiente forma*

$$\|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R}:H^s)} \leq C\|\varphi\|_{X_{s,b}}, \ \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2). \tag{2.8}$$

*Para el caso general, consideremos $u \in X_{s,b}$. Por la proposición 2.1, existe una sucesión $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\varphi_m \to u$ en $X_{s,b}$. Como el espacio de Bourgain es un subconjunto de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, tenemos*

$$\varphi_m \to u \qquad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2). \tag{2.9}$$

*Por la desigualdad (2.8), la sucesión $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $C_b(\mathbb{R}:H^s)$, como tal espacio es un espacio de Banach, se sigue que existe $f \in C_b(\mathbb{R}:H^s)$ tal que $\varphi_m \to f$ en $C_b(\mathbb{R}:H^s)$, asi mismo tenemos*

$$\varphi_m \to f \qquad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2). \tag{2.10}$$

*Por la unicidad del límite tenemos $u = f$. De esta forma pasamos al límite en (2.8), obtenemos*

$$\|u\|_{C_b(\mathbb{R}:H^s)} \leq C\|u\|_{X_{s,b}} \quad \text{para todo } u \in X_{s,b}, \tag{2.11}$$

*lo que muestra la inmersión continua.* □

**3. El estimado bilineal.** Establecidas las principales propiedades de los espacios de Bourgain, de [9, pág 170],[8], tenemos

DEFINICIÓN 3.1. *Sean $s, b \in \mathbb{R}$. Definamos la forma bilineal*

$$B(u,v) = \frac{1}{2}\partial_x(uv). \tag{3.1}$$

*para todo $u, v \in X_{s,b}$.*

El principal resultado de está sección es garantizado por:

TEOREMA 3.1. *Sea $s \in \left]-\frac{3}{4}, 0\right]$, entonces existe $b \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ tal que*

$$\|B(u,u)\|_{X_{s,b-1}} \leq C\|u\|_{X_{s,b}}^2 \quad , \tag{3.2}$$

*donde* $u \in X_{s,b}$.

Demostración: Para demostrar este teorema escribiremos la estimativa (3.2) en una forma equivalente que será más conveniente para nuestros cálculos. Definiendo $\delta = -s \in \left[0, \frac{3}{4}\right[$ sigue, que si $X_{s,b} = X_{-\delta,b}$,

$$f(\xi,\tau) = \left\langle \tau - \xi^3 \right\rangle^b \langle \xi \rangle^{-\delta} \widehat{u}(\xi,\tau) \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right) \tag{3.3}$$

y

$$\|f\|_{L^2_\xi L^2_\tau} = \|u\|_{X_{s,b}} = \|u\|_{X_{-\delta,b}}. \tag{3.4}$$

Utilizando el hecho

$$\widehat{\partial_x\left(u^2\right)}(\xi,\tau) = C\xi\left(\widehat{u} * \widehat{u}\right)(\xi,\tau) \tag{3.5}$$

podemos escribir (3.2) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \|B(u,u)\|_{X_{s,b-1}} &= \left\| \left\langle \tau - \xi^3 \right\rangle^{b-1} \langle \xi \rangle^{-\delta} \widehat{\partial_x\left(u^2\right)} \right\|_{L^2_\xi L^2_\tau} \\ &= C \left\| \left\langle \tau - \xi^3 \right\rangle^{b-1} \langle \xi \rangle^{-\delta} \xi \left(\widehat{u} * \widehat{u}\right) \right\|_{L^2_\xi L^2_\tau}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Aplicando la definición del producto de convolución en la igualdad (3.5) y utilizando (3.3) podemos escribir (3.2) en términos de la función $f$ como

$$\begin{aligned} \|B(u,u)\|_{X_{s,b-1}} &= C \left\| \widetilde{k} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi-\xi_1, \tau-\tau_1)\langle \xi-\xi_1\rangle^\delta}{\left\langle (\tau-\tau_1) - (\xi-\xi_1)^3 \right\rangle^b} \frac{f(\xi_1,\tau_1)\langle \xi_1\rangle^\delta}{\left\langle \tau_1 - \xi_1^3 \right\rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L^2_\xi L^2_\tau} \\ &\le C \|u\|^2_{X_{s,b}} = C\|f\|^2_{L^2_\xi L^2_\tau}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $\widetilde{k} = \widetilde{k}(\xi,\tau) = \frac{\xi}{\langle \tau-\xi^3\rangle^{1-b}\langle \xi\rangle^\delta}$. □

Asi mismo, el teorema 3.1 puede ser escrito de la siguiente forma equivalente

TEOREMA 3.2. *Sea* $\delta = -s \in \left[0, \frac{3}{4}\right[$, *entonces existe* $b \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ *tal que*

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\xi}{\langle \tau-\xi^3\rangle^{1-b}\langle \xi\rangle^\delta} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi-\xi_1, \tau-\tau_1)\langle \xi-\xi_1\rangle^\delta}{\left\langle (\tau-\tau_1) - (\xi-\xi_1)^3 \right\rangle^b} \frac{f(\xi_1,\tau_1)\langle \xi_1\rangle^\delta}{\left\langle \tau_1 - \xi_1^3 \right\rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L^2_\xi L^2_\tau} \\ &\le C\|f\|^2_{L^2_\xi L^2_\tau} \end{aligned} \tag{3.8}$$

*donde* $f \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Probaremos la siguiente versión del teorema 3.2, que es un resultado más general.

TEOREMA 3.3. *Sea* $\delta = -s \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$, *entonces existe* $b \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ *tal que para cualquier* $b' \in \left]\frac{1}{2}, b\right]$ *con* $b - b' \le \min\left\{b - \frac{1}{2}; \frac{1}{4} - \frac{b}{3}\right\}$ *sigue que*

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\xi}{\langle \tau-\xi^3\rangle^{1-b}\langle \xi\rangle^\delta} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi-\xi_1, \tau-\tau_1)\langle \xi-\xi_1\rangle^\delta}{\left\langle (\tau-\tau_1) - (\xi-\xi_1)^3 \right\rangle^{b'}} \frac{f(\xi_1,\tau_1)\langle \xi_1\rangle^\delta}{\left\langle \tau_1 - \xi_1^3 \right\rangle^{b'}} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L^2_\xi L^2_\tau} \\ &\le C\|f\|^2_{L^2_\xi L^2_\tau} \end{aligned} \tag{3.9}$$

*donde la constante* $c = C(\delta, b, b-b')$. *Además de esto,* (3.9) *también vale para* $\delta = 0$, *con* $b \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$ *y* $b' \in \left]\frac{1}{2}, b\right]$.

En un primer momento puede hasta aparecer extraño cuando afirmamos que el teorema 3.3 es una versión más general que el teorema 3.2, pues repare que hicimos una restricción de la hipótesis sobre el valor de $\delta$, el máximo que podríamos afirmar por cuanto es que (3.8) sigue de (3.9), tomando $b = b'$, desde que tomamos $\delta = 0$ o $\delta \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$. En tanto, mostraremos, el caso $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, seguirá de los casos $\delta = 0$ o $\delta \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$. Por tanto, el teorema 3.3 es realmente un resultado más fuerte que el teorema 3.2.

Demostración: Teorema 3.3. Dividiremos la demostración en etapas para facilitar la comprensión.

*Etapa 1.*
Cuando $\delta = 0$. Utilizando las notaciones $\lambda = (\xi, \tau)$ y $\lambda_1 = (\xi_1, \tau_1)$, observamos que mostrar la desigualdad (2.11), es equivalente a mostrar la siguiente desigualdad

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda_1) f(\lambda - \lambda_1) k(\lambda, \lambda_1) \, d\lambda_1 \right\|_{L^2_\lambda} \leq C \|f\|_{L^2_\lambda}, \tag{3.10}$$

donde

$$k(\lambda, \lambda_1) = \left( \frac{\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b}} \right) \cdot \left( \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{b'}} \right) \cdot \left( \frac{1}{\left\langle (\tau - \tau_1) - (\xi - \xi_1)^3 \right\rangle^{b'}} \right). \tag{3.11}$$

Asi mismo utilizando, la desigualdad de Cauchy-Schwarz, proposiciones anteriores, el teorema de Fubbini, un cambio de variable y denotando por I, el término de la izquierda en la desigualdad (3.10), obtenemos las siguientes mayoraciones

$$\begin{aligned}
I &\leq \left\| \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda_1) f(\lambda - \lambda_1)|^2 \, d\lambda_1 \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |k(\lambda, \lambda_1)|^2 \, d\lambda_1 \right)^{1/2} \right\|_{L^2_\lambda} \\
&= \left\| \|f(\lambda_1) f(\lambda - \lambda_1)\|_{L^2_{\lambda_1}} \|k(\lambda, \lambda_1)\|_{L^2_{\lambda_1}} \right\|_{L^2_\lambda} \\
&\leq \left\| \|f(\lambda_1) f(\lambda - \lambda_1)\|_{L^2_{\lambda_1}} \sup_{\lambda} \|k(\lambda, \lambda_1)\|_{L^2_{\lambda_1}} \right\|_{L^2_\lambda} \\
&= \|k(\lambda, \lambda_1)\|_{L^\infty_\lambda L^2_{\lambda_1}} \|f(\lambda_1) f(\lambda - \lambda_1)\|_{L^2_{\lambda_1} L^2_\lambda} \\
&\leq C \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda_1)|^2 \int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda - \lambda_1)|^2 \, d\lambda d\lambda_1 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda_1)|^2 \int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda_2)|^2 \, d\lambda_2 d\lambda_1 \right)^{1/2} \\
&= C \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda)|^2 \, d\lambda \right)^2 \right]^{1/2} = C \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda)|^2 \, d\lambda \right)^{1/2} \right]^2 \qquad (3.12) \\
&= C \|f\|^2_{L^2_\lambda}
\end{aligned}$$

que vale para cualquier $b \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$ y cualquier $b' \in \left] \frac{1}{2}, b \right]$.

*Etapa 2.*
Cuando $\delta \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$. En este caso observemos que si

$$|\xi_1| \leq 1 \quad \text{o} \quad |\xi - \xi_1| \leq 1, \tag{3.13}$$

tenemos

$$\langle \xi_1 \rangle^\delta \langle \xi - \xi_1 \rangle^\delta \leq C \langle \xi \rangle^\delta, \tag{3.14}$$

que reduce la estimativa al caso $\delta = 0$. De esta forma podemos asumir que

$$|\xi_1| \geq 1 \quad \text{o} \quad |\xi - \xi_1| \geq 1. \tag{3.15}$$

Por simétria podemos asumir también

$$\left| (\tau - \tau_1) - (\xi - \xi_1)^3 \right| \leq \left| \tau_1 - \xi_1^3 \right|, \tag{3.16}$$

pues si consideramos los cambios de variables $\tau_2 = \tau - \tau_1$ y $\xi_2 = \xi - \xi_1$ el término de la izquierda en (3.9) no se altera y además de eso por (3.16), obtenemos

$$\left| \tau_2 - \xi_2^3 \right| \leq \left| (\tau - \tau_2) - (\xi - \xi_2)^3 \right|. \tag{3.17}$$

Ahora dividiremos la región de integración en (3.9) en dos partes

$$\left|\tau_1-\xi_1^3\right| \leq \left|\tau-\xi^3\right| \quad \text{y} \quad \left|\tau-\xi^3\right| \leq \left|\tau_1-\xi_1^3\right|, \tag{3.18}$$

que son justamente las regiones $A$ y $B$.
Para acotar el término de la izquierda en (3.9) en la región $A$ basta utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, proposición anterior y aplicar el raciocinio empleado en (3.12), para obtener la misma acotación.
Para acotar la región $B$, consideremos

$$F(\lambda)=\int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda_1)\, f(\lambda-\lambda_1)\, \chi(B)\, k_1(\lambda,\lambda_1)\, d\lambda_1 \tag{3.19}$$

donde

$$k_1(\lambda,\lambda_1)=\left(\frac{\xi}{\langle\tau-\xi^3\rangle^{1-b}\langle\xi\rangle^{\delta}}\right)\cdot\left(\frac{\langle\xi\rangle^{\delta}}{\langle\tau_1-\xi_1^3\rangle^{b'}}\right)\cdot\left(\frac{\langle\xi-\xi_1\rangle^{\delta}}{\left\langle(\tau-\tau_1)-(\xi-\xi_1)^3\right\rangle^{b'}}\right) \tag{3.20}$$

$\lambda=(\xi,\tau)$, $\lambda_1=(\xi_1,\tau_1)$ y $\chi(B)$ es la función característica del conjunto $B$. Tenemos que mostrar la siguiente desigualdad

$$\|F(\lambda)\|_{L^2_\lambda} \leq C\,\|f\|_{L^2_\lambda}. \tag{3.21}$$

Para mostrar la desigualdad anterior, utilizaremos el siguiente hecho del análisis funcional

$$\|f\|_{L^p(X)}=\sup\left\{\left|\int_X fg\,dx\right|,\ g\in L^q(X),\ \|g\|_q\leq 1\right\} \tag{3.22}$$

que es verdadera para $p,q\in[1,\infty\rangle$, satisfaciendo $p^{-1}+q^{-1}=1$. Asi mismo para mostrar (3.21) es suficiente mostrar la siguiente desigualdad

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} fg\,dx\right| \leq C\,\|f\|^2_{L^2_\lambda}\,\|\chi(B)\,k_1(\lambda,\lambda_1)\|_{L^2_\lambda L^2_{\lambda_1}}\,\|g\|_{L^2_\lambda},\ \forall g\in L^2_\lambda, \tag{3.23}$$

que es obtenida aplicando el teorema de Fubbini y la desigualdad de Cauchy-Schwarz dos veces al término de la izquierda. De ahí, basta utilizar proposición anterior y tomar $g=1$ para obtener (3.21). De esta forma el teorema 3.3 esta probado. □

Observemos que el teorema 3.3 es equivalente al siguiente resultado.

COROLARIO 3.1. *Sea $s\in\left]-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right[$ entonces existe $b\in\left]\frac{1}{2},1\right[$ tal que para cualquier $b'\in\left]\frac{1}{2},b\right[$ con $b-b'\leq \text{mín}\left\{\rho-\frac{1}{2},\frac{1}{4}-\frac{\delta}{3}\right\}$ se cumple*

$$\|B(u,u)\|_{X_{s,b-1}} \leq C\,\|u\|^2_{X_{s,b'}} \tag{3.24}$$

*donde la constante $C=C(s,b,b-b')$ y la forma bilineal $B$ es definida en (3.1). Por otra parte, (3.24) también vale para $s=0$, con $b\in\left]\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ y $b'\in\left]\frac{1}{2},b\right]$.*

COROLARIO 3.2. *Sea $s\in\left]-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right[$, entonces existe $b\in\left]\frac{1}{2},1\right[$ tal que para cualquier $b'\in\left]\frac{1}{2},b\right[$ con $b-b'\leq \text{mín}\left\{\rho-\frac{1}{2};\frac{1}{4}-\frac{\delta}{3}\right\}$ se cumple*

$$\|B(u,v)\|_{X_{s,b-1}} \leq C\,\|u\|_{X_{s,b'}}\,\|v\|_{X_{s,b'}} \tag{3.25}$$

*donde la constante $C=C(s,b,b-b')$ y la forma bilineal $B$ es definida en (3.1). Por otra parte, (3.25) también vale para $s=0$, con $b\in\left]\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ y $b'\in\left]\frac{1}{2},b\right]$.*

El corolario anterior nos informa que la aplicación

$$(u,v)\in X_{s,b'}\times X_{s,b'} \mapsto B(u,v)\in X_{s,b-1} \tag{3.26}$$

es continua.

Observamos que el teorema 3.3 y en consecuencia los corolarios 3.1, 3.2 también valen cuando consideramos $\delta=-s\in\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

Así mismo, en lo sucesivo, cuando nos referimos al teorema 3.3 y los corolarios 3.1, 3.2, se entiende que estamos utilizando $s\in\left]-\frac{3}{4},0\right]$.

**4. Resultado de buena formulación local.** En [9, pág 163], $\theta_\delta(t) = \theta\left(\delta^{-1}t\right)$, $\delta \in ]0,1]$ , respaldado también en [5, pág 306] y el trabajo realizado en [7], se tienen las siguientes proposiciones

PROPOSICIÓN 4.1. *Para cualquier* $b > \frac{1}{2}$ *y* $s \in \mathbb{R}$*,*

$$\left\|\theta\left(\delta^{-1}t\right) V(t)\, u_0\right\|_{X_{s,b}} \leq c\delta^{(1-2b)/2} \left\|u_0\right\|_{H^s}, \tag{4.1}$$

Demostración: *Se tiene*

$$\theta_\delta(t)\, u(t) = \theta\left(\delta^{-1}t\right) \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{it\tau} \delta\left(t-\xi^3\right) \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi d\tau,$$

*así que* $\left(\theta\left(\delta^{-1}t\right) V(t)\, u_0\right)^\wedge(\xi,\tau) = \delta\widehat{\theta}\left(\delta\left(t-\xi^3\right)\right)\widehat{u_0}(\xi)$*. De esto,*

$$\begin{aligned}
&\left\|\theta(t)\, V(t)\, u_0\right\|_{X_{s,b}}^2 \\
&\quad = c\delta^2 \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\theta}\left(\delta\left(t-\xi^3\right)\right)\right|^2 \left(1+\left|\tau-\xi^3\right|\right)^{2b} \left(1+|\xi|\right)^{2s} \left|\widehat{u_0}(\xi)\right|^2 d\xi d\tau \\
&\quad = c\int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|\right)^{2s} \left|\widehat{u_0}(\xi)\right|^2 \left(\delta^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\theta}\left(\delta\left(t-\xi^3\right)\right)\right|^2 \left(1+\left|\tau-\xi^3\right|\right)^{2b} d\tau\right) d\xi.
\end{aligned}$$

*Usando que* $b > \frac{1}{2}$ *y* $\delta \in ]0,1[$ *tenemos el siguiente estimado*

$$\begin{aligned}
&\delta^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\theta}\left(\delta\left(t-\xi^3\right)\right)\right|^2 \left(1+\left|\tau-\xi^3\right|\right)^{2b} d\tau \\
&\qquad \leq c\delta^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\theta}\left(\delta\left(t-\xi^3\right)\right)\right|^2 d\tau + c\delta^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\theta}\left(\delta\left(t-\xi^3\right)\right)\right|^2 \left|\tau-\xi^3\right|^{2b} d\tau \\
&\qquad \leq c\delta + c\delta^{1-2b} \\
&\qquad \leq c\delta^{1-2b}.
\end{aligned}$$

*Entonces*

$$\left\|\theta(t)\, V(t)\, u_0\right\|_{X_{s,b}}^2 \leq c\delta^{1-2b} \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\widehat{u_0}(\xi)\right|^2 d\xi = c\delta^{1-2b} \left\|u_0\right\|_{H^s}^2,$$

*y la prueba de la proposición esta completa.* □

PROPOSICIÓN 4.2. *Para cualquier* $s \in \mathbb{R}$ *y* $b \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ *se cumple*

$$\left\|\theta\left(\delta^{-1}t\right) v\right\|_{X_{s,b}} \leq c\delta^{(1-b)/2} \left\|v\right\|_{X_{s,b}}. \tag{4.2}$$

Demostración: *Como* $\left(\theta\left(\delta^{-1}t\right) v(x,t)\right)^\wedge = \left(\delta\widehat{\theta}(\delta\cdot)\right) *_t \widehat{v}$*, por la definición de la norma* $\|\cdot\|_{X_{s,b}}$*, la prueba se reduce a demostrar que, para* $a \in \mathbb{R}$ *se cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\left(\delta\widehat{\theta}(\delta\cdot)\right) *_t \widehat{v}(\tau)\right|^2 \left(1+|\tau-a|\right)^{2b} d\tau \leq c\delta^{1-2b} \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{v}(\tau)\right|^2 \left(1+|\tau-a|\right)^{2b} d\tau.$$

*Desde que*

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\delta\widehat{\theta}(\delta\tau)\right|^2 d\tau < +\infty,$$

*sigue*

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\left(\delta\widehat{\theta}(\delta\cdot)\right) * \widehat{v}(\tau)\right|^2 d\tau \leq c\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{v}(\tau)\right|^2 d\tau.$$

*Regresando a*

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\left(\delta\widehat{\theta}(\delta\cdot)\right) * \widehat{v}(\tau)\right|^2 |\tau-a|^{2b} d\tau = \int_{\mathbb{R}} \left|D^b\left(e^{iat} v(t)\, \theta\left(\delta^{-1}\tau\right)\right)\right|^2 dt.$$

*La regla de Leibniz muestra que*

$$\left\|D^b\left(e^{iat} v\theta\left(\delta^{-1}\cdot\right)\right) - e^{iat} vD^b\theta\left(\delta^{-1}\cdot\right)\right\|_{L^2} \leq c\left\|D^b\left(e^{iat} v\right)\right\|_{L^2} \left\|\theta\right\|_{L^\infty}.$$

*Notando que* $\|\theta\|_{L^\infty} \le c$ *y*

$$\left\|D^b\left(e^{iat}v\right)\right\|_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{v}(\tau)|^2 |\tau - a|^{2b}\, d\tau,$$

*solamente debemos acotar el término*

$$\int_{\mathbb{R}} \left|e^{iat} v D^b \theta\left(\delta^{-1}t\right)\right|^2 dt.$$

*Pero el teorema de inmersión de Sobolev y el hecho que* $b > \frac{1}{2}$ *lleva a*

$$\begin{aligned} c\int_{\mathbb{R}} \left|e^{iat} v D^b \theta\left(\delta^{-1}t\right)\right|^2 dt &\le c\left(\int_{\mathbb{R}} \left|e^{iat} v(t)\right|^2 dt + \int_{\mathbb{R}} \left|D^b\left(e^{iat}v\right)\right|^2 dt\right) \left\|D^b\theta\left(\delta^{-1}\cdot\right)\right\|_{L^2}^2 \\ &\le c\left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2 dt + \int_{\mathbb{R}} |\tau - a|^{2b} |\widehat{v}(\tau)|^2 d\tau\right) \left\|D^b\theta\left(\delta^{-1}\cdot\right)\right\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

*Por la identidad de Plancherel y puesto que* $b > \frac{1}{2}$ *tenemos*

$$\left\|D^b\theta\left(\delta^{-1}\cdot\right)\right\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2b} \delta^2 \left|\widehat{\theta}(\delta\tau)\right|^2 d\tau \le c\delta^{1-2b} \|\theta\|_1^2.$$

*La prueba de la proposición se concluye.* □

COROLARIO 4.1. *Para cualquier* $s \in \mathbb{R}$ *y* $b \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ *se cumple*

$$\left\|\theta\left(\delta^{-1}t\right)v\right\|_{X_{s,b}} \le c\delta^{(1-b)/2} \|v\|_{X_{s,b}}. \tag{4.3}$$

PROPOSICIÓN 4.3. *Si* $s \in \mathbb{R}$ *y* $b \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, *entonces*

$$\left\|\theta\left(\delta^{-1}t\right)\int_0^t W(t-t')\, w(t')\, dt'\right\|_{X_{s,b}} \le c\delta^{(1-2b)/2} \|w\|_{X_{s,b-1}}. \tag{4.4}$$

Demostración: *Empezamos escribiendo*

$$\begin{aligned} &\theta\left(\delta^{-1}t\right)\int_0^t W(t-t')\, w(t')\, dt' \\ &= \theta\left(\delta^{-1}t\right)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\widehat{w}(\xi,\tau)\,\theta\left(\tau-\xi^3\right)\frac{e^{it\tau}-e^{it\xi^3}}{\tau-\xi^3}\, d\xi d\tau \\ &\quad + \theta\left(\delta^{-1}t\right)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\widehat{w}(\xi,\tau)\,(1-\theta)\left(\tau-\xi^3\right)\frac{e^{it\tau}-e^{it\xi^3}}{\tau-\xi^3}\, d\xi d\tau \\ &= I + II \end{aligned} \tag{4.5}$$

*Por un desarrollo de Taylor tenemos*

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k t^k}{k!}\theta\left(\delta^{-1}t\right)\int_{\mathbb{R}} e^{i\left(x\xi + t\xi^3\right)}\left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{w}(\xi,\tau)\frac{\theta\left(\tau-\xi^3\right)}{\tau-\xi^3}\, d\tau\right) d\xi. \tag{4.6}$$

*Sea*

$$t^k\theta\left(\delta^{-1}t\right) = \delta^k\left(\frac{t}{\delta}\right)^k \theta\left(\delta^{-1}t\right) = \phi_k(t), \ \ k \ge 1,$$

*entonces, siguiendo el argumento en la demostración de la proposición 4.1 y las asunciones* $b \le 1$ *y* $\delta \le 1$, *encontramos que*

$$\begin{aligned} \delta^2\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\phi_k}(\delta\tau)\right|^2 (1+|\tau|)^{2b} d\tau &\le c\delta^2\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\phi_k}(\delta\tau)\right|^2 d\tau + \delta^2\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\phi_k}(\delta\tau)\right|^2 |\tau|^{2b} d\tau\right) \\ &\le c\delta^{1-2b}\left(\|\phi_k\|_{L^2}^2 + \|D_t\phi_k\|_{L^2}^2\right) \\ &\le c\delta^{1-2b}(1+k)^2. \end{aligned}$$

*Así, por la prueba de (4.1) y (4.6)*

$$\|I\|_{X_{s,b}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k^2}{k!} \delta^k \delta^{1-2b} \left\| \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{w}(\xi,\tau) \frac{\theta(\tau-\xi^3)}{(\tau-\xi^3)^{1-k}} \, d\tau \right)^{\vee} \right\|_{H^s}.$$

*Pero*

$$\begin{aligned}
&\left\| \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta(\tau-\xi^3)}{(\tau-\xi^3)^{1-k}} \widehat{w}(\xi,\tau) \, d\tau \right)^{\vee} \right\|_{H^s}^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{w}(\xi,\tau) \frac{\theta(\tau-\xi^3)}{(\tau-\xi^3)^{1-k}} \right| d\tau \right)^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} \left( \int_{|\tau-\xi^3|<1} |\widehat{w}(\xi,\tau)| \, d\tau \right)^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{w}(\xi,\tau)|}{(1+|\tau-\xi^3|)^{1-b} (1+|\tau-\xi^3|)^{b}} \, d\tau \right)^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{w}(\xi,\tau)|^2}{(1+|\tau-\xi^3|)^{2(1-b)}} \, d\tau \, d\xi \\
&\leq c \|w\|_{X_{s,b-1}}^2,
\end{aligned}$$

*puesto que* $b > \frac{1}{2}$, *lo cual prueba la cota requerida para el término* $I$ *de (4.5).*
*Ahora acotemos al término* $II$ *de (4.5). Primero escribimos*

$$\begin{aligned}
II &= -\theta(\delta^{-1}t) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi+t\xi^3)} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\theta)(\tau-\xi^3)}{\tau-\xi^3} \widehat{w}(\xi,\tau) \, d\tau \right) d\xi \\
&+\theta(\delta^{-1}t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi+t\tau)} \frac{(1-\theta)(\tau-\xi^3)}{\tau-\xi^3} \widehat{w}(\xi,\tau) \, d\tau d\xi \\
&= II_1 + II_2.
\end{aligned}$$

*Usando la proposición 4.1, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y* $b > \frac{1}{2}$ *se deduce que*

$$\begin{aligned}
\|II_1\|_{X_{s,b}} &\leq c\delta^{(1-2b)/2} \left\| \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\theta)(\tau-\xi^3)}{(\tau-\xi^3)^{1-k}} \widehat{w}(\xi,\tau) \, d\tau \right)^{\vee} \right\|_{H^s} \\
&\leq c\delta^{(1-2b)/2} \left( \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} \left( \int_{|\tau-\xi^3|\leq\frac{1}{2}} \frac{|\widehat{w}(\xi,\tau)|}{1+|\tau-\xi^3|} \, d\tau \right)^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\leq c\delta^{(1-2b)/2} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} \left( \int_{|\tau-\xi^3|\leq\frac{1}{2}} \frac{|\widehat{w}(\xi,\tau)|}{(1+|\tau-\xi^3|)^{1-b}(1+|\tau-\xi^3|)^{b}} \, d\tau \right)^{1/2} d\xi \\
&\leq c\delta^{(1-2b)/2} \|w\|_{X_{s,b-1}}.
\end{aligned}$$

*Finalmente, por (4.3) y la definición del espacio de Bourgain* $X_{s,b-1}$

$$\begin{aligned}
\|II_2\|_{X_{s,b}} &\leq c\delta^{(1-2b)/2} \left\| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi+t\tau)} \frac{(1-\theta)(\tau-\xi^3)}{\tau-\xi^3} \widehat{w}(\xi,\tau) \, d\tau d\xi \right\|_{X_{s,b}} \\
&\leq c\delta^{(1-2b)/2} \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{w}(\xi,\tau)|^2}{(1+|\tau-\xi^3|)^2} (1+|\tau-\xi^3|)^{2b} (1+|\xi|)^{2s} \, d\xi \, d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq c\delta^{(1-2b)/2} \|w\|_{X_{s,b-1}}.
\end{aligned}$$

*Esto completa la prueba de la proposición.* □

La prueba de la siguiente proposición sigue los mismos argumentos a los usados en la demostración de la proposición 4.3, así que será omitida.

PROPOSICIÓN 4.4. *Sean* $s \in \mathbb{R}$ *y* $b \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, *entonces*

$$\left\| \theta\left(\delta^{-1}t\right) \int_0^t W\left(t-t'\right) w\left(t'\right)\, dt' \right\|_s \leq c\delta^{(1-2b)/2} \|w\|_{X_{s,b-1}}. \tag{4.7}$$

Demostración: *Similar a 4.3* □

PROPOSICIÓN 4.5. *Si* $s \in \mathbb{R}$, $b, b' \in \left]\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right[$ *con* $b < b'$ *y* $\delta \in ]0,1[$, *entonces para* $v \in X_{s,b'-1}$ *tenemos*

$$\left\| \theta\left(\delta^{-1}t\right) v \right\|_{X_{s,b-1}} \leq c\delta^{\left(b'-b\right)/8(1-b)} \|v\|_{X_{s,b'-1}}. \tag{4.8}$$

Demostración: Para demostrar (4.8) usaremos dualidad, así que probaremos el estimado

$$\left\| \theta\left(\delta^{-1}t\right) v \right\|_{X_{-s,1-b'}} \leq c\delta^{\left(b'-b\right)/8(1-b)} \|v\|_{X_{-s,1-b}} \tag{4.9}$$

Este resultado seguirá por interpolación. Para esto necesitamos establecer las siguientes desigualdades

$$\left\| \theta\left(\delta^{-1}t\right) v \right\|_{X_{-s,0}} \leq c\delta^{1/8} \|v\|_{X_{-s,1-b}} \tag{4.10}$$

y

$$\left\| \theta\left(\delta^{-1}t\right) v \right\|_{X_{-s,1-b}} \leq c \|v\|_{X_{-s,1-b}}. \tag{4.11}$$

De, las desigualdades de Hölder y Sobolev, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \theta\left(\delta^{-1}t\right) v \right\|_{X_{-s,0}} &= \left\| J_x^{-s} V(t)\, \theta\left(\delta^{-1}\cdot\right) v \right\|_{L_t^2 L_x^2} = \left\| \theta\left(\delta^{-1}\cdot\right) V(t)\, J_x^{-s} v \right\|_{L_t^2 L_x^2} \\
&\leq c\delta^{1/8} \left\| V(t)\, J_x^{-s} v \right\|_{L_x^2 L_t^{8/3}} \leq c\delta^{1/8} \left\| V(t)\, J_x^{-s} v \right\|_{L_x^2 H_t^{1/8}} \\
&= c\delta^{1/8} \|v\|_{X_{-s,1/8}} \leq c\delta^{1/8} \|v\|_{X_{-s,1-b}},
\end{aligned}$$

en donde usamos que $1 - b > \frac{1}{8}$. Esto prueba (4.10).

Para probar (4.10) usaremos un argumento similar al utilizado para probar la proposición 4.2. Puesto que

$$\left(\theta\left(\delta^{-1}t\right) v(x,t)\right)^{\wedge} = \widehat{\theta}_{\delta^{-1}} *_t \widehat{v},$$

por la definición del espacio de Bourgain $X_{s,b}$ es suficiente probar que para $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\theta}_{\delta^{-1}} *_t \widehat{v} \right|^2 (1 + |\tau - a|)^{2(1-b)}\, d\tau \leq c \int_{\mathbb{R}} |\widehat{v}|^2 (1 + |\tau - a|)^{2(1-b)}\, d\tau. \tag{4.12}$$

Puesto que $\left\| \delta\widehat{\theta}(\delta\cdot) \right\|_{L_t^1} < +\infty$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\theta}_{\delta^{-1}} *_t \widehat{v} \right|^2 d\tau \leq c \int_{\mathbb{R}} |\widehat{v}|^2\, d\tau.$$

A continuación estimamos

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\theta}_{\delta^{-1}} *_t \widehat{v} \right|^2 |\tau - a|^{2(1-b)}\, d\tau = \int_{\mathbb{R}} \left| D_t^{1-b} e^{iat} v(t)\, \theta\left(\delta^{-1}t\right) \right|^2 dt.$$

Usando la regla de Leibniz, tenemos

$$\left\| D_t^{1-b}\left(e^{iat} v \theta_\delta\right) - e^{iat} v D_t^{1-b} \theta_\delta \right\|_{L^2} \leq c \left\| D_t^{1-b}\left(e^{iat} v\right) \right\|_{L^2} \|\theta_{\delta^{-1}}\|_{L^\infty}. \tag{4.13}$$

El primer factor en el segundo miembro de (4.13) se estima como sigue. Primero notemos que $\|\theta_\delta\|_{L^\infty} < +\infty$. De esto, la identidad de Plancherel nos da

$$\left\| D_t^{1-b}\left(e^{iat} v\right) \right\|_{L^2} = \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{v}(\tau)|^2 |\tau - a|^{2(1-b)}\, d\tau \right)^{1/2}. \tag{4.14}$$

Para acotar $\left\|e^{iat}vD_t^{1-b}\theta_\delta\right\|_{L^2}$, usamos la desigualdad de Hölder para obtener

$$\left\|e^{iat}vD_t^{1-b}\theta_\delta\right\|_{L^2} \leq \left\|e^{iat}v\right\|_{L^{2p}} \left\|D_t^{1-b}\theta_\delta\right\|_{L^{2q}}$$

con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Entonces elegimos $p$ tal que $\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}=1-b$. Usando

$$\left\|e^{iat}v\right\|_{L^{2p}} \leq \left\|e^{iat}v\right\|_{1-b} = c\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{v}\left(\tau\right)\right|^2 \left(1+\left|\tau-a\right|\right)^{2(1-b)} d\tau. \tag{4.15}$$

Como la transformada de Fourier inversa es acotada de $L^{2q/(2q-1)}\left(\mathbb{R}\right)$ en $L^{2q}\left(\mathbb{R}\right)$ tenemos

$$\begin{aligned} \left\|D_t^{1-b}\theta_\delta\right\|_{L^{2q}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\left|\tau\right|^{1-b}\delta\widehat{\theta_\delta}\left(\delta\tau\right)\right|^{\frac{2q}{2q-1}} d\tau\right)^{\frac{2q-1}{2q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\left|\tau\right|^{1-b}\widehat{\theta}\left(\tau\right)\right|^{\frac{2q}{2q-1}} d\tau\right)^{\frac{2q-1}{2q}} < +\infty. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Combinando (4.15) y (4.16) tenemos

$$\left\|e^{iat}vD_t^{1-b}\theta_\delta\right\|_{L^2} \leq c\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{v}\left(\tau\right)\right|^2 \left(1+\left|\tau-a\right|\right)^{2(1-b)} d\tau. \tag{4.17}$$

Así (4.14) y (4.17) dan (4.12). Los estimados (4.10), (4.11) e interpolación dan la desigualdad (4.9) y la proposición queda probada □

Ahora podemos enunciar el resultado principal de éste artículo.

TEOREMA 4.1. *Para cualquier* $u_0 \in H^s\left(\mathbb{R}\right)$, $s > -\frac{3}{4}$ *y* $b \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, *existe* $T = T\left(\left\|u_0\right\|_{H^s}\right)$ *y una solución única de (1.1) en el intervalo de tiempo* $\left[-T, T\right]$ *satisfaciendo*

$$u \in C\left(\left[-T,T\right]; H^s\left(\mathbb{R}\right)\right), \tag{4.18}$$

$$u \in X_{s,b} \subseteq L_{x,loc}^p\left(\mathbb{R} : L_t^2\left(\mathbb{R}\right)\right), \text{ para } 1 \leq p \leq \infty, \tag{4.19}$$

$$\partial_x u^2 \in X_{s,b-1}, \tag{4.20}$$

*y*

$$\partial_t u \in X_{s-3,b-1}. \tag{4.21}$$

*Además, dado* $T' \in \left]0, T\right[$, *la aplicación* $u_0 \mapsto u\left(t\right)$ *es suave de* $H^s\left(\mathbb{R}\right)$ *a* $C\left(\left[-T', T'\right]; H^s\left(\mathbb{R}\right)\right)$.

Demostración: *Definimos*

$$\mathcal{X}_\alpha = \left\{u \in X_{s,b} : \left\|u\right\|_{X_{s,b}} \leq \alpha\right\},$$

*Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que* $\alpha > 1$.*Entonces* $\mathcal{X}_\alpha$ *es un espacio métrico completo con norma,*

$$\left\|u\right\|_{\mathcal{X}_\alpha} = \left\|u\right\|_{X_{s,b}}.$$

*Para* $u_0 \in H^s$, $s > -\frac{3}{4}$, *definimos el operador*

$$\Phi_{u_0}\left(u\right) = \psi_1\left(t\right)e^{-t\partial_x^3}u_0 - \frac{\psi_1\left(t\right)}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)\partial_x^3}\psi_\delta\left(\tau\right)\partial_x u^2\left(\tau\right) d\tau. \tag{4.22}$$

*Probemos que la aplicación* $\Phi$ *define una contracción sobre* $\mathcal{X}_\alpha$ .

*Sea* $\beta = \frac{b-b'}{8(1-b')}$. *Usando las proposiciones (4.1), (4.2), (4.3) y teorema(3.1) deducimos*

$$\begin{aligned} \left\|\Phi_{u_0}\left(u\right)\right\|_{\mathcal{X}_\alpha} &= \left\|\Phi_{u_0}\left(u\right)\right\|_{X_{s,b}} \\ &\leq \left\|\psi_1\left(t\right)e^{-t\partial_x^3}u_0\right\|_{X_{s,b}} + \left\|\frac{\psi_1\left(t\right)}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)\partial_x^3}\psi_\delta\left(\tau\right)\partial_x u^2\left(\tau\right)d\tau\right\|_{X_{s,b}} \\ &\leq C_1\left\|u_0\right\|_{H^s} + C\left\|\psi_\delta\partial_x u^2\right\|_{X_{s,b-1}} \\ &\leq C_1\left\|u_0\right\|_{H^s} + C\delta^\beta\left\|\partial_x u^2\left(t\right)\right\|_{X_{s,b'-1}} \\ &\leq C_1\left\|u_0\right\|_{H^s} + C_2\delta^\beta\left\|u\left(t\right)\right\|_{X_{s,b}}^2 \end{aligned}$$

*Como* $u \in \mathcal{X}_\alpha$ *con nuestra elección de* $\alpha$

$$\|\Phi_{u_0}(u)\|_{X_{s,b}} \leq \frac{\alpha}{2} + C_1\delta^\theta\alpha^2.$$

*Si escogemos* $\delta$ *tal que*

$$\delta^\theta \leq \frac{1}{2\,\text{máx}\{C_1, \alpha^2\}},$$

*entonces,*

$$\|\Phi_{u_0}(u)\|_{X_{s,b}} \leq \alpha.$$

*Por lo tanto,*

$$\Phi_{u_0}(u) \in \mathcal{X}_\alpha.$$

*Un argumento similar demuestra que para* $u, v \in \mathcal{X}_\alpha$

$$\begin{aligned}\|\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v)\|_{X_{s,b}} &\leq \left\|\frac{\psi_1(t)}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)\partial_x^3}\psi_\delta(\tau)\,\partial_x\left(u^2(\tau) - v^2(\tau)\right)d\tau\right\|_{X_{s,b}} \\ &\leq c\rho^\beta\alpha\,\|u+v\|_{X_{s,b}}\,\|u-v\|_{X_{s,b}} \\ &\leq 2c\rho^\beta\alpha\,\|u-v\|_{X_{s,b}} \\ &\leq \frac{1}{2}\,\|u-v\|_{X_{s,b}}\,.\end{aligned}$$

*Por lo tanto, la aplicación* $\Phi$ *es una contracción de* $\mathcal{X}_\alpha$ *en sí mismo. Por el teorema de punto fijo de Banach, existe exactamente un punto fijo* $u$ *de* $\Phi_{u_0}(u)$ *en* $\mathcal{X}_\alpha$ *solución de la ecuación para* $T < \rho$*, es decir*

$$u(t) = \psi_1(t)\,e^{-t\partial_x^3}u_0 - \frac{\psi_1(t)}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)\partial_x^3}\psi_\delta(\tau)\,\partial_x u^2(\tau)\,d\tau. \tag{4.23}$$

*La regularidad adicional*

$$u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}))$$

*se prueba como sigue. Usando la ecuación integral(4.23) y las proposiciones (4.4) y (4.5), para* $0 \leq \tau < t \leq 1$ *y* $t - \tau \leq \Delta t$ *resulta que*

$$\begin{aligned}\|u(t) - u(\tau)\|_{H^s} &\leq \left\|e^{(t-\tau)\partial_x^3}u(t) - u(\tau)\right\|_{H^s} \\ &\quad + c\left\|\int_\tau^t e^{-(t-\tau)\partial_x^3}\psi^2\left(\frac{t-\tau}{\Delta t}\right)\partial_x u^2(\tau)\,d\tau\right\|_{H^s} \\ &\leq \left\|e^{(t-\tau)\partial_x^3}u(t) - u(\tau)\right\|_{H^s} + c\left\|\psi^2\left(\frac{t-\tau}{\Delta t}\right)\partial_x u^2\right\|_{X_{s,b-1}} \\ &\leq \left\|e^{(t-\tau)\partial_x^3}u(t) - u(\tau)\right\|_{H^s} + c\,(\Delta t)^{\frac{b-b'}{8(b-b')}}\left\|\partial_x u^2\right\|_{X_{s,b'-1}} \\ &\leq \left\|e^{(t-\tau)\partial_x^3}u(t) - u(\tau)\right\|_{H^s} + c\,(\Delta t)^{\frac{b-b'}{8(b-b')}}\|u\|_{X_{s,b'}}^2 \\ &= o(1)\end{aligned}$$

*cuando* $\Delta t \to 0$*, esto da la propiedad de persistencia.* □

**5. Agradecimiento.** Al Dr. Juan Ernesto Montealegre Scott, docente adscrito a la sección matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por haberme brindado su apoyo incondicional en la preparación del presente artículo.

Referencias

[1] J. BONA AND R. SMITH. *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation.* Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A **278** (1975), 555-601.

[2] J. BOURGAIN. *Fourier transformer estriction phenomena for certain lattice subsets and applications to non linear evolution equations*. Geom. Funct. Anal. 3 (1993) 107–156, 209–262..

[3] H. BREZIS. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.*Universitext. Springer-New York. (2010).

[4] T. CAZENAVE AND A. HARAUX. *An Introduction to Semilinear Evolution Equation*. Oxford Sci. Publ. (1998).

[5] R. J. IORIO AND V. IORIO. *Fourier Analysis Partial differential equations.* Cambridge University Press, Inc. N.York (2001).

[6] R.J. IORIO JR. AND W.L.V. NUNES. *Introdução à Equações de Evolução Não Lineares.* $18^0$ Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA/CNPq, (1991).

[7] T. KATO. *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations*. Lecture and Notes in Mathematics, **448** (1975), 25-70.

[8] C. E. KENIG, G. PONCE AND L. VEGA. *A bilinear estimate with application to the KdV equation, J. Amer. Math Soc.*,9, (1996) 573-603

[9] F. LINARES AND G. PONCE. *Introduction to nonlinear dispersive equations.*Publicaciones Matemáticas. Impa.Brasil.(2008)

[10] J. MONTEALEGRE AND S. PETROZZI. *Operadores disipativos maximales.* Informe de investigación, N°2 Serie B, PUCP, (1998).

[11] R. RACKE. *Lectures on nonlinear evolution equations*. Initial Value Problems, (1982), 88-90.

[12] J. C. SAUT AND R. TEMAN. *Remarks on the Korteweg- de Vries equation*. Israel J. of Math., 24, (1976), 78-87.