Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 04(01): 82 - 101 (2017)

Existencia global y explosión de la solución de un problema de difusión - reacción.

Global existence and blow up of the solution of a problem diffusion - reaction.

Julio Becerra Saucedo *

Received, Jan. 20, 2017 *Accepted, May. 20, 2017*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2017.01.09

Resumen

En este artículo se hace un estudio analítico sobre la existencia global y local de la solución de un problema de difusión - reacción. Se demuestra que si la solución existe localmente entonces ésta llega a explotar en tiempo finito. Este resultado se extiende al caso en que la solución exista globalmente. Se llega a concluir que el tiempo máximo de existencia de la solución depende del dominio, del término que representa la reacción en la ecuación y de una función prueba definida en este trabajo. Así mismo se plantea la posibilidad de extender la existencia local a global usando el concepto de solución propia.

Palabras clave. problema de difusión - reacción, existencia global, existencia local, solución explosiva, tiempo de exposión.

Abstract

This article presents an analytical study on the local and global existence of the solution of diffusion - reaction problem. We show that if the solution exists locally then, it blows up in finite time. This result covers the case that the solution exists globally. We concluded that the maximum time of existence of the solution depends on the domain, the term representing the reaction in the equation and a test function defined in this job. Likewise we propose the possibility of extending the local existence to the global one using the proper solution framework.

Keywords. diffusion - reaction problem, global existence, local existence, blow up solution, blow up time

1. Introducción. Muchos problemas físicos son modelados analizando el balance de dos fenómenos: la difusión y la reacción. Según [47], puede entenderse al primero como la dispersión de las especies (sustancias) involucradas en el proceso a lo largo del dominio físico del problema (movimiento local), y el segundo, como el proceso de interacción mediante el cual se generan o se consumen las especies involucradas (crecimiento, cambios de estado, etc).

Las ecuaciones de difusión - reacción son modelos matemáticos que explican cómo la concentración de una o más especies distribuidas en un espacio (dominio físico) se transforman bajo la influencia de dos procesos: reacciones químicas locales y difusión. Estos tipos de ecuaciones cubren una amplia variedad de modelos físicos en muchos campos de la ciencia, como por ejemplo, procesos biológicos de aparición de manchas en la piel de ciertos animales [30, 47], ondas viajantes [23, 30, 46], dinámica de poblaciones y reacciones químicas [30], entre otros.

En general, una ecuación de difusión - reacción es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = div(k(x).\nabla u(x,t)) + f(x,t,u(x,t),\nabla u(x,t)), \tag{1}$$

*Julio José Augusto Becerra Saucedo, Facultad de Ingeniería, Universidad César Vallejo, Av. Larco cdra. 17, Trujillo-Perú. *jjbecerras@ucvvirtual.edu.pe*.

donde $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega$ es un conjunto abierto y $t \in [0, +\infty)$. $u : \Omega \times \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función incógnita. k y f son funciones debidamente definidas según el problema en particular que se estudie.

Asociados a la ecuación (1) puede considerarse tanto condiciones iniciales como condiciones de frontera, del tipo Dirichlet, Neumman, Robin o mixtas.

En este trabajo se considera el problema particular:

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = f(x,t,u(x,t)), & (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \mathrm{x} \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,+\infty), \end{cases} \tag{2}
$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω es conjunto abierto y acotado con frontera suave, f es continua en (x,t) y localmente Lipschitz en u. $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y es además no negativa en Ω.

Se dice que una solución $u(x,t)$ de (2) existe localmente cuando u está definida en $t \in [0,T)$, para $T < +\infty$. Si $T = +\infty$, entonces se dirá que la solución existe de forma global.

Actualmente existe una amplia bibliografía respecto a la existencia local y global de soluciones de (2) cuando $f(x,t,u) = g(x,t)$, $f \equiv 0$, $f(x,t,u) = u^p$ ó $f(x,t,u) = e^u$, ver por ejemplo [1,2,8,9,11,12,14,26,27,30,33,36,37,40,45,46,49].

En [1,2] Arrieta y Rodríguez estudiaron el problema:

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + f(x,u(x,t)), & (x,u(x,t)) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \mathrm{x} \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & \mathrm{x} \in \Gamma_D, t > 0, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \eta} = g(x,u(x,t)), & \mathrm{x} \in \Gamma_N, t > 0, \end{cases} \tag{3}
$$

donde $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ es una partición disjunta de la frontera de Ω, f y g son funciones suaves. Los subíndices D y N en Γ indican la parte de la frontera con condiciones del tipo Dirichlet y Neumman, respectivamente. $u_0 \in L^\infty(\Omega), u_0(x) \geq 0$ para $x \in \Omega$. Bajo ciertas hipótesis adicionales sobre f y g se llegó a establecer que la solución de (3) está definida globalmente sobre una vecindad de Ω, y que además, es acotada. Esto es, existen $\delta, M > 0$ tales que:

$$
\sup_{0 \leq t < \infty,\ x \in B(x_0,\delta) \cap \overline{\Omega}} u(x,t,u_0) \leq M.
$$

Aquí se introdujo un concepto nuevo de solución débil, denominada solución propia minimal (estudiado por Váquez y Galaktionov en [19,20,43,48]), que bien puede ser una solución clásica bajo algunas consideraciones.

En [40] se generaliza este resultado cuando $\Gamma_N = \emptyset$ y f localmente Lipschitz en x, con $f \to -\infty$ cuando $u \to +\infty$. Se demuestra la existencia global de la solución y que además existe una función continua no negativa $M(x,t)$ tal que:

$$
0 \leq u(x,t) \leq M(x,t).
$$

Chen y Derrick en [9] estudiaron el problema en su forma vectorial:

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + f(u(x,t)), & \mathrm{x} \in \Omega, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & \mathrm{x} \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & \mathrm{x} \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \tag{4}
$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suave y las funciones $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ y $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ son vectoriales con $m \geq 1$.

Enfocando el problema desde la Teoría de Semigrupos y apoyándose en la solución positiva del problema:

$$
\begin{cases} \Delta\Phi + f(\Phi) = 0, \\ \qquad \Phi|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}
$$

y considerando $\phi \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, para $\alpha \in (0,1)$ y f una función localmente Lipschitz con $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y satisfaciendo algunas condiciones de desigualdad, se determinó que la solución existe globalmente con decaimiento exponencial, esto es:

$$u(x,t) \to 0, \quad t \to +\infty \quad, \forall x \in \Omega.$$

A un resultado similar llegaron Mounmeni y Derradji en [37] en el caso $m = 2$. Los resultados en [9] son los mismos a los que se llegó en [8] para los casos $g(u) = 1$ y $h(u, \nabla u) = 0$. Cuando en (4), $f(u) = |u|^{\alpha} u$, para $\alpha > 0$ se determinó que la solución existe de forma global para algunos valores de $\alpha = \alpha(n)$ y funciones $\phi \in C_0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, para ciertos $p > 1$ (ver [10, 11, 49]).

Un trabajo muy interesante, fue el de Meneses y Quass ([35, 36]) quienes estudiaron el problema de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = F(\Delta u(x,t), x) + u^p(x,t) & (x,t), \in \Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{x} \in \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

donde $u : \Omega \times (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : S_n \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. S_n denota al conjunto de matrices reales $n \times n$ y simétricas y $\Gamma = \Omega \times (0,+\infty)$. Aquí se introduce el concepto de solución viscosa. Haciendo uso de la teoría de semigrupos, del principio de comparación y bajo ciertos supuestos sobre F y u_0 se determinó que existe un exponente $p = p(F)$, denominado exponente crítico, tal que $u(x,t)$ está definida para todo $t > 0$.

Como se ha visto líneas atrás, la existencia de soluciones de (2) está, generalmente, garantizada sólo para tiempos ‘pequeños’. Más aún, existe la posibilidad que a partir de condiciones iniciales regulares, las soluciones desarrollen ciertas singularidades en un tiempo finito.

Una forma muy conocida de aparición de singularidades se da cuando existe un tiempo $T_0 < +\infty$ tal que la solución de (2), esté definida para $t \in [0, T_0)$ y que $\lim_{t \to T_0^-} |u(x,t)| = +\infty$, es decir, la solución u explote. A este valor T_0 se le denomina, justamente, tiempo de explosión.

Como escribe [39], por muchos años, algunos autores consideraron para este tipo de problemas que las soluciones explosivas eran ejemplos de patología, útiles para establecer solamente las condiciones necesarias para la obtención de soluciones globales, sin embargo estas soluciones obtuvieron un significado más físico cuya aplicabilidad sigue aumentando aún en estos tiempos (ver [23, 30, 46, 47]).

Hoy en día existen muchos trabajos que tratan sobre a la existencia de soluciones explosivas en problemas de difusión - reacción [2, 3, 5, 6, 8–10, 12, 13, 15, 16, 18–20, 25, 27–30, 35, 36, 41–44, 48, 49]. Algunos de estos trabajos discuten la posibilidad de extender las soluciones definidas localmente en $[0, T)$ a $[0, +\infty)$ y que exponen además resultados correspondientes los denominados exponentes de fujita los cuales permiten dar una respuesta apriori sobre la presencia de soluciones explosivas para determinadas ecuaciones de la forma (4) con $m = 1$ ó $F(\Delta u(x,t), x) = \Delta u(x,t)$ en (5). Los estudios en este campo están destinados a controlar de forma condicionada el fenómeno de explosión, analizar la tasa de explosión de las soluciones y la regularidad de las mismas.

Los estudios sobre la explosión de la solución u en tiempo finito $T_0 > 0$ están clasificados en casos, éstos dependen de la forma en particular que tiene f. Cuando $f(u) = u^p$, $p > 1$, los trabajos de [15] y [19] establecen que u explota si $1 < p < 1 + 2/n$ para una clase de funciones $u_0 \in L^{\infty}$.

Ishige [28] reúne varios resultados respecto a la explosión de las soluciones de (4) para $m = 1$ se obtuvo que conforme $t \to T_0$ la solución $u(x,t)$ toma un comportamiento similar a $(p-1)^{-\frac{1}{p-1}} T_0^{-\frac{1}{p-1}}$.

Por otro lado, en [8] se determinó que si $\phi(x) \in C_0^{1+\beta}(\bar{\Omega})$ la solución de un problema similar a (4) explota en un tiempo T_0 dado por:

$$T_0 \leq \frac{1}{\alpha c_2} \Big(\int_{\Omega} \sqrt{\phi} \Phi dx \Big)^{-2\alpha}$$

donde α y Φ son tomados como en [9] y c_2 es una constante a determinar.

Similarmente, en [44] se desarrollan cotas superiores para la solución de (5) con $F(\Delta u, x) = \Delta u$ y se hallaron algunas estimaciones para el tiempo de explosión T_0.

En [2, 3, 8, 13] estudian problemas como (3) y (4). Se establecieron resultados complementarios sobre existencia global de soluciones y explosión de las mismas. En [1, 2], si $f(u)$ es acotada superiormente por una clase de funciones βu^p, $\beta > 0, 1 \leq p < 2r - 1$, para $r > 1$, entonces la solución explota en tiempo finito, si por el contrario $1 < 2r - 1 < p$, entonces la solución u existe globalmente y es acotada. A un criterio similar se llega en [9], sólo que en este caso se trabajó para sistemas.

En consecuencia y por todo lo mencionado anteriormente, surgen preguntas al tratar problemas de la forma (2), (3), (4) ó (5): ¿la solución será global y acotada?, si no es global, ¿habrá explosión? y si la solución explota, ¿cuándo lo hace?. En este artículo se pretende dar respuestas a estas preguntas. Para los resultados de existencia y unicidad se soluciones se empleará la Teoría de Semigrupos, y algunos elementos del análisis funcional y real. Los conjuntos bases en los que se trabajó serán los espacios C^k, L^p, H_0^1.

1.1. Solución propia minimal de un problema de difusión - reacción.

El concepto de solución propia minimal fue introducido por Baras y Cohen [6] y fue desarrollado por Galaktionov y Vazquez [19, 20] para el caso de problemas de difusión - reacción con condiciones de frontera tipo Dirichlet.

Para formalizar el concepto de solución propia considerar el siguiente problema de valor inicial:

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + f(u(x,t)), & \text{x} \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{x} \in \Omega, \end{cases}$$

donde f es una función de Lipschitz global en $\mathbb{R}^+$.

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach, por ejemplo $\mathbb{X} = L^2(\Omega)$, y $\mathbb{B} \subset X$, el cual puede se puede tomar de tal forma que la ecuación de (6) genere un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en $\mathbb{B}$. Según [20] es posible tomar $\mathbb{B} = L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Considerar ahora una familia de operadores "aproximación" lineales y acotados $\{P_n : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{B} \subset \mathbb{X}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(p_1) La familia P_n es ordenada, esto es, para cada $u \in \mathbb{X}$ y $n > m$ se tiene que $P_n u \geq P_m u$.
(p_2) P_n es uniformemente continua para todo $n \in \mathbb{N}$.
(p_3) $P_n u \to u$ en $\mathbb{X}$ cuando $n \to \infty$.

Definición 1. *Sean $(\mathbb{X}, ||.||_X)$ un espacio de Banach, $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo sobre $\mathbb{X}$, $u \in \mathbb{X}$ y $t > 0$. Se define $T(t)$ en la forma:*

$$T(t)u = \lim_{n\to\infty} G(t)P_n u$$

como la extensión de $G(t)$.

Teorema 1. *Sea $T(t)$ la extensión de $G(t)$. Entonces $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo en $\mathbb{X}$. El límite es independiente de la sucesión aproximante $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface (p_1), (p_2) y (p_3).*

Para la demostración de este resultado se necesita conocimientos avanzados de la Teoría de Semigrupos, la cual se puede consultar en [20].

Definición 2. *A $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ se le denomina semigrupo límite de $\{G(t)\}_{t\geq 0}$.*

Definición 3. *Para cada $u_0 \in \mathbb{X}$ la función $u : \Omega \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por:*

$$u(x,t) = T(t)u_0(x)$$

es denominada solución propia del problema (6).

1.1.1. Construcción de la solución propia minimal de un problema de difusión - reacción [1]. Considerar el problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = f_n(x,t,u(x,t)), & \text{x}, \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{x} \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & \text{x} \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \tag{7}$$

La idea de la construcción de la solución propia minimal para el problema (2) es la aproximación inferior de la función no lineal f por una sucesión monótoma $\{f_n\}$ tal que la solución $u_n(x,t)$ del problema aproximante (7) esté definida globalmente en el tiempo.

Por las propiedades de la monotonía se tiene que, para cada punto (x,t) la sucesión $\{u_n(x,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente. Así estos elementos convergen a $u(x,t) \in [0,+\infty]$ (observar que no se excluye el hecho que u podría ser $+\infty$). Esta función es, justamente, la *solución propia* del problema.

Para la ecuación (7) se construyen las soluciones propias minimales como sigue: sea $f_n(x,u) = \min\{f(x,t,u(x,t)), n\}$. Observar que si f es localmente Lipschitz en u y uniformemente en x, esto es, para cada $R > 0$ existe un $L(R) > 0$ tal que:

$$|f(x,u) - f(x,v)| \leq L(R)|u - v|, \qquad |u|, |v| \leq R, \qquad x \in \Omega.$$

Esta condición y el hecho que la función f_n es acotadas por encima de n implica que las soluciones de (7) están definidas para todo $t \geq 0$.

Ahora, observar también que por la monotonía de f_n, $f_n \leq f_{n+1}$ se tiene que: $0 \leq u_n(x,t) \leq u_{n+1}(x,t)$ y por lo tanto $u_n(x,t) \nearrow u(x,t)$ cuando $n \to \infty$. Más aún, si $u(x,t) < \infty$ para cada $(x,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T]$ entonces ésta coincide con la solución clásica para $t \in [0,T]$.

Puesto que las aproximaciones $u_n(x,t)$ son soluciones clásicas y están definidas para todo $t \geq 0$, es posible aplicar el principio de comparación para estas aproximaciones que será el mismo para sus límites, las soluciones propias minimales. En particular si $0 \leq u_0 \leq v_0$ entones: $u(x,t,u_0) \leq u(x,t,v_0)$ para todo $t \geq 0$ (donde $u(x,t,u_0)$ y $v(x,t,v_0)$ son las soluciones de las ecuación (2) con condiciones iniciales u_0 y v_0, respectivamente), entendiéndose que si $u(x,t,u_0) = +\infty$ en algún punto (x,t) entonces se tendrá que $u(x,t,v_0) = +\infty$.

En resumen, la solución propia minimal es la extensión, en caso de presentarse explosión, de la solución clásica después del tiempo de explosión.

Por ejemplo, sea el problema:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = f(u(t)) \\ u(0) = u_0 > 0, \end{cases} \tag{8}$$

donde f es positiva, creciente y regular. En particular, cuando $f(u) = u^p, p > 1$, esta ecuación tiene como única solución a:

$$u(t) = C_p(T-t)^{-\frac{1}{p-1}},$$

donde $T = u_0^{1-p}(p-1)^{-1}$ y $C_p = (p-1)^{-\frac{1}{p-1}}$. Es posible, entonces por lo descrito anteriormente, extender la solución clásica $u(t)$ obtenida, a $\bar{u} = \bar{u}(t)$ definida como:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} C_p(T-t)^{-\frac{1}{p-1}}, & t \in [0,T) \\ +\infty, & t \in [T,+\infty). \end{cases}$$

De hecho se demuestra que $\bar{u}(t)$ es solución de (8), para la prueba de esto y un estudio más detallado se puede consultar [43].

2. Material y Métodos.

2.1. Objeto de estudio.

Sea $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable sobre Ω y una vez diferenciable en $(0, T)$ tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = f(x,t,u(x,t)), & (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{x} \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty), \end{cases} \tag{9}$$

donde: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω es conjunto abierto y acotado con frontera suave, f es una función continua en (x, t) y globalmente Lipschitz en u, esto es, existe una constante $L > 0$ tal que:

$$|f(x,t,u(x,t)) - f(x,t,v(x,t))| \leq L|u(x,t) - v(x,t)|, \ \forall x \in \Omega, t > 0.$$

$u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y además es no negativa en Ω. En los trabajos de [35, 36] se consideró que u_0 es uniformemente continua y acotada.

Es necesario recalcar que se ha resuelto el problema (9) usando como hipótesis básicas que:
1. la solución $u(x, t)$ no presenta explosión en la variable espacial x y,
2. de presentarse explosión en la variable temporal t, éste lo haría para $T > 0$, es decir, no hay explosión en la condición inicial.

2.2. Instrumentación.

Sea el multi índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, con α_i enteros no negativos y $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se denota la derivada de orden α como:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}},$$

entonces:

Definición 4. *Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$. Se definen los espacios:*

(a) *$UCB(\Omega)$ como el conjunto de funciones $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que son uniformemente continuas y acotadas sobre Ω.*

(b) *$C(\Omega)$ como el conjunto de funciones $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que son continuas.*

(c) *$C^k(\Omega)$ como el conjunto de funciones $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $D^\alpha u$ es continua sobre $\overline{\Omega}$ para todo $|\alpha| < k$.*

(d) *$C^\infty(\Omega)$ como el conjunto de funciones $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que son infinitamente diferenciables sobre Ω y continuas sobre $\overline{\Omega}$.*

(e) *$C_0^\infty(\Omega)$ como el conjunto de funciones $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que son infinitamente diferenciables sobre Ω, son continuas sobre $\overline{\Omega}$ y tienen soporte compacto.*

Los espacios $UCB(\Omega)$, $C(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ y $C_0^\infty(\Omega)$ son espacios de Banach con norma:

$$||u||_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

El espacio $C^k(\Omega)$ es un espacio de Banach con norma:

$$||u||_k = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| + \sum_{i=1}^{k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\frac{d^i u(x)}{dx^i}|$$

Definición 5. *Sea Ω un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$. Se definen:*

(a) *El espacio $L^p(\Omega)$ es el conjunto de clases de equivalencia de funciones de valor real (o complejo) medibles $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$.*
$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty$$

(b) *El espacio* $L^{\infty}(\Omega)$ *es el conjunto de clases de equivalencia de funciones de valor real (o complejo) medibles* $u:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que existe* $M \geq 0$ *tal que* $|u(x)| \leq M$ *c.t.p.*
$L^{\infty}(\Omega)$ *es un espacio de Banach con la norma*

$$||u||_{L^{\infty}(\Omega)} = \inf\{M \geq 0 : |u(x)| \leq M \ \ c.t.p. \ en \ \Omega\}.$$

(c) *Para* $p \in [1,\infty]$ *y* $k \in \mathbb{N}$ *se definen los espacios de Sobolev como:*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)/D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), \ \forall \ |\alpha| < k\}$$

$W^{k,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach con la norma:*

$$||f||_{W^{k,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|<k} ||D^{\alpha}f||^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty$$

ó

$$||f||_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq k} ||D^{\alpha}f||_{L^{\infty}(\Omega)}$$

Si $p = 2$*, entonces el espacio* $W^{k,2}(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert y será denotado por* $H^k(\Omega)$.

(d) $H_0^k = \overline{H^k\Omega \cup C_0^{\infty}(\Omega)}$.

En base a los espacios definidos anteriormente surgen:

Definición 6. *Sea* $T \in [0,+\infty]$ *y dado el espacio de Banach* $\mathbb{X}$ *con norma* $||.||_{\mathbb{X}}$. *Se definen:*

(a) $C([0,T];\mathbb{X}) = \{u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{X}$, *u es continua*$\}$, *con la norma:*

$$||u||_{C([0,T];\mathbb{X})} = \sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_{\mathbb{X}}$$

(b) $C^k((0,T);\mathbb{X}) = \{u : (0,T) \longrightarrow \mathbb{X}$, *u es k veces diferenciable en* $(0,T)$ *y continua sobre* $[0,T]\}$, *con la norma:*

$$||u||_{C^k([0,T];\mathbb{X})} = \sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_{\mathbb{X}} + \sum_{i=1}^{k} \sup_{t\in[0,T]} ||\frac{d^i u(t)}{dt^i}||_{\mathbb{X}}$$

(c) $L^p([0,T];\mathbb{X}) = \{u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{X}$, *u es medible y* $\int_0^T ||u(t)||^p_{\mathbb{X}}dt < +\infty\}$. *con la norma:*

$$||u||_{L^p([0,T];\mathbb{X})} = (\int_0^T ||u(t)||^p_{\mathbb{X}}dt)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty$$

(d) $L^{\infty}([0,T];\mathbb{X}) = \{u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{X}$, *u es medible y* $\sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_{\mathbb{X}} < +\infty\}$, *con la norma:*

$$||u||_{L^{\infty}([0,T];\mathbb{X})} = \sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_{\mathbb{X}}$$

(e) $UCB([0,T],\mathbb{X}) = \{u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{X}$, *u es uniformemente continua y acotada*$\}$, *con la norma:*

$$||u||_{UCB([0,T],\mathbb{X})} = \sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_{\mathbb{X}}$$

2.3. Métodos y técnicas.

2.3.1. Método de semigrupos de operadores. Existencia y unicidad de la solución de un problema de difusión - reacción.

La idea de aplicar el marco de semigrupos para problemas no lineales de ecuaciones en derivadas parciales ha sido ampliamente utilizado en problemas de difusión y reacción (Kovács [4], Galaktionov y Vázquez [19, 20, 48], De Assis [14], Iancu [26] y Machado [34]). Si bien es cierto que este método no resuelve de manera explícita el problema (2),pero nos proporciona un marco funcional adecuado para aproximar soluciones y establecer en que espacios están dichas soluciones.

Se consideró el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + Au(t) = f(t, u(t)), & \mathrm{t} > 0, \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{X}, \end{cases} \tag{10}$$

donde $-A$ es el generador de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sobre $\mathbb{X}$, $f : [0, T] \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ es una función continua en t y de Lipschitz en u, es decir, $f \in C([0, T] \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$. Notar que es posible considerar $T = +\infty$.

Definición 7. *La función $u : [0, T) \longrightarrow \mathbb{X}$ es una solución clásica de (10) en $[0, T)$ si y sólo si $u \in C^1([0, T]; \mathbb{X}) \cap C([0, T); D(A))$, y u satisface el problema (10).*

Definición 8. *La función $u : [0, T) \longrightarrow \mathbb{X}$ es una solución débil del problema (10) si y sólo si $u \in C([0, T); \mathbb{X})$ y u soluciona (10).*

El siguiente lema ofrece una forma general para obtener la solución de (10) basada en lo que se conoce cómo la fórmula de variación de parámetros usado en la solución de ecuaciones en derivadas ordinarias.

Lema 1. *Sea $f \in L^1([0, T); \mathbb{X})$ y $u_0 \in \mathbb{X}$. Entonces la solución de (10), si es que existe, está dada por la fórmula:*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds. \tag{11}$$

Notar que toda solución débil u de (10) satisface necesariamente (11).

En el siguiente teorema se asegura la existencia y unicidad de la solución débil para el problema (10):

Teorema 2. *Sea $f : [0, T] \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ una función continua en t y globalmente Lipschitz sobre $\mathbb{X}$. Si $-A$ es el generador de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, entonces para cada $u_0 \in \mathbb{X}$ el problema de valor inicial (10) tiene una única solución débil $u \in C([0, T]; \mathbb{X})$. Además la aplicación $u_0 \mapsto u$ es Lipschitz de $\mathbb{X}$ en $C([0, T]; \mathbb{X})$.*

Prueba:

Se conoce que $f \in C([0, T] \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$ es globalmente de Lipschitz sobre $\mathbb{X}$, es decir:

$$||f(t, u) - f(t, v)||_{C([0,T];\mathbb{X})} \leq ||u - v||_{\mathbb{X}}$$

Además, como $-A$ es el generador del semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, entonces:

$$||T(t)||_{C([0,T];\mathbb{X})} \leq C, \text{ donde } C = Me^{wt}$$

Ahora, para $u_0 \in \mathbb{X}$ se define la transformación:

$$F : C([0, T]; \mathbb{X}) \longrightarrow C([0, T]; \mathbb{X})$$

como

$$(Fu)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds.$$

tomando la diferencia y acotando:

$$\begin{aligned} ||(Fu)(t) - (Fv)(t)||_{C([0,T];\mathbb{X})} &= || \int_0^t T(t-s)[f(s, u(s)) - f(v, v(s))]ds||_{C([0,T];\mathbb{X})} \\ &\leq \int_0^t ||T(t-s)||_{C([0,T];\mathbb{X})} . ||f(s, u(s)) - f(v, v(s))||_{C([0,T];\mathbb{X})} ds \\ &\leq \int_0^t ML||u - v||_{\mathbb{X}} ds \leq MLt||u - v||_{\mathbb{X}}, \end{aligned}$$

Así se obtiene:

$$||(Fu)(t) - (Fv)(t)||_{C([0,T];\mathbb{X})} \leq MLt||u - v||_{\mathbb{X}}$$

Luego, por inducción se tiene:

$$||(F^n u)(t) - (F^n v)(t)||_{C([0,T];\mathbb{X})} \leq ML\int_0^t \frac{(MLs)^{n-1}}{(n-1)!}||u-v||_{\mathbb{X}} \leq \frac{(MLt)^n}{n!}||u-v||_{\mathbb{X}},$$

juntando extremos se tiene

$$||(F^n u)(t) - (F^n v)(t)||_{C([0,T];\mathbb{X})} \leq \frac{(MLt)^n}{n!}||u-v||_{\mathbb{X}},$$

luego, para un n suficientemente grande se tendrá que $\dfrac{(MLt)^n}{n!} < 1$, entonces por el teorema del punto fijo, F tiene un punto fijo $u \in C([0,T];\mathbb{X})$. Este punto fijo es la solución de la ecuación integral dada en el Lema 1 y por tanto es una solución débil del problema (10).

Por otro lado, sea v una solución débil del problema de valor inicial (10) con condición inicial v_0, entonces:

$$\begin{aligned}||(Fu)(t) - (Fv)(t)||_{C([0,T];\mathbb{X})} &= ||u(t) - v(t)||_{\mathbb{X}} \\ &\leq ||T(t)u_0 - T(t)v_0||_{\mathbb{X}} + \int_0^t ||f(s,u(s)) - f(s,v(s))||_{\mathbb{X}} ds \\ &\leq M||u_0 - v_0||_{\mathbb{X}} + ML\int_0^t ||u(s)-v(s)||_{\mathbb{X}} ds,\end{aligned}$$

y usando la desigualdad de Gronwall, implica que:

$$||u(t) - v(t)||_{\mathbb{X}} \leq Me^{MLT}||u_0 - v_0||_{\mathbb{X}} \qquad \forall t \in [0,T],$$

finalmente

$$||u - v||_{\mathbb{X}} \leq Me^{MLT}||u_0 - v_0||_{\mathbb{X}}$$

lo cual implica que si $u_0 = v_0$, entonces $u(t) = v(t),\ \forall t \in [0,T]$. Por lo tanto, la solución del problema (10) es única. Además, de la última desigualdad se obtiene que la aplicación $u_0 \mapsto u$ es Lipschitz.$\square$

Corolario 1. *Si A y f satisfacen las condiciones del anterior entonces para cada $g \in C([0,T];\mathbb{X})$ la ecuación integral*

$$w(t) = g(t) + \int_0^t T(t-s)f(s,w(s))ds$$

tiene una única solución débil $w \in C([0,T];\mathbb{X})$.

El siguiente teorema da una caracterización de la solución $u(t)$ de (10) en caso de presentarse el fenómeno de explosión:

Teorema 3. *Sea $f : [0,+\infty) \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$, una función globalmente Lipschitz en t y localmente Lipschitz en u. Si $-A$ es el generador de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sobre $\mathbb{X}$, entonces para cada $u_0 \in \mathbb{X}$ existe $T_{max} \leq +\infty$ tal que el problema de valor inicial (10) tiene una única solución débil en $[0, T_{max})$. Si $T_{max} < +\infty$ entonces:*

$$\lim_{t\to T_{max}} ||u(t)||_{\mathbb{X}} = +\infty.$$

Este teorema es sustancial y trascendente para los fines de este trabajo, pues nos indica que si la solución existe localmente entonces necesariamente ha de presenta explosión y, por tanto será no acotada.

Teorema 4. *Si $-A$ es el generador de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sobre $\mathbb{X}$ y sea $f : [0,T] \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ una función continuamente diferenciable, entonces la solución débil de (10) para $u_0 \in D(A)$ es una solución clásica.*

Para los detalles de las demostraciones de los Teoremas 3 y 4 ver [38].

Teorema 5. Existencia y unicidad, [4].
Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un subconjunto abierto, convexo y acotado, $q : \Omega \times [0,T) \times \mathbb{R}$ una función continua y

diferenciable en la tercera variable con derivada acotada. Entonces el problema:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) + q(x,t,u(x,t)) = g(x,t) & (x,t) \in Q_T, \\
u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \\
u(x,t) = 0 & (x,t) \in \Gamma_T,
\end{cases} \tag{12}
$$

donde $Q_T = [0,T) \times \Omega$ *y* $\Gamma_T = [0,T) \times \partial\Omega$*, tiene una única solución débil.*

Prueba:

La formulación del problema abstracto a (12) es:

$$
\begin{cases}
\dot{u}(t) + Au(t) = F(t,u(t)), \quad \mathrm{t} > 0, \\
u(0) = u_0 \in L^\infty(\Omega),
\end{cases} \tag{13}
$$

donde $F(t,u(t)) = -q(\cdot,t,u(\cdot,t)) + g(\cdot,t)$ y $\dfrac{\partial q}{\partial u}$ es acotada, es decir, para alguna constante $k > 0$ se tiene: $|\dfrac{\partial q(x,t,u)}{\partial u}| \leq k$.

Para usar el Teorema 2 se tiene que probar que la función F es localmente Lipschitz en u:

$$
\begin{aligned}
||F(t,u(t)) - F(t,v(t))||^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |-q(x,t,u(x,t)) + q(x,t,v(x,t))| dx \\
&= \int_\Omega |\frac{\partial q(x,t,w(x,t))}{\partial w}|^2 |u(x,t) - v(x,t)|^2 dx \\
&\leq k^2 ||u(t) - v(t)||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Uniendo extremos y extrayendo la raíz cuadrada se tiene:

$$
||F(t,u(t)) - F(t,v(t))||_{L^2(\Omega)} \leq k||u(t) - v(t)||_{L^2(\Omega)},
$$

por tanto, F es de Lipschitz en u. En consecuencia, por el Teorema 2, la ecuación (13) tiene una única solución débil $\square$.

Obsérvese que si la función $h(x,t,u) = g(x,t) - q(x,t,u)$ es diferenciable entonces por el Teorema 4, la solución débil del problema (13) es también una solución clásica.

Notar además que este teorema nos muestra que la solución:

$$
u \in C([0,T); L^2(\Omega)),
$$

y agregando la hiótesis de diferenciabilidad sobre h, se tiene que:

$$
u \in C([0,T); L^2(\Omega)) \cap C^1((0,T); L^2(\Omega)).
$$

Para algunas variantes del teorema de existencia y unicidad se pueden consultar [47, 49].

3. Resultados.

Se enuncia el resultado principal de este trabajo:

Teorema 6. *Sea el problema* (2)*:*

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t,u(x,t)), & x \in \Omega, t > 0, \\
u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\
u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0.
\end{cases}
$$

donde f es continua en (x,t) y de Lipschitz en u con constante de Lipschitz L, satisfaciendo una de las dos condiciones:

i) $f(x,t,-u) = -f(x,t,u)$

ii) $f(x,t,0) = 0$
y $u_0 \in L^\infty(\Omega)$*, con* $u_0(x) \geq 0$*, para* $x \in \overline{\Omega}$*. Sea* $k > 0$ *se define la función:*

$$\phi(x,t) : \overline{\Omega} \times (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

como:

$$\phi(x,t) = e^{-k(||x||^2 + t^2)}.$$

Entonces:

(I) *Existe una constante* $C > 0$ *tal que:*

$$\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx \leq 2C||u||_{L^1([0,T];H_0^1(\overline{\Omega}))}$$

ó:

$$\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx \leq 2C\sqrt{T}||u||_{L^2([0,T];H_0^1(\overline{\Omega}))}$$

(II) *Si existe un* $0 < T < +\infty$ *tal que:*

$$\int_\Omega u(x,t)\phi(x,t)dx = +\infty$$

cuando $t \to T$*. Entonces* $u(x,t)$ *está definida en* $[0,T)$*, siendo* T *el tiempo de explosión. Además se define la solución propia minimal del problema como:*

$$\bar{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & t \in [0,T) \\ +\infty, & t \in [T, +\infty). \end{cases}$$

(III) *Sea* $T < +\infty$ *tiempo de explosión. Si se verifica que:*

- $u \in L^\infty((0,T); L^\infty(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T); L^\infty(\overline{\Omega}))$ *y:*

$$||u||_{L^2((0,T);L^\infty(\overline{\Omega}))} \leq ||u||_{L^\infty((0,T);L^\infty(\overline{\Omega}))}$$

- *existe* $\delta > 0$ *tal que:*

$$||u||_{L^\infty((0,T);L^\infty(\overline{\Omega}))} \leq \delta||u(.,t)||_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x,t)\phi(x,t)dx$$

$\forall\ t \in [0,T)$.

entonces para todo $T_0 \in (0,T)$*, existe* $\delta_1 = \delta_1(T_0)$ *tal que:*

$$||u||_{L^2((0,T);L^\infty(\overline{\Omega}))} \leq \frac{|\Omega|}{|\Omega| - D\delta_1\sqrt{T}}.||u_0||_{L^\infty(\Omega)}$$

$\forall t \in [0, T_0]$*. Así se obtiene que:*

$$T < \left(\frac{|\Omega|}{D\delta_1}\right)^2,$$

donde $D = C + \sqrt{2k}|\Omega|^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.

Prueba:

De la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t,u(x,t))$$

multiplicando por $\phi(x,t)$ e integrando sobre $\Omega \times [0,T)$, donde T es el tiempo máximo de existencia:

$$\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx = \int_\Omega \int_0^T \Delta u(x,t)\phi(x,t)dtdx + \int_\Omega \int_0^T f(x,t,u(x,t))\phi(x,t)dtdx,$$

Notar que $\phi(.,t) \in C^{\infty}(\Omega)$, $\forall\ t \in [0,T]$. Aplicando la identidad de Green e intercambiando el orden de integración:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx &= \int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,t)\phi(x,t)dSdt - \int_0^T\int_{\Omega}\nabla u(x,t)\nabla\phi(x,t)dxdt\\ &+ \int_0^T\int_{\Omega} f(x,t,u(x,t))\phi(x,t)dxdt\end{aligned}$$

tomando el valor absoluto y usando la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega}\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx\right| &\le \int_0^T\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,t)\phi(x,t)\right|dSdt + \int_0^T\int_{\Omega}\left|\nabla u(x,t)\nabla\phi(x,t)\right|dxdt\\ &+ \int_0^T\int_{\Omega} |f(x,t,u(x,t))\phi(x,t)|dxdt\end{aligned}$$

Estimando las integrales por separado:

1)

$$\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,t)\phi(x,t)\right|dSdt \le \int_0^T\left[\int_{\partial\Omega}|\nabla u(x,t).\eta(x)|dS\right].|\phi(x,t)|dt$$

pero:

$$||\nabla\phi(x)|| = 2k||x||e^{-k(||x||^2+t^2)} \le \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}$$

luego:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,t)\phi(x,t)\right|dSdt &\le \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}\int_0^T\left[\int_{\partial\Omega}|\nabla u(x,t)|.|\eta(x)|dS\right]dt\\ &\le \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}\int_0^T\left[\int_{\partial\Omega}|\nabla u(x,t)|\cdot 1dS\right]dt\\ &\le \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}\int_0^T\left[\left(\int_{\partial\Omega}|\nabla u(x,t)|^2dS\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_{\partial\Omega}1^2dS\right)^{\frac{1}{2}}\right]dt\\ &= \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}\int_0^T||\nabla u(.,t)||_{L^2(\partial\Omega)}.|\partial\Omega|^{\frac{1}{2}}dt\\ &\le \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}\int_0^T||\nabla u(.,t)||_{L^2(\Omega)}.|\Omega|^{\frac{1}{2}}dt\\ &\le \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\int_0^T||\nabla u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}dt\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\int_0^T\left[\int_{\Omega}|\nabla u(x,t)\nabla\phi(x)|dx\right]dt &\le \int_0^T\left[\int_{\Omega}|\nabla u(x,t)|.\sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}dx\right]dt\\ &\le \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}\int_0^T\left[\left(\int_{\Omega}|\nabla u(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_{\Omega}1^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]dt\\ &= \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\int_0^T\left(\int_{\Omega}|\nabla u(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}dt\\ &= \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\int_0^T||\nabla u(.,t)||_{L^2(\Omega)}dt\\ &\le \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\int_0^T||\nabla u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}dt\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\Omega}|f(x,t,u(x,t))\phi(x,t)|dxdt &\le \int_0^T\int_{\Omega}|f(x,t,u(x,t))|.|\phi(x,t)|dxdt\\ &\le \int_0^T\int_{\Omega}|f(x,t,u(x,t))|dxdt\end{aligned}$$

Por otro lado, de la definición de Lipschitz de f con $v = -u$ y usando i):

$$\begin{aligned}|f(x,t,u) - f(x,t,-u)| &\leq L|u-(-u)|\\ |2f(x,t,u)| &\leq L|2u|\\ |f(x,t,u)| &\leq L|u|,\end{aligned}$$

o de la misma definición de Lipschitz de f con $v = 0$ y usando ii):

$$\begin{aligned}|f(x,t,u) - f(x,t,0)| &\leq L|u-0|\\ |f(x,t,u)| &\leq L|u|\end{aligned}$$

En ambos casos, resulta que:

$$|f(x,t,u)| \leq L|u|.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega |f(x,t,u(x,t))\phi(x)|dxdt &\leq \int_0^T \left[\int_\Omega |f(x,t,u(x,t))|dx\right] dt\\ &\leq \int_0^T \left[\int_\Omega L|u(x,t)|dx\right] dt\\ &= L\int_0^T \left[\int_\Omega |u(x,t)|,1dx\right] dt\\ &\leq L\int_0^T \left[\left(\int_\Omega |u(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_\Omega 1^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] dt\\ &= L|\Omega|^{\frac{1}{2}}\int_0^T \left(\int_\Omega |u(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} dt\\ &= L|\Omega|^{\frac{1}{2}}\int_0^T ||u(.,t)||_{L^2(\Omega)}dt\\ &\leq L|\Omega|^{\frac{1}{2}}\int_0^T ||u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}dt\end{aligned}$$

Luego, reuniendo las estimaciones se tiene:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx\right| &\leq \int_0^T\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,t)\phi(x,t)\right|dSdt + \int_0^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)\nabla\phi(x,t)|\,dxdt\\ &+ \int_0^T\int_\Omega |f(x,t,u(x,t))\phi(x,t)|dxdt\\ &\leq \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\int_0^T ||\nabla u(.,t)||_{L^2(\Omega)}dt + \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\int_0^T ||\nabla u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}dt\\ &+ L|\Omega|^{\frac{1}{2}}\int_0^T ||u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}dt\\ &= \left(2\sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\right)\int_0^T ||\nabla u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}\\ &+ L|\Omega|^{\frac{1}{2}}\int_0^T ||u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}dt\end{aligned}$$

Sea $B = 2\sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}$, entonces:

$$\left|\int_\Omega\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x)dtdx\right| \leq B\int_0^T ||\nabla u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}dt + L|\Omega|^{\frac{1}{2}}\int_0^T ||u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}dt$$

Sea ahora $C = \text{máx}\{B, L|\Omega|^{\frac{1}{2}}\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx\right| &\leq C\left(\int_0^T ||\nabla u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}dt + \int_0^T ||u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}dt\right)\\
&= C\int_0^T \left(||\nabla u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})} + ||u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}\right)dt\\
&\leq 2C\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt\\
&= 2C||u||_{L^1([0,T];H_0^1(\overline{\Omega}))}
\end{aligned}$$

o también:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx\right| &\leq 2C\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt = 2C\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}.1dt\\
&\leq 2C\left(\int_0^T ||u(.,t)||^2_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_0^T 1^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= 2C\sqrt{T}||u||_{L^2([0,T];H_0^1(\overline{\Omega}))}
\end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que:

$$\int_\Omega\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx \leq 2C||u||_{L^1([0,T];H_0^1(\overline{\Omega}))}$$
$$\int_\Omega\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx \leq 2C\sqrt{T}||u||_{L^2([0,T];H_0^1(\overline{\Omega}))}$$

Con esto queda demostrado (I).
Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx\right| &= \left|\int_\Omega\left[u(x,t).\phi(x,t)|_0^T - \int_0^T u(x,t).\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t)dt\right]dx\right|\\
&= \left|\int_\Omega u(x,t).\phi(x,t)|_0^T dx - \int_\Omega\int_0^T u(x,t).\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t)dtdx\right|\\
&\geq \left|\int_\Omega u(x,t).\phi(x,t)|_0^T dx\right| - \left|\int_\Omega\int_0^T u(x,t).\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t)dtdx\right|
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u(x,t).\phi(x,t)|_0^T dx\right| - \left|\int_\Omega\int_0^T u(x,t).\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t)dtdx\right| &\leq \left|\int_\Omega\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx\right|\\
&\leq 2C\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt
\end{aligned}$$

extrayendo los extremos:

$$\left|\int_\Omega u(x,t).\phi(x,t)|_0^T dx\right| - \left|\int_\Omega\int_0^T u(x,t).\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t)dtdx\right| \leq 2C\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt$$

$$\left|\int_\Omega u(x,t).\phi(x,t)|_0^T dx\right| \leq \left|\int_\Omega\int_0^T u(x,t).\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t)dtdx\right| + 2C\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u(x,t).\phi(x,t)|_0^T dx\right| &= \left|\int_\Omega (u(x,T).\phi(x,T) - u(x,0)\phi(x,0))dx\right|\\
&\geq \left|\int_\Omega (u(x,T).\phi(x,T)dx\right| - \left|\int_\Omega u(x,0)\phi(x,0))dx\right|
\end{aligned}$$

y de esto:

$$\left|\int_\Omega (u(x,T).\phi(x,T)dx\right| - \left|\int_\Omega u(x,0)\phi(x,0))dx\right| \leq \left|\int_\Omega u(x,t).\phi(x,t)|_0^T dx\right|$$

y además:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \int_0^T u(x,t).\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t)dtdx\right| &\leq \int_\Omega \int_0^T |u(x,t)|.|\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t)|dtdx \\
&\leq \int_\Omega \int_0^T |u(x,t)|.\sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}}dtdx \\
&= \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|,1dxdt \\
&\leq \sqrt{2k}e^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \left[\left(\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_\Omega 1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] dt \\
&= \sqrt{2k}|\Omega|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \int_0^T ||u(.,t)||_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leq \sqrt{2k}|\Omega|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \int_0^T ||u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})} dt
\end{aligned}$$

Reemplazando en:

$$\left|\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx\right| \geq \left|\int_\Omega u(x,t).\phi(x,t)|_0^T dx\right| - \left|\int_\Omega \int_0^T u(x,t).\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t)dtdx\right|$$

o equivalentemente se tiene:

$$\left|\int_\Omega u(x,t).\phi(x,t)|_0^T dx\right| \leq \left|\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx\right| + \left|\int_\Omega \int_0^T u(x,t).\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t)dtdx\right|$$

pero se sabe que:

$$\left|\int_\Omega u(x,T).\phi(x,T)dx\right| - \left|\int_\Omega u(x,0)\phi(x,0))dx\right| \leq \left|\int_\Omega u(x,t).\phi(x,t)|_0^T dx\right|$$

$$\left|\int_\Omega \int_0^T u(x,t).\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t)dtdx\right| \leq \sqrt{2k}|\Omega|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \int_0^T ||u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})} dt$$

$$\left|\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\phi(x,t)dtdx\right| \leq 2C \int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})} dt$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u(x,T)\phi(x,T)dx\right| - \left|\int_\Omega u(x,0)\phi(x,0))dx\right| &\leq 2C \int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})} dt \\
&+ \sqrt{2k}|\Omega|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \int_0^T ||u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})} dt
\end{aligned}$$

equivale a:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u(x,T)\phi(x,T)dx\right| \leq \left|\int_\Omega u(x,0)\phi(x,0))dx\right| &+ 2C \int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})} dt \\
&+ \sqrt{2k}|\Omega|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \int_0^T ||u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})} dt
\end{aligned}$$

por el principio del máximo, la solución es no negativa:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x,T)\phi(x,T)dx &\leq \int_\Omega |u_0(x)||\phi(x,0)|dx + 2C\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt\\ &+ \sqrt{2k}|\Omega|^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}}\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt\\ &\leq \int_\Omega |u_0(x)||\phi(x,0)|dx + (2C+\sqrt{2k}|\Omega|^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}})\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt\end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x,T)\phi(x,T)dx &\leq \int_\Omega ||u_0||_{L^\infty(\Omega)}dx + (2C+\sqrt{2k}|\Omega|^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}})\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt\\ &\leq |\Omega|.||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + (2C+\sqrt{2k}|\Omega|^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}})\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt\end{aligned}$$

haciendo $D = (2C+\sqrt{2k}|\Omega|^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}})$ se tiene que:

$$\int_\Omega u(x,T)\phi(x,T)dx \leq |\Omega|.||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + D\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt$$

Por tanto, si para $T > 0$, se tiene que $\int_\Omega u(x,t)\phi(0,T)dx \to +\infty$, cuando $t \to T$ entonces $\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt \to +\infty$, de esto se tiene que: $||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt \to +\infty$ y en consecuencia $|u(x,t)| \to +\infty$. Con esto queda demostrado (II).

Para demostrar (III) se parte de la última desigualdad obtenida:

$$\int_\Omega u(x,T)\phi(x,T)dx \leq |\Omega|.||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + D\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt$$

pero, por ser T tiempo de explosión, se cumple que:

$$\int_\Omega u(x,T)\phi(x,T)dx > \int_\Omega u(x,t)\phi(x,t)dx, \quad \forall t \in [0,T)$$

entonces:

$$\int_\Omega u(x,t)\phi(x,t)dx < |\Omega|.||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + D\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt$$

Se conoce que:

$$||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})} \geq ||u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}, \quad \forall t \in [0,T],$$

y además: $u(x,t) < +\infty$ para $t \in [0,T)$. entonces para $T_0 < T$, existe $\delta_1 = \delta_1(T_0) > 0$ tal que:

$$||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})} \leq \delta_1 ||u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})}, \quad \forall\, t \in [0,T_0],$$

y como Ω es acotado se cumple que:

$$||u(.,t)||_{L^2(\overline{\Omega})} \leq ||u(.,t)||_{L^\infty(\overline{\Omega})}, \quad \forall\, t \in [0,T_0],$$

en consecuencia:

$$||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})} \leq \delta_1 ||u(.,t)||_{L^\infty(\overline{\Omega})}, \quad \forall\, t \in [0,T_0],$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x,t)\phi(x,t)dx &\leq \int_\Omega |u(x,t)|.|\phi(x,t)|dx\\ &\leq \int_\Omega ||u(.,t)||_{L^\infty(\overline{\Omega})}dx\\ &= |\Omega|.||u(.,t)||_{L^\infty(\overline{\Omega})}\end{aligned}$$

y sea $\delta > 0$ tal que:

$$\int_\Omega u(x,t)\phi(x,t)dx \geq \delta|\Omega|.||u(.,t)||_{L^\infty(\overline{\Omega})}, \quad \forall\, t \in [0,T),$$
$$\geq |\Omega|.||u||_{L^\infty((0,T);L^\infty(\overline{\Omega}))}$$

Ahora, regresando a la desigualdad:

$$\int_\Omega u(x,t)\phi(x,t)dx < |\Omega|.||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + D\int_0^T ||u(.,t)||_{H_0^1(\overline{\Omega})}dt$$

o de forma equivalente:

$$\begin{aligned}|\Omega|.||u||_{L^\infty((0,T);L^\infty(\overline{\Omega}))} &\leq |\Omega|.||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + D\int_0^T \delta_1||u(.,t)||_{L^\infty(\overline{\Omega})}dt\\ &\leq |\Omega|.||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + D\delta_1\sqrt{T}||u||_{L^2((0,T);L^\infty(\overline{\Omega}))}\end{aligned}$$

pero como: $||u||_{L^2((0,T);L^2(\overline{\Omega}))} \leq ||u||_{L^\infty((0,T);L^\infty(\overline{\Omega}))}$ entonces:

$$\begin{aligned}|\Omega|.||u||_{L^\infty((0,T);L^\infty(\overline{\Omega}))} - D\delta_1\sqrt{T}||u||_{L^2((0,T);L^\infty(\overline{\Omega}))} &\leq |\Omega|.||u_0||_{L^\infty(\Omega)}\\ (|\Omega| - D\delta_1\sqrt{T})||u||_{L^2((0,T);L^\infty(\overline{\Omega}))} &\leq |\Omega|.||u_0||_{L^\infty(\Omega)}\end{aligned}$$

donde se obtiene que:

$$||u||_{L^2((0,T);L^\infty(\overline{\Omega}))} \leq \frac{|\Omega|}{|\Omega| - D\delta_1\sqrt{T}}.||u_0||_{L^\infty(\Omega)}$$

para todo $t \in [0, T_0]$. Y para que la desigualdad tenga sentido se debe cumplir que: $|\Omega| - D\delta_1\sqrt{T} > 0$, es decir:

$$T < \left(\frac{|\Omega|}{D\delta_1}\right)^2. \,\square$$

Ahora, para problemas particulares de la forma (2), se tiene a continuación algunos resultados que proporcionan cotas para la solución:

Teorema 7. *Sea el problema* (2). *Entonces:*

(a) *Si $f(x,t,u(x,t)) = g(x,t)h(u(x,t))$, con g continua y $\int_0^T |g(x,s)|ds \leq M$, con $M \geq 0$, $x \in \overline{\Omega}$ y h una función globalmente Lipschitziana satisfaciendo $h(-u) = -h(u)$. Entonces existe $C = C(M)$ tal que:*

$$|u(x,t)| \leq C||u_0||_{L^\infty(\overline{\Omega})}, \qquad (x,t) \in \overline{\Omega}\times[0,T],$$

donde T es el tiempo máximo de existencia de la solución.

(b) *Si $f(x,t,u(x,t)) = g(x,t) + h(u(x,t))$, con g continua y $\int_0^T |g(x,s)|ds \leq M$, con $M \geq 0$, $x \in \overline{\Omega}$ y h una función globalmente Lipschitziana satisfaciendo $h(-u) = -h(u)$. Entonces:*

$$|u(x,t)| \leq e^T(||u_0||_{L^\infty(\overline{\Omega})} + M), \qquad (x,t) \in \overline{\Omega}\times[0,T],$$

donde T es el tiempo máximo de existencia de la solución.

Prueba:

La formulación abstracta del problema es:

$$\begin{cases} u_t(t) = Au(t) + f(t,u(t)), & t > 0,\\ u(0) = u_0 \in L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Por el resultado de existencia y unicidad, existe $T > 0$ tal que $u \in L^\infty([0,T), L^\infty(\Omega))$ y además u es solución de la ecuación:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
||u(t)||_{L^\infty(\Omega)} &= ||T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds||_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq ||T(t)u_0||_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t ||T(t-s)f(s,u(s))||_{L^\infty(\Omega)}ds \\
&\leq ||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t ||f(s,u(s))||_{L^\infty(\Omega)}ds
\end{aligned}
$$

es decir:

$$
||u(t)||_{L^\infty(\Omega)} \leq ||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t ||f(s,u(s))||_{L^\infty(\Omega)}ds \tag{14}
$$

reemplazando $f(s,u(s)) = g(s).h(u(s))$ en (14) se tiene:

$$
||u(t)||_{L^\infty(\Omega)} \leq ||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t ||g(s)||_{L^\infty(\Omega)}.||h(u(s))||_{L^\infty(\Omega)}ds
$$

y aplicando la desigualdad de Gronwall se obtiene:

$$
\begin{aligned}
||u(t)||_{L^\infty(\Omega)} &\leq ||u_0||_{L^\infty(\Omega)}e^{\int_0^t ||g(s)||_{L^\infty(\Omega)}ds} \\
&\leq ||u_0||_{L^\infty(\Omega)}e^M \\
&= C||u_0||_{L^\infty(\Omega)}
\end{aligned}
$$

y con esto se obtiene (a). Para obtener (b) se reemplaza $f(s,u(s)) = g(s) + h(u(s))$ en (14):

$$
\begin{aligned}
||u(t)||_{L^\infty(\Omega)} &\leq ||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t ||g(s)||_{L^\infty(\Omega)} + ||h(u(s))||_{L^\infty(\Omega)}ds \\
&\leq ||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t ||g(s)||_{L^\infty(\Omega)}ds + \int_0^t ||h(u(s))||_{L^\infty(\Omega)}ds \\
&\leq ||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + M + \int_0^t ||h(u(s))||_{L^\infty(\Omega)}ds
\end{aligned}
$$

y por la desigualdad de Gronwall se obtiene:

$$
\begin{aligned}
||u(t)||_{L^\infty(\Omega)} &\leq (||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + M)e^{\int_0^t ds} \\
&\leq (||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + M)e^T \\
&= e^T(||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + M), \quad 0 < t < T. \square
\end{aligned}
$$

4. Conclusiones.

. Del estudio realizado se concluye que:

1. Por el Teorema 6, la solución de (2) puede estar definida globalmente, si no es así o es acotada o presenta explosión en $t = +\infty$. Si la solución está definida localmente, entonces presenta explosión en $T = \left(\frac{|\Omega|}{D\delta_1}\right)^2$, donde D es una constante a determinar.
2. Por el Teorema 6, si la solución de (2) presenta explosión en tiempo finito T entonces es posible extender la solución definida en $[0,T)$ a $[0,+\infty)$ usando el concepto de solución propia minimal.
3. Por el Teorema 7, la solución de (2) es acotada para funciones f particulares.

Agradecimientos. El autor agradece de forma especial al Br. Julio Jonathan Fernando Becerra Saucedo por las correcciones en la traducción al inglés de parte de este artículo.

Referencias

[1] J.M. Arrieta, *On boundedness of solutions of reaction - diffusion equations with nonlinear boundary conditions*. Proceedings of the American Mathematical Society. Feb. 2008; 136(1): 151 - 160.

[2] J.M. Arrieta and A. Rodriguez Bernal, *Blow - up versus global boundedness of solutions of reaction - diffusion equations with nonlinear boundaryconditions*. Proceedings of Equations. 2005; 11: 1 - 7.

[3] J.M. Arrieta and Rodriguez Bernal A, *Localization on the boundary of blow - up for reaction - diffusion equations with nonlinear boundary conditions*. Communications in Partial Differential Equations. 2004; 29(7 - 8): 1127 - 1148.

[4] k. Balázs, *Semilinear Parabolic Problems [Tesis de Maestría]*. Eotovos Loránd University. Facultad de Ciencias; 2011.

[5] J.M. Ball, *Remarks on blow - up and non existence theorems for nonlinear evolution equations*. Quartt. J. Math Oxford. Mar. 1977 ; 2(28): 473 - 486.

[6] P. Baras and L. Cohen, *Complete Blow - Up after T_{max} for the Solution of a Semilinear Heat Equation*. Journal of Functional Analysis. 1987; 71: 142 - 174.

[7] R. Bhadauria, A.K. Singh and D.P. Singh, *A Mathematical model to Solve Reaction Diffusion Equation using Differential Transformation Method*. International Journal of Mathematical Trends and Technology. 2011; 2(2): 26 - 31.

[8] S. Chen and D. Yu, *Global existence and blow up solutions for quasilinear parabolic equations.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 2007; 335: 151 - 167.

[9] S. Chen and W.R. Derrick, *Global existence and blow up solutions for a semilinear parabolic system* Rocky Mountain Journal of Mathematics 1999. 29(2): 449-457.

[10] T. Cazenave and A. Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolution Equations.* Clarendon Press - Oxford. 1998.

[11] T. Cazenave, F. Dickstein and F.B. Weissler, *Universal solutions of a nonlinear heat equation on $\mathbb{R}^n$*. Scuola Normale Superiore Di Pisa. Classe di Scienze (5). 2003; 2: 77 -117.

[12] T. Cazenave, F. Dickstein and F.B. Weissler, *Global existence and blow up for sign changing solutions of the nonlinear heat equation.* Journal of Differential Equations. 2009; 246: 2669 - 2680.

[13] M.J. Chadam, A. Pierce and Y. Hong - Ming,. *The blow - up property of solutions to some diffusion equations with localized nonlinear reactions*. Journal Mathematic Analitic and Applications. 1992; 160: 313 - 328.

[14] G. De Assis, *Soluciones globales uniformementes limitadas para una ecuación de calor semilineal [Tesis de Maestría].* Universidad de Brasilia - Instituto de Ciencias Exactas; 2012.

[15] A. De Pablo, *An introduction to the problem of blow - up for semilinear and quasilinear parabolic equations*. MAT - Serie A. 2006; 12.

[16] A. De Pablo, R. Ferreira, F. Quirós and J.L. Vázquez, *Blow - up. El problema matemático de explosión para ecuaciones y sistemas de reacción - difusión*. Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada. 2005; 32: 75 - 111.

[17] P.G. Dlamini and M. Khumalo, *On the Computation of blow up solutions for the semilinear ODEs and parabolic PDEs.* Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering. 2011; 2012.

[18] R. Ferreira, A. De Pablo, M. Pérez - Llanos and J.D. Rossi, *Critical exponents for a semilinear parabolic equations with variable reaction.*

[19] V.A. Galaktionov and J.L Vázquez, *The problem of blow - up in nonlinear parabolic equations*. Discrete and Continous Dynamical Systems.Abr 2002; 8(2): 399 - 433.

[20] V.A. Galaktionov and J.L. Vázquez,*Continuation of blow - up solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions*. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1997; 1: 1 - 67.

[21] A. Gmira and L. Veron, *Large time behaviour of the solutions of a semilinear parabolic equation en $\mathbb{R}^n$*. Journal of Differential Equations 1984. 53: 258 - 276.

[22] F.D. Goodwill, *Numerical simulation of finite - time blow - up in nonlinear ODEs, reaction - diffusion and VIDEs [Tesis de Maestría].* University of Johannesburg. Facultad de Ciencias. 2012.

[23] P. Grindrod, *The theory and applications of reaction - diffution equations patterns and waves*. 2a ed. Oxford: Clarendon Press; 1996.

[24] E.K. Gustafon, *Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods*. Dover Publications INC. 3a ed. New York: DoverPublications; 1999.

[25] B. Hu and H.M. Yin, *The Profile Near Blowup Time for Solution of the Heat Equation with a Nonlinear Boundary Condition* IMA Preprint Series Nro. 1116. Mar 1993.

[26] G.M. Iancu and M.W. Wong, *Global solutions of semilinear heat equations in Hilbert Spaces.* 1996.

[27] N. Ioku, *The Cauchy problem for heat equation with exponential nonlinearity.* Journal of Differential Equations 2011. 251: 1172 - 1194.

[28] K. Ishige, N. Mizoguchi and H. Yagisita, *Blow - up profile for nonlinear heat equation with the neumann boundary condition*. oct 2003. Artículo Electrónico.

[29] A. Kohda and T. Suzuki, *Blow up criteria for semilinear parabolic equations.*

[30] C. Kuttler, *Reaction - Difussion Equations with Applications*.

[31] V. Lakshmikantham, *Comparison results for reaction diffusion equations in a Banach Space.* Lecture Notes. 1979.

[32] M. Loayza, *The heat equation with singular nonlinearity and singular initial data.*

[33] L. Lorenzi, A. Lunardi, G. Metafune and D. Pallara, *Analytic Semigroups and Reaction - Diffusion Problems.* Internet Seminar. 2004 - 2005.

[34] R.N. Machado, *Una ecuación no lineal de calor con valor inicial singular [Tesis de Maestría].* Universidad Federal de Pernambuco - Centro de Ciencias Exactas de la Naturaleza; 2009.

[35] R. Meneses and A. Quaas, *Existence and non - existence of global solutions for uniformly parabolic equations.*

[36] R. Meneses and A. Quaas, *Fujita type exponent for fully nonlinear parabolic equations ans existence results.*

[37] A. Mounmeni and L.S.Derradji, *Global Existence of Solutions for Reaction Diffusion Systems*. IAENG International Journal of Applied Mathematics. May 2010; 40(2).

[38] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer - New York. 1983

[39] M.T. Pérez, *Formación de singularidades en algunos problemas de reacción - difusión no lineales [Tesis de Doctorado].* Departamento de Matemáticas. Universidad Carlos III de Madrid. 2007.

[40] R. Pinsky, *Positive solutions of reaction diffusion equations with superlinear absorption: universal bounds, uniqueness for the Cauchy problem, boundedness of stationay solutions*. Technion - Israel Institute of Technology. 1991.

[41] A. Pulkkinen, *Some comments concerning the blow - up of solutions of the exponential reaction - diffusion equation*. MATH AP. Feb 2011.

[42] A. Pulkkinen, *Blow - up in reaction - diffusion equations with exponential and power - type nonlinearieties*. Aalto University School of Science. Disertación Doctoral. Jun 2011.

[43] F. Quirós , J.D. Rossi and J.L Vazquez, *Complete Blow - Up and Thermal Avalanche for Heat Equations With Nonlinear Boundary Conditions.* Communications in Partial Differential Equations. 2002; 27: 395 - 424.

[44] P. Quittner, P. Souplet and M. Winkler, *Initial blow up rates and universal bounds for nonlinear heat equations.*

Journal of Differential Equations. 2004; 196: 316 - 339.
[45] M.A. RINCON, J. LÍMACO AND I. LIU, *Existence and uniqueness of solutions of a nonlinear heat equation*. T. Mathematical Applications Computacional. 2005; 6(2): 273 - 284.
[46] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction - Diffusion Equations.* Springer - Verlag, New York. 1983.
[47] V. VOLPERT AND S. PETROVSKII, *Reaction - diffusion waves in biology.* Physics of Life Reviews. 2009: 6; 267 - 310
[48] J.L. VÁZQUEZ, *The problems of blow up for nonlinear heat equations. Complete blow up and avalanche formation.* 2004.
[49] L. YACHENG, X. RUNZHANG AND Y. TAO, *Global existence, nonexistence and asymptotic behavior of solutions for the Cauchy problem of semilinear heat equations.* Nonlinear Analysis 2008; 68: 3332 - 3348.