



## Ciclos límites en modelos depredador-presa.

### Limit Cycles in Predator-Prey Models.

Liliana Puchuri Medina \*

Received, Feb. 05, 2017

Accepted, Jun. 15, 2017

DOI: <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2017.01.08>

#### Resumen

*El modelo clásico de Lotka-Volterra pertenece a una familia de ecuaciones diferenciales denominada “Lotka-Volterra generalizado”, que forma parte de una clasificación de cuatro modelos de campos cuadráticos con centro. Estos modelos han sido estudiados para responder el problema infinitesimal de Hilbert, que consiste en determinar el número de ciclos límites que posee un sistema hamiltoniano perturbado y con centro. En este trabajo, en primer lugar presentamos una prueba alternativa de la existencia de centros en el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra. Esta nueva prueba se basa en ecuaciones algebraicas dadas por Kapteyn, que surgieron para responder al problema de Poincaré para campos cuadráticos. En segundo lugar, usando el teorema de la bifurcación de Hopf, probamos que modelos depredador-presa más realistas, obtenidos por una perturbación no lineal del modelo de Lotka-Volterra clásico, poseen ciclos límites.*

**Palabras clave.** Ciclos límites, centro, campos hamiltonianos

#### Abstract

*The classic Lotka-Volterra model belongs to a family of differential equations known as “Generalized Lotka-Volterra”, which is part of a classification of four models of quadratic fields with center. These models have been studied to address the Hilbert infinitesimal problem, which consists in determine the number of limit cycles of a perturbed hamiltonian system with center. In this work, we first present an alternative proof of the existence of centers in Lotka-Volterra predator-prey models. This new approach is based in algebraic equations given by Kapteyn, which arose to answer Poincaré’s problem for quadratic fields. In addition, using Hopf Bifurcation theorem, we proof that more realistic models, obtained by a non-linear perturbation of a classic Lotka-Volterra model, also possess limit cycles.*

**Keywords.** Limit Cycles, Centers, Hamiltonian Fields

**1. Introducción.** La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales nació de los trabajos de Poincaré a finales del siglo XIX. Su idea principal fué derivar propiedades geométricas de las soluciones, a partir de las ecuaciones que las definen. Dentro de los numerosos problemas que estudió Poincaré tenemos el *problema del centro*, relacionado en responder cuando las soluciones alrededor de una singularidad son órbitas cerradas.

En 1900, David Hilbert presentó una lista de 23 problemas famosos, dentro de ellas se encuentran el octavo, más conocido como la hipótesis de Riemann y el décimosexto relacionado al número máximo de ciclos límites de una ecuación diferencial polinomial, y del cual estaremos interesados. Debido a la dificultad del problema décimosexto, existen versiones más débiles como el problema infinitesimal de Hilbert donde se observa la aparición de ciclos límites bajo pequeñas perturbaciones de un campo polinomial hamiltoniano. En el presente trabajo comenzaremos estudiando el modelo depredador-presa de Lotka Volterra, el

\*Instituto de Matemática y Ciencias Afines (IMCA) & Pontificia Universidad Católica del Perú. Corresponding author [lpuchuri@pucp.edu.pe](mailto:lpuchuri@pucp.edu.pe).

This work is licensed under the [Creative Commons Attribution-NoComercial-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

cual es un campo hamiltoniano con centro. Este modelo pertenece a una de las cuatro componentes del espacio de los campos cuadráticos con centro, llamado *Lotka-Volterra Generalizado* el cual ha sido estudiado por Gavrilov [6], Iliev [7] entre otros. Veremos que bajo ciertas condiciones, si perturbamos este campo hamiltoniano podemos garantizar la existencia de un ciclo límite. Un trabajo posterior sería calcular las integrales de Poincaré-Pontryagin-Melnikov en la versión compleja, para obtener el número máximo de ciclos límites que pueden aparecer después de la perturbación en una vecindad de una singularidad.

**2. Preliminares.** Una ecuación diferencial en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  es de la forma:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y), \end{aligned}$$

donde  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Toda ecuación diferencial tiene asociado un campo  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $X = (f, g)$ . Un punto  $p \in U$  es llamado *singularidad o no regular* de  $X$ , si  $X(p) = (0, 0)$ . Además,  $p$  es una *singularidad no degenerada* si la matriz Jacobiana asociada a  $X$  en  $p$  posee determinante no nulo. El teorema de Picard nos indica que, por ejemplo, si las funciones son de clase  $C^1$  en  $U$  entonces por todo punto regular  $p \in U$  del campo  $X$  pasa una única solución con valores iniciales. Sobre la topología de las soluciones, recordemos que topológicamente las órbitas del campo  $X$  son puntos, circunferencias o rectas.

**2.1. Caso lineal.** Por el teorema de Hartman-Grobman, bajo ciertas condiciones es suficiente estudiar la parte lineal de un campo. Sea la ecuación diferencial lineal

$$x' = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Por la forma canónica de Jordan, existe matriz invertible  $P$  tal que  $P^{-1}AP = J$ , donde  $J$  depende de los valores propios de  $A$ , esto es, los ceros del polinomio característico de  $A$ ,

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

Dividiremos el estudio de los diagramas de fase del sistema lineal en dos casos.

**Caso 1:**  $A$  tiene valores propios reales. En este caso:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Luego, si  $p = (0, 0)$ , tenemos los siguientes casos:

- $\lambda_1, \lambda_2$  poseen el mismo signo entonces  $p$  es un *nodo* (tipo I). Un *nodo estable* si son negativos o *inestable* si son positivos.
- $\lambda_1, \lambda_2$  poseen signos diferentes entonces  $p$  es una *silla*.
- $\lambda > 0$ ,  $p$  es un *nodo* (tipo II) *inestable* o *estable* si  $\lambda < 0$ ,

**Caso 2:**  $A$  tiene valores propios complejos  $a \pm ib$ . En este caso tenemos

$$J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

- $a \neq 0$  entonces  $p$  es una singularidad de *tipo espiral*, donde es *estable* si  $a < 0$  o *inestable* si  $a > 0$ .
- $a = 0$  entonces  $p$  es una singularidad de *tipo centro*.

A manera de resumen presentamos la Figura (2.3) que clasifica los diagramas de fase del sistema lineal, en función de la traza y el determinante de  $A$ .

**Observación 1.** En un sistema lineal si aparece una solución cerrada, entonces todas las demás soluciones alrededor de  $p$  son cerradas. Sin embargo, eso no siempre ocurre para un sistema no lineal, como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.**

El oscilador de Van der Pol (1926) el cual modela algunos circuitos eléctricos de radios es dado por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden.

$$x'' - \varepsilon(1 - x^2)x' + x = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

El Ejemplo 1 nos muestra que podrían aparecer alrededor de una órbita cerrada, órbitas cuyo  $\omega$  o  $\alpha$ -límite es la misma órbita cerrada, vea la Figura (2.4). La noción de ciclo límite aparece por primera vez en los estudios de las ecuaciones diferenciales en el plano realizados por Poincaré entre los años 1880 y 1890.

**Definición 1.** Un ciclo límite de un campo  $X$  es una solución periódica aislada en el conjunto de todas las soluciones periódicas de un campo  $X$ .

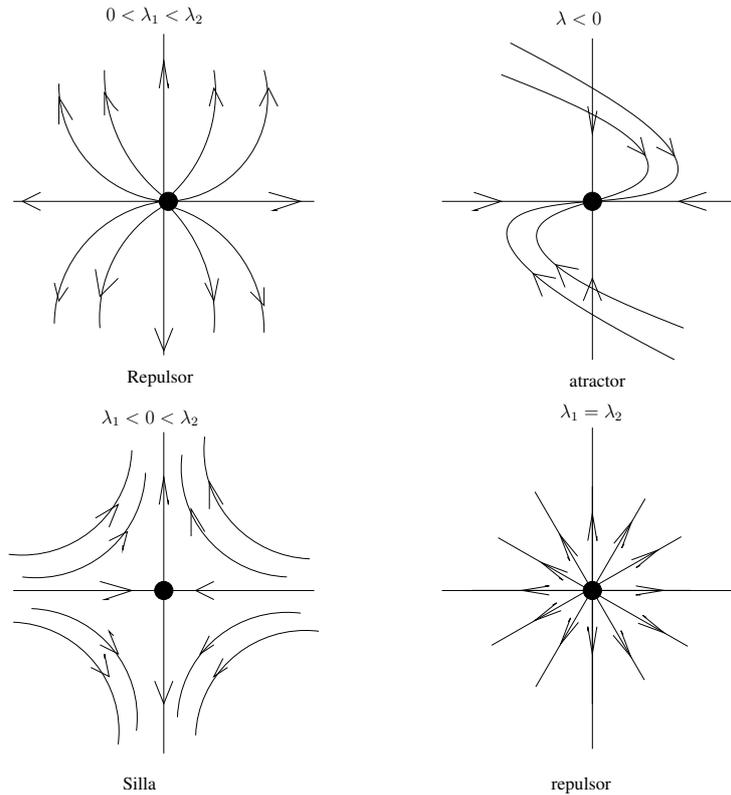


FIGURA 2.1. Diagramas de fase del caso I

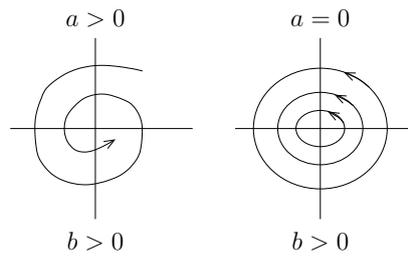


FIGURA 2.2. Diagramas de fase del caso II

El siguiente teorema nos da condiciones para garantizar la existencia de ciclos límites.

**Teorema 1 (Poincaré, Andronov, Hopf).** Supongamos que una ecuación diferencial

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x' &= f(x, y, \varepsilon) \\ y' &= g(x, y, \varepsilon), \end{aligned}$$

donde  $f, g : U \times I \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son de clase  $C^1$ , posee una singularidad  $p \in U$ , para todo  $\varepsilon \in I$ . Además,

1. los autovalores  $\lambda_{1,\varepsilon}$  y  $\lambda_{2,\varepsilon}$  de la linealización en  $p$ , son imaginarios puros cuando  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,
2. la parte real de los autovalores satisface  $\frac{d}{d\varepsilon} \Re(\lambda_{j,\varepsilon})|_{\varepsilon=\varepsilon_0} > 0$ ,
3. la singularidad  $p$  es asintóticamente estable cuando  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,

entonces el sistema (2.2) tiene un ciclo límite para todo  $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_0 + r)$ , para algún  $r > 0$ .

Para mayor información de los temas tratados puede revisar [2, 3, 10, 15], entre otros.

**Definición 2.** Una singularidad  $p \in \mathbb{R}^2$  de un campo  $X$  es un centro, si existe una vecindad  $U \subset \mathbb{R}^2$  de  $p$  tal que todo punto en  $U \setminus \{p\}$  es no singular y la solución pasando por este punto es cerrada.

El problema del centro, dado por Poincaré, consiste en responder la siguiente pregunta: ¿Cuándo una singularidad de tipo centro es un centro?.

El problema del centro es completamente comprendido en el caso de campos cuadráticos debido a las contribuciones de H. Dulac [5], W. Kapteyn [8, 9], N. Bautin y otros. En 1939, usando una forma normal

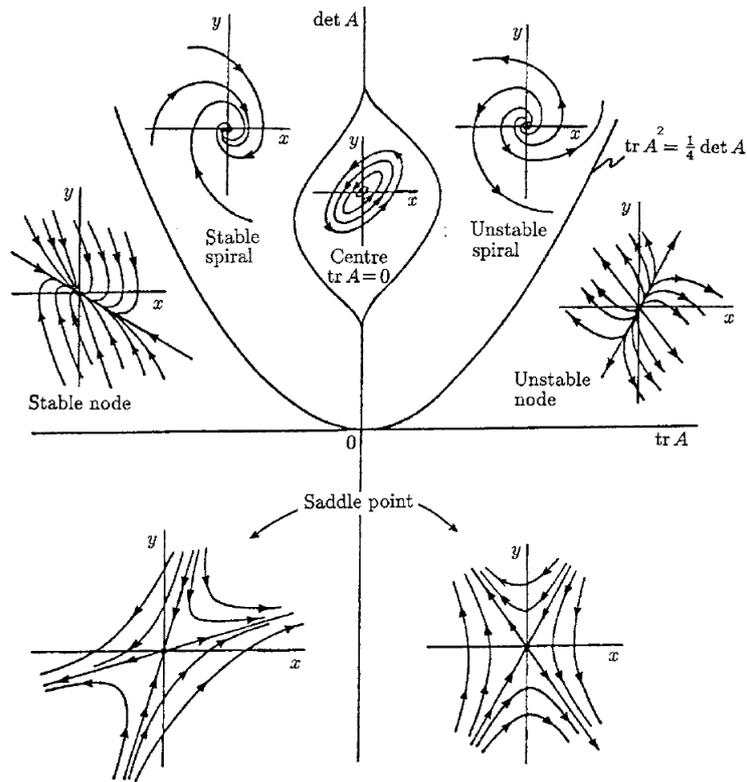


FIGURA 2.3. Diagramas de fase del caso lineal

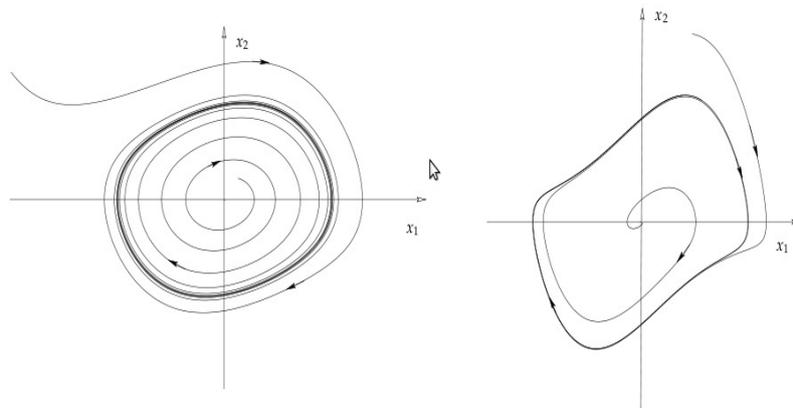


FIGURA 2.4. Diagramas de fase del oscilador de Van der Pol con  $\epsilon = 1$  y  $\epsilon = 0,5$

de Kapteyn, Bautin dió una lista de condiciones necesarias y suficientes para que una singularidad de tipo centro sea un centro (vea sección §4). Un teorema relacionado con el problema del centro es dado por Poincaré, el cual está relacionado con la existencia de una integral primera.

**Definición 3.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, diremos que  $f$  es una integral primera si no es constante y  $f(x(t)) = cte$ , para toda solución  $x(t)$  de (2.1).

**Teorema 2 (Teorema de Poincaré).** Sea  $X$  un campo analítico en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  y  $p$  una singularidad aislada no degenerada de  $X$ . Entonces, si  $p$  es un centro de  $X$ , el campo  $X$  posee una integral primera en una vecindad de  $p$ .

Para la prueba vea [4, §3].

**3. Clasificación de ecuaciones diferenciales cuadráticas con centro.** Toda ecuación diferencial cuadrática, para la cual el origen es una singularidad no degenerada de tipo centro, puede ser llevada mediante

un cambio de coordenadas, a la forma

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x' &= y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2, \\ y' &= -x + b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2. \end{aligned}$$

El problema del centro para campos cuadráticos reales fue considerado por primera vez por Kapteyn [8], quien dió un conjunto de condiciones algebraicas sobre los coeficientes de (3.1) para que este posea un centro en el origen.

**Teorema 3 (Kapteyn [8]).** *El sistema (3.1) tiene un centro en el origen si, y sólo si, una de las siguientes condiciones es satisfecha:*

$$(III) \quad a_{2,0} + a_{0,2} = 0.$$

$$(II) \quad a_{1,1} = b_{2,0} = 0.$$

$$(I) \quad 0 = a_{1,1} - 2b_{2,0} = -b_{1,1} + 4a_{2,0} + 5a_{0,2} = b_{2,0}^2 + a_{2,0}a_{0,2} + 2a_{0,2}^2.$$

$$(H) \quad -b_{1,1} - 2a_{2,0} = a_{1,1} - 2b_{2,0} = 0.$$

Por el teorema del centro de Poincaré tenemos que estos sistemas poseen una integral primera local. Para ver la forma de estas integrales consideremos el siguiente lema.

**Lema 1.** *La ecuación diferencial cuadrática (3.1), puede ser escrita del siguiente modo:*

$$(3.2) \quad z' = -iz + Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2,$$

para  $A, B, C \in \mathbb{C}$ .

**Prueba:**

Como queremos expresar el sistema (3.1) en la forma (3.2), supongamos que tenemos el sistema (3.2) y así, sea  $A = A_1 + iA_2, B = B_1 + iB_2$  y  $C = C_1 + iC_2$ .

Sea  $z = x + iy$  entonces  $z' = x' + iy'$ . Entonces expandiendo (3.2) en términos de  $x$  e  $y$  encontramos que (3.2) es equivalente a (3.1) si, y sólo si

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \\ b_{20} \\ b_{11} \\ b_{02} \end{pmatrix}$$

Luego, por medio de una cuenta simple encontramos que:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \\ b_{20} \\ b_{11} \\ b_{02} \end{pmatrix}$$

□

Por el lema 1, si  $z = x + iy$ , la ecuación (3.1) puede ser llevada a la forma:

$$(3.3) \quad z' = -iz + Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2.$$

Luego, tenemos los siguientes casos.

1. Si  $B = A = 0$  y  $C \neq 0$ ; por medio de una rotación conveniente podemos considerar  $C = 1$ . Luego, la ecuación (3.3) tiene la forma:

$$(3.4) \quad z' = -iz + \bar{z}^2,$$

2. Si  $B = 0$  y  $A \neq 0$ , por medio de una rotación podemos considerar que  $A = 1$ . Luego (3.3) toma la forma:

$$(3.5) \quad z' = -iz + z^2 + C\bar{z}^2, \quad C \in \mathbb{C}.$$

3. Si  $B \neq 0$ , por medio de una homotecia y una rotación, podemos considerar que  $B = 2$ , luego (3.3) toma la forma:

$$(3.6) \quad z' = -iz + Az^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2, \quad A, C \in \mathbb{C}.$$

Así, aplicando el teorema 3 a lo observado anteriormente, obtenemos la siguiente proposición.

**Proposición 1.** Con las notaciones arriba, el origen es un centro de la ecuación (3.3) si, y solamente si, por medio de una rotación o homotecia, una de las siguientes condiciones es satisfecha:

1.  $A = B = 0, C = 1$
2.  $B = 0, A = 1$
3.  $B = 2, A = -1, C \notin \mathbb{R}$ ;
4.  $B = 2, A, C \in \mathbb{R}$ ;
5.  $B = 2, Q = 4, |C| = 2, C \notin \mathbb{R}$ .

**Teorema 4 (Kapteyn [8]).** Existen cinco tipos de sistemas cuadráticos con centro:

$H$ :  $z' = -iz + -z^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2, C \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , (Hamiltoniano);

$H_1$ :  $z' = -iz + \bar{z}^2$ , (Hamiltoniano 1);

$Q_3^L$ :  $z' = -iz + z^2 + C\bar{z}^2, C \in \mathbb{C}$ , (Lotka Volterra generalizado);

$Q_3^R$ :  $z' = -iaz + 4z^2 + 2z\bar{z} + c\bar{z}^2, a, c \in \mathbb{R}$ , (Reversible);

$Q_4$ :  $z' = -iz + 4z^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2, |C| = 2, C \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , (Codimensión 4).

Observe que los tipos Hamiltonianos ( $H$  y  $H_1$ ) pertenecen a una misma componente conexa, que junto con los otros tres tipos, forman parte de las cuatro componentes conexas de los campos cuadráticos con centro.

El lector interesado puede consultar [12] para la prueba del siguiente teorema.

**Teorema 5.** Si la ecuación (3.3) posee un centro, entonces bajo un cambio de coordenadas, esta posee una integral de la forma:

1.  $P_3 \in \mathbb{R}[x, y]$ , (caso Hamiltoniano,  $H$  y  $H_1$ );
2.  $x^p y^q (ax + by + c)^r, p, q \in \mathbb{Z}, a, b, c \in \mathbb{R}$ , (caso Lotka-Volterra Generalizado,  $Q_3^L$ );
3.  $x^p (y^2 + P_2(x))^q, q \in \mathbb{N}, p, q \in \mathbb{Z}, P_2 \in \mathbb{R}_2[x, y]$ , (caso Reversible,  $Q_3^R$ );
4.  $\frac{P_3(x, y)^2}{P_2^3(x, y)}, P_3 \in \mathbb{R}_3[x, y]$  y  $P_2 \in \mathbb{R}_2[x, y]$ , (caso Codimensión 4,  $Q_4$ ).

#### 4. Centros y ciclos límites en modelos depredador-presa.

**4.1. Modelo depredador-presa de Lotka Volterra.** Uno de los modelos que incorporan interacciones entre depredadores y presas fue propuesto en 1925 por el biofísico americano Alfred Lotka y en forma independiente por el matemático italiano Vito Volterra.

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x' &= r_1 x - b_1 xy = b_1 x \left( \frac{r_1}{b_1} - y \right) \\ y' &= -r_2 y + b_2 xy = b_2 y \left( -\frac{r_2}{b_2} + x \right) \end{aligned}$$

con  $r_1, r_2, b_1, b_2$  son constantes reales positivas que describen la interacción de las dos especies.

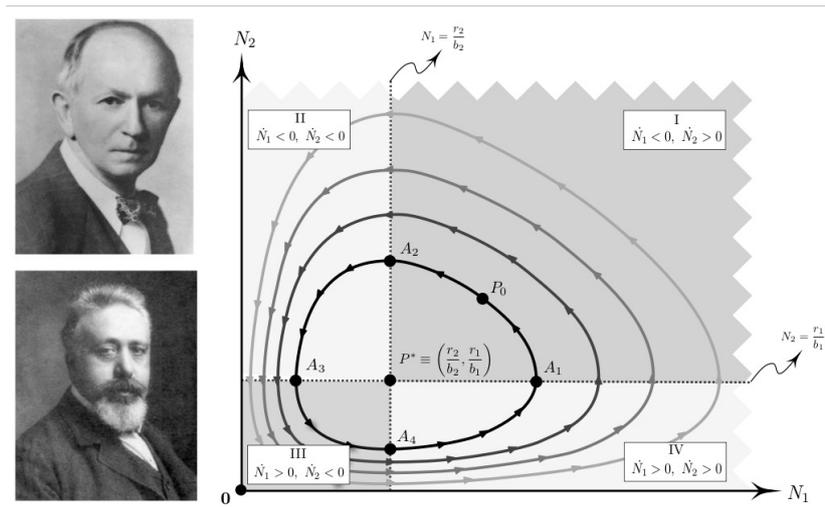


FIGURA 4.1. Diagrama de fase de un sistema Lotka Volterra. Grafico extraído de [13]

Una manera natural en el que aparecen este tipo de ecuaciones es por ejemplo la relación entre lince (depredadores) y conejos (presas). La compañía Hudson Bay anotó cuidadosamente el crecimiento y decrecimiento de la población de estas dos especies viviendo en un bosque al norte de Canadá, en el periodo

1800-1900, Figura ( 4.2). Si colocamos  $x(t)$  e  $y(t)$  a las poblaciones de conejos y lince respectivamente,

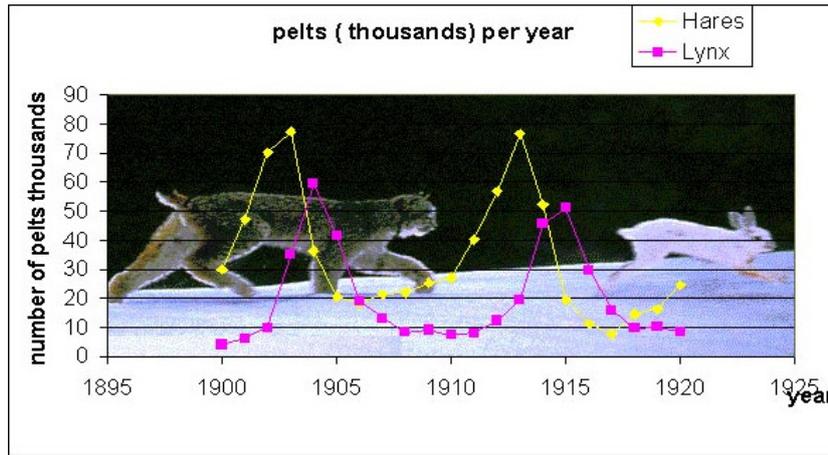


FIGURA 4.2. Datos de la compañía Hudson Bay. Gráfico extraído de [1]

la razón de cambio de las presas es en cada momento proporcional al número de ellas(en ausencia de lince la constante es positiva) menos una tasa proporcional a  $x(t)y(t)$  debido al consumo de zorros. Esto es,

$$\frac{dx}{dt} = a_1x(t) - b_1x(t)y(t), \quad a_1, b_1 > 0.$$

Análogamente, la razón de cambio de los lince es proporcional al número de ellas(en ausencia de conejos la constante es negativa) mas una tasa proporcional a  $x(t)y(t)$  debido al encuentro de lince y conejos. Esto es,

$$\frac{dy}{dt} = -a_2y(t) + b_2x(t)y(t), \quad a_2, b_2 > 0.$$

**4.2. Análisis del modelo Lotka-Volterra.** El campo lineal asociado a la ecuación (4.1), es

$$X = (r_1x - b_1xy, -r_2y + b_2xy).$$

Luego las singularidades del campo  $X$  son los puntos  $p_1 = (0, 0)$  y  $p_2 = \left(\frac{r_2}{b_2}, \frac{r_1}{b_1}\right)$ . Las matrices correspondientes al Jacobiano de los puntos  $p_1$  y  $p_2$  están dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b_1r_2}{b_2} \\ \frac{b_2r_1}{b_1} & 0 \end{bmatrix}$$

Claramente, como los autovalores de  $A_1$  son  $r_1$  y  $-r_2$  el punto  $p_1$  es un punto silla inestable. Con respecto al punto  $p_2$ , los autovalores asociados a la matriz  $A_2$  son  $\lambda = \pm\sqrt{r_1r_2}i$ . En particular,  $p_2$  es una singularidad de tipo centro.

**Teorema 6.** El punto  $p_2 = \left(\frac{r_2}{b_2}, \frac{r_1}{b_1}\right)$  es un centro para la ecuación de Lotka-Volterra. Además,  $p_2$  es una singularidad de tipo morse.

**Prueba:** Si consideramos la traslación,  $x \rightarrow x + \frac{r_2}{b_2}, y \rightarrow y + \frac{r_1}{b_1}$ , entonces  $p_2 = (0, 0)$  y el sistema (4.1) es de la forma,

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x' &= \frac{b_1r_2}{b_2}y - b_1xy \\ y' &= \frac{r_1b_2}{b_1}x + b_2xy \end{aligned}$$

Por otro lado, para obtener la forma canónica de Jordan de la matriz  $A$  asociada a la parte lineal del campo en  $p_2$ , debemos calcular los autovectores complejos asociada al autovalor  $-\sqrt{r_1r_2}i$ , considerando  $A$  como una matriz compleja. Es fácil comprobar que  $v = [b_1\sqrt{r_2} \quad b_2\sqrt{r_1}i]^T$  es un autovalor complejo de  $A$ . Luego, si consideramos

$$P = \begin{bmatrix} b_1\sqrt{r_2} & 0 \\ 0 & b_2\sqrt{r_1}i \end{bmatrix}$$

obtenemos que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{r_1 r_2} \\ \sqrt{r_1 r_2} & 0 \end{bmatrix},$$

es la forma canónica de Jordan de la matriz  $A$ . Consideremos el cambio de coordenadas lineal,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \sqrt{r_2} & 0 \\ 0 & b_2 \sqrt{r_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como  $u = b_1 \sqrt{r_2} x$  y  $v = b_2 \sqrt{r_1} y$  entonces  $u' = b_1 \sqrt{r_2} x'$ ,  $v' = b_2 \sqrt{r_1} y'$ , y reemplazando en la ecuación (4.2) la nueva ecuación diferencial es de la forma

$$\begin{aligned} u' &= -\sqrt{r_1 r_2} v - b_1 b_2 \sqrt{r_2} uv \\ v' &= \sqrt{r_1 r_2} u + b_1 b_2 \sqrt{r_1} uv \end{aligned}$$

cuyas soluciones son las mismas que la ecuación diferencial

$$(4.3) \quad \begin{aligned} x' &= y + \frac{b_1 b_2 \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1 r_2}} xy = y + \frac{b_1 b_2}{\sqrt{r_2}} xy \\ y' &= -x - \frac{b_1 b_2 \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1 r_2}} xy = -x - \frac{b_1 b_2}{\sqrt{r_2}} xy \end{aligned}$$

De las ecuaciones diferenciales (3.1) y (4.3) tenemos que  $a_{20} = a_{02} = b_{20} = b_{02} = 0$ ,  $a_{11} = \frac{b_1 b_2}{\sqrt{r_2}}$  y  $b_{11} = \frac{b_1 b_2}{\sqrt{r_1}}$ . Por el Teorema (3), como  $a_{20} + a_{02} = 0$  entonces  $p_2$  es un centro. Por otro lado, en la prueba del Teorema (2), se tiene que todo campo con un centro  $p$  no degenerado posee una integral primera analítica en una vecindad de  $p$  de la forma  $f(x, y) = x^2 + y^2 + t.o.s$ , esto es,  $p_2$  es una singularidad de tipo morse.

□

**Corolario 1.** La ecuación (4.1) posee un centro si  $r_1$  y  $r_2$  poseen el mismo signo y  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ .

**4.3. Ciclos límites en modelos depredador-presa.** En la aislada selva amazónica peruana, una anaconda acecha y captura a un ratón. Este antiguo drama del cazador y el cazado es repetido en sistemas ecológicos alrededor del mundo. Los depredadores como el oso de anteojos, otorongo, águila, y sus correspondientes presas, exhiben patrones de crecimiento que aparentan repetirse cada 10 años. La explicación de las condiciones que permiten a las poblaciones, tanto de depredadores como de sus presas, fluctuar en un aparente patrón estable, ha sido de largo interés para los conservacionistas de animales.

Los estudios de los patrones de población animal motivan a los matemáticos a construir modelos de interacciones depredador-presa, en los cuales hay una única solución periódica o ciclo, que atrae a todas las demás soluciones. Uno de tales modelos lleva al sistema planar autónomo

$$(4.4) \quad \begin{aligned} x' &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - y \frac{ax}{b+x} \\ y' &= -cy + dy \frac{ax}{b+x}, \end{aligned}$$

donde  $x$  denota el número de presas,  $y$  el número de depredadores, y  $r, k, a, b, c$  y  $d$  son constantes positivas.

Dado que el sistema anterior representa interacción de poblaciones, buscamos que las soluciones y los puntos singulares del sistema se encuentren en el primer cuadrante.

Fijado  $k > 0$ , consideremos el campo

$$X_k = \left( rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - y \frac{ax}{b+x}, -cy + dy \frac{ax}{b+x} \right).$$

Las singularidades son

$$tp_1 = (0, 0), \quad p_2 = (k, 0), \quad p_3 = \left( \frac{bc}{da-c}, \frac{rdb(kda - kc - bc)}{k(da-c)^2} \right) = (x_0, y_0),$$

donde el punto  $p_3$  se encontrará en el primer cuadrante si  $kda - kc - bc > 0$ , esto es,  $k(da - c) > bc$ . Esto a su vez implica que  $ad - c > 0$ .

En la siguiente proposición comprobaremos que la ecuación (4.4) satisface las condiciones del Teorema (1).

**Proposición 2.** *El campo  $X_k$  asociado a la ecuación (4.4) posee un ciclo límite en una vecindad de  $p_3$  para todo  $k \in (k_0, k_0 + r)$  con  $r > 0$  y  $k_0 = b \frac{ad+c}{ad-c}$ . **Prueba:** Claramente  $p_3$  es una singularidad de  $X_k$  para todo  $k$ . Además, fijado  $k$ , la parte lineal del campo  $X$  asociado al punto  $p_3$  es de la forma*

$$J_k = \begin{bmatrix} r - \frac{2r}{k}x_0 - \frac{aby_0}{(b+x_0)^2} & \frac{-ax_0}{b+x} \\ \frac{daby_0}{(b+x_0)^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$\det(J_k) = \frac{cr(kda - kc - bc)}{adk} > 0,$$

$$\text{tr}(J_k) = \frac{cr(b(c+ad) + (c-ad)k)}{(kda(c-ad))}$$

Observe que  $\text{tr}(J_k)|_{k=k_0} = 0$ . Por otro lado los autovalores de  $J_k$  son  $\lambda_{k,\pm} = \frac{1}{2adk(ad-c)}(\beta_k \pm \sqrt{\alpha_k})$ , donde

$$\beta_k = -bc^2r - abcdr - c^2kr + acdkr$$

$$\alpha_k = cr(-4ad(c-ad)^2k(-bc - ck + adk) + c(b(c+ad) + (c-ad)k)^2r)$$

Como  $k \mapsto \alpha_k$  es continua y  $\alpha_{k_0} = 4a^2b^2cd^2r(c-ad)(c+ad) < 0$  entonces existe una vecindad de  $k_0$  donde  $\sqrt{\alpha_k} = \delta_k i$ ,  $\delta_k \in \mathbb{R}$ , y  $\Re(\lambda_{k,\pm}) = \frac{\beta_k}{2adk(ad-c)}$ . Como

$$\left. \frac{d}{dk} \Re(\lambda_{k,\pm}) \right|_{k=k_0} = \frac{-cr(c-ad)}{2abd(c+ad)} > 0$$

solo resta probar que  $p_3$  es asintóticamente estable. Si trasladamos  $p_3$  al origen, mediante el cambio de coordenadas

$$x \mapsto x + \frac{bc}{da-c}, \quad y \mapsto y + \frac{rbd(kad - kc - bc)}{k(da-c)^2},$$

obtenemos el sistema

$$x' = f(x, y) = \frac{-(bc - (c-ad)x)(b(c+ad)rx - (c-ad))(-krx + rx^2 + ky)}{(c-ad)k(cx - ad(b+x))}$$

$$y' = g(x, y) = \frac{x(-b^2cdr + bc(-c+ad)kr + (c-ad)^2ky)}{k(-cx + ad(b+x))},$$

el cual en coordenadas polares es dado por,

$$r' = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cos(\theta) + g(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \sin(\theta)$$

$$\theta' = \frac{1}{r}(g(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cos(\theta) - f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \sin(\theta))$$

Observemos que, para  $\theta = 0$ ,

$$r'|_{k=k_0} = r^2 \frac{(-bc + (c-ad)r)(c-ad)(-r)}{(c-ad)k_0(-abd + (c-ad)x)} < 0,$$

siempre que  $r \neq 0$ ,  $\frac{bc}{ad-c}$ ,  $\frac{bc+abd+(c-ad)k_0}{c-ad}$ . Así, el origen es asintóticamente estable. Luego, por el teorema de bifurcación de Hopf, tenemos que para  $k_0 < k$ , próximo de  $k_0$ , el campo  $X_k$  posee un ciclo límite.  $\square$

**5. Comprobación numérica.** En esta sección presentaremos algunas soluciones obtenidas numéricamente del sistema (4.4). Dichas soluciones fueron obtenidas usando Octave 4.0.

**Ejemplo 2.**

$$(5.1) \quad \begin{aligned} x' &= x(1-x) - y \frac{2x}{1+x} \\ y' &= -y + 2y \frac{2x}{1+x}, \end{aligned}$$

En este caso,  $k_0 = 5/3 \approx 1,6667$  y  $p_3 = (1/3, 8/15)$ . Por la Proposición 2, para  $k > k_0$ , próximo a  $k_0$ , el sistema asociado posee un ciclo límite. Esto es comprobado numéricamente por la Figura 5.4.

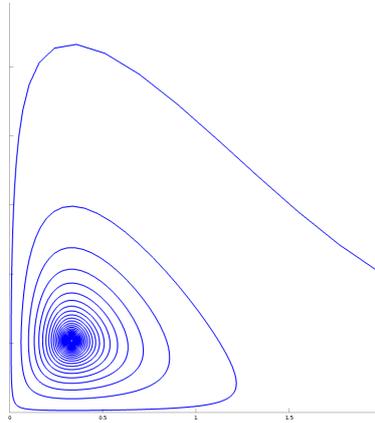


FIGURA 5.1.  $k = 1,5$

FIGURA 5.2. Para  $k = 1,5 < k_0$ ,  $p_3$  es asintóticamente estable

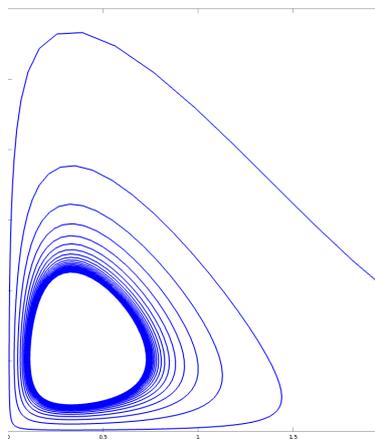


FIGURA 5.3.  $k = 1,8$

FIGURA 5.4. Para  $k = 1,8 > k_0$ , obtenemos un ciclo límite.

**Agradecimientos.** Agradecemos al revisor anónimo de este trabajo por las observaciones y correcciones que nos hizo llegar.

Referencias

- [1] Lotka Volterra Models. <http://jmahaffy.sdsu.edu/courses/f09/math636/lectures/lotka/qualde2.html>. Ingresado el 29-12-2016.
- [2] C. C. CHICONE, *Ordinary differential equations with applications*, Texts in applied mathematics, Springer, New York, 2006.
- [3] E. A. CODDINGTON AND N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, 1955. Exercices en fin de chapitres.
- [4] G. CRESPO, *El teorema del centro*, Master's thesis, Pontificia Universidad Católica del Perú. Escuela de Graduados., 2009.
- [5] H. DULAC, *Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre*, Bull. des Sc. Math, 32 (1908).

- [6] S. GAUTIER, L. GAVRILOV, AND I. D. ILIEV, *Perturbations of quadratic centers of genus one*, ArXiv e-prints, (2007).
- [7] I. D. ILIEV, *Perturbations of quadratic centers*, Bull. Sci. Math., 122 (1998), pp. 107–161.
- [8] W. KAPTEYN, *On the midpoints of integral curves of differential equations of the first order and the first degree*, Nederl. Akad. Wetensch. Verslag. Afd. Natuurk., 19 (1911), pp. 1446–1457.
- [9] ———, *New investigations on the midpoints of integrals of differential equations of the first order and the first degree*, Nederl. Akad. Wetensch. Verslag. Afd. Natuurk., 20 (1912), pp. 1354–1365.
- [10] J. D. MEISS, *Differential Dynamical System*, Mathematical modeling and computation, SIAM, Philadelphia, 2007.
- [11] J. D. MURRAY, *Mathematical biology. I. , An introduction*, Interdisciplinary applied mathematics, Springer, New York, 2002.
- [12] L. PUCHURI, *Clasificación de foliaciones elípticas inducidas por campos cuadráticos reales con centro*. 2015.
- [13] G. SAMANTA AND R. GÓMEZ-AÍZA, *Modelos dinámicos de poblaciones simples y de sistemas depredador-presa*, Miscelánea Matemática, 58 (2014), pp. 77–110.
- [14] Q. VAN DER HOFF, J. C. GREEF AND P. H. KLOPPERS, *Numerical investigation into the existence of limit cycles in two-dimensional predator-prey systems*, S Afr J Sci, 109 (2013), art #1143.
- [15] D. Z. Z. WANG, *Differential equations with symbolic computations*, Texts in applied mathematics, Birkhauser, Basel. Boston. Berlin, 2006.