Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 04(01): 30 - 37 (2017)

Invariantes de Laplace en Hipersuperficies Parametrizadas por Líneas de Curvatura.

Laplace Invariants in Hypersurfaces Parametrized by Lines of Curvature.

Carlos M. C. Riveros* and Armando M. V. Corro†

Received, Feb. 05, 2017 *Accepted, May. 20, 2017*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2017.01.04

Resumen

En este trabajo, usando la teoría de invariantes de Laplace damos otra demostración del siguiente resultado: Una hipersuperficie de Dupin própia M^n para $n \geq 4$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ con n curvaturas principales distintas y curvatura de Möbius constante, no puede ser parametrizada por líneas de curvatura. También, estudiamos clases especiales de hipersuperficies $M^n, n \geq 3$, en $\mathbb{R}^{n+1}$, parametrizadas por líneas de curvatura con n curvaturas principales distintas y obtenemos una relación geométrica cuando los invariantes de Laplace son nulos, mostramos que las foliaciones de M^n son hipersuperficies umbílicas si y solamente si $m_{ijk} = 0$. Además, las foliaciones de M^n son hipersuperficies de Dupin si y solamente si $m_{ij} = 0$.

Palabras clave. Invariantes de Laplace, hipersuperficies de Dupin, líneas de curvatura

Abstract

In this work, using the Laplace invariants theory we give other proof for the following result: A proper Dupin hypersurfaces M^n for $n \geq 4$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ with n distinct principal curvatures and constant möbius curvature, cannot be parametrized by lines of curvature. Also, we study special classes of hypersurfaces $M^n, n \geq 3$, in $\mathbb{R}^{n+1}$, parametrized by lines of curvature with n distinct principal curvatures and we obtain a geometric relation when the Laplace invariants are vanish, we show that the foliations of M^n are umbilical hypersurfaces if and only if $m_{ijk} = 0$. Moreover, the foliations of M^n are Dupin hypersurfaces if and only if $m_{ij} = 0$.

Keywords. Laplace invariants, Dupin hypersurfaces, lines of curvature

1. Introducción. Superficies de Dupin fueron estudiadas inicialmente por Dupin en 1822 y mas recientemente por otros autores por ejemplo [1]- [3], [6]- [11] y [13]- [16], los cuales estudiaron varios aspectos de las hipersuperficies de Dupin. la clase de hipersuperficies de Dupin es invariante por el grupo de transformaciones de Lie (ver [10]). Por lo tanto, la clasificación de las hipersuperficies de Dupin es considerada a menos de estas transformaciones. La clasificación local de superficies de Dupin en $\mathbb{R}^3$ es bien conocida. Pinkall [9] dio una completa clasificación a menos de equivalencia de Lie para hipersuperficies de Dupin $M^3 \subset \mathbb{R}^4$, con tres curvaturas principales distintas. Niebergall [8] y Cecil-Jensen [3] estudiaron hipersuperficies de Dupin propias con cuatro curvaturas principales distintas y curvatura de Lie constante (cociente de cuatro curvaturas principales).

Tenenblat et al. en [15] mostraron que una hipersuperficie de Dupin própia en $\mathbb{R}^{n+1}$ con n curvaturas principales distintas y curvatura de Möbius constante no puede ser parametrizada por líneas de curvatura.

*Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília-DF, Brazil. Corresponding author *carlos@mat.unb.br*.

†Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiâs, 74001-970, Goiânia-GO, Brazil. Corresponding author *avcorro@gmail.com*.

Observamos que en este caso la condición de la curvatura de Möbius ser constante es equivalente a tener todos los invariantes de Laplace m_{ijk} nulos.

En este trabajo, damos otra demostración para el resultado obtenido en [15]. También, estudiamos clases especiales de hipersuperficies $M^n, n \geq 3$, en $\mathbb{R}^{n+1}$, parametrizadas por líneas de curvatura con n curvaturas principales distintas. Mostramos que las foliaciones de M^n son hipersuperficies umbílicas si y solamente si $m_{ijk} = 0$. Además, las foliaciones de M^n son hipersuperficies de Dupin si y solamente si $m_{ij} = 0$. Estas caracterizaciones son basadas en la teoría de invariantes de Laplace n-dimensionales, introducidos por Kamran-Tenenblat [4]- [5].

2. Material y Métodos. En este trabajo fueron estudiadas las hipersuperficies parametrizadas por líneas de curvatura com n curvaturas principales distintas en $\mathbb{R}^{n+1}$, usando la teoría de invariantes de Laplace obtuvimos algunas propiedades geométricas de las foliaciones de dichas hipersuperficies. La teoría de invariantes de laplace ha sido usado para realizar diversos estudios de las hipersuperficies de Dupin parametrizadas por líneas de curvatura, ver por ejemplo [12]- [15]. El método a ser usado es el científico, esto es, a partir de un conjunto de resultados o hipótesis obtendremos a través de deducciones lógicas nuevos conocimientos.

2.1. Objeto de estudio. El objeto estudiado en este trabajo son las hipersuperficies parametrizadas por líneas de curvatura com n curvaturas principales distintas en $\mathbb{R}^{n+1}$, el estudio de algunas propiedades de las foliaciones de tales hipersuperficies sera abordado usando la teoría de invariantes de Laplace n-dimensionales ([4]- [5]).

2.2. Base teórica. A seguir daremos algunas definiciones y propiedades de las hipersuperficies parametrizadas por líneas de curvatura, que serán usados en las demostraciones de los resultados principales, para esto, sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ and $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega$. Sea $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, una hipersuperficie parametrizada por líneas de curvatura, con curvaturas principales distintas $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq n$ y $N : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ un campo vectorial normal unitário de X. Entonces

$$\langle X_{,i}, X_{,j} \rangle = \delta_{ij} g_{ii} \ , \ 1 \leq i, j \leq n \ , \tag{2.1}$$

$$N_{,i} = \lambda_i X_{,i} \ , \tag{2.2}$$

donde el subíndice $_{,i}$ denota la derivada con respecto a x_i.
Además,

$$X_{,ii} - \sum_j \Gamma_{ii}^j X_{,j} - g_{ii}\lambda_i N = 0, \tag{2.3}$$

$$X_{,ij} - \Gamma_{ij}^i X_{,i} - \Gamma_{ij}^j X_{,j} = 0 \ , \ \ 1 \leq i \neq j \leq n \ , \tag{2.4}$$

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_j - \lambda_i}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n, \tag{2.5}$$

donde Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel.

Los símbolos de Christoffel en términos de la métrica (2.1) son dados por

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \qquad \Gamma_{ii}^i = \frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}}, \qquad \Gamma_{ii}^j = -\frac{g_{ii,j}}{2g_{jj}}, \qquad \Gamma_{ij}^i = \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}}, \tag{2.6}$$

donde i, j, k son distintos.

Ahora consideremos los invariantes de Laplace n-dimensionales del sistema de ecuaciones (2.4) (ver [4]- [5] para la definición de estos invariantes),

$$\begin{array}{rcl} m_{ij} & = & -\Gamma_{ij,i}^i + \Gamma_{ij}^i \Gamma_{ij}^j, \\ m_{ijk} & = & \Gamma_{ij}^i - \Gamma_{kj}^k \ , \quad k \neq i, j \ , \ \ 1 \leq k \leq n. \end{array} \tag{2.7}$$

Como una consecuencia de (2.5) y del Lema obtenido en [5], obtenemos para $1 \leq i, j, k, l \leq n, \ \ i, j, k, l$ distintos,

$$\begin{array}{rcl} m_{ijk} + m_{kji} & = & 0, \\ m_{ijk,k} - m_{ijk} m_{jki} - m_{kj} & = & 0, \\ m_{ij,k} + m_{ijk} m_{ik} + m_{ikj} m_{ij} & = & 0, \\ m_{ijk} - m_{ijl} - m_{ljk} & = & 0, \\ m_{lik,j} + m_{ijl} m_{kil} + m_{ljk} m_{kij} & = & 0. \end{array} \tag{2.8}$$

La ecuación de Gauss para la inmersión X es dada por

$$\frac{1}{g_{jj}}\left[\Gamma^i_{ij,j}+\Gamma^i_{ij}(\Gamma^i_{ij}-\Gamma^j_{jj})\right]+\frac{1}{g_{ii}}\left[\Gamma^j_{ji,i}+\Gamma^j_{ji}(\Gamma^j_{ji}-\Gamma^i_{ii})\right]+\sum_{k\neq i\neq j}\frac{\Gamma^i_{ik}\Gamma^j_{jk}}{g_{kk}}+\lambda_i\lambda_j=0. \tag{2.9}$$

Para hipersuperficies con curvaturas principales distintas, la *curvatura de Möbius* es definida, para distintos i, j, k, por

$$C^{ijk}=\frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}.$$

Como todos los λ_i son distintos concluímos que $C^{ijk}\neq 0$ y $C^{ijk}\neq 1$. Las curvaturas de Möbius son invariantes por transformaciones de Möbius.

Definición 1. Una hipersuperficie M^n es dicha de *Dupin* si cada curvatura principal es constante a lo largo de su correspondiente superficie de curvatura. Una subvariedad de Dupin M^n es dicha *própia* si el número g de curvaturas principales distintas es constante sobre M^n.

Lema 1. *Sea $X:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$, $n\geq 3$, una hipersuperficie parametrizada por líneas de curvatura, con curvaturas principales distintas $-\lambda_i$, $1\leq i\leq n$. Entonces las curvas coordenadas $\alpha_i(x_i)=X(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)$ tienen curvatura geodésica k_g^i determinada por*

$$(k_g^i)^2=\sum_{j\neq i}\left(\frac{\Gamma^i_{ij}}{\sqrt{g_{jj}}}\right)^2. \tag{2.10}$$

Prueba: Considerando la línea de curvatura $\alpha_i(x_i)=X(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)$ y usando una reparametrización por longitud de arco $s(u_i)$, tenemos que

$$\frac{d\alpha^i}{ds}=\frac{d\alpha^i}{du_i}.\frac{du_i}{ds}=\frac{X_{,i}}{\sqrt{g_{ii}}}.$$

Derivando una vez mas

$$\frac{d^2\alpha^i}{ds^2}=\frac{X_{,ii}}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{du_i}{ds}-\frac{X_{,i}\,g_{ii,i}}{2g_{ii}^2}.$$

Como $\frac{du_i}{ds}=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}$ y usando (2.6) sigue que

$$\frac{d^2\alpha^i}{ds^2}=\frac{1}{g_{ii}}\left(X_{,ii}-X_{,i}\Gamma^i_{ii}\right).$$

Ahora usando (2.3) obtenemos

$$\frac{d^2\alpha^i}{ds^2}=\frac{1}{g_{ii}}\left(\sum_j\Gamma^j_{ii}X_{,j}+g_{ii}\lambda_iN-X_{,i}\Gamma^i_{ii}\right).$$

De esta expresión y de la ecuación (2.6)

$$\frac{d^2\alpha^i}{ds^2}=-\sum_{j\neq i}\frac{\Gamma^i_{ij}}{g_{jj}}X_{,j}+\lambda_iN.$$

Por tanto (2.10) sigue de esta ecuación y la prueba está concluida. □

La siguiente Proposición fue obtenida en [12].

Proposición 1. *Sea $X:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$, $n\geq 3$, una hipersuperficie parametrizada por líneas de curvatura, con curvaturas principales distintas $-\lambda_i$, $1\leq i\leq n$.*
Las líneas de curvatura $\alpha_i(x_i)=X(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)$, $1\leq i\leq n$ son planas si y solamente si

$$\lambda_{i,i}\Gamma^i_{ij}+\lambda_i m_{ij}=0,\quad 1\leq i\neq j\leq n. \tag{2.11}$$

3. Resultados. En esta sección damos otra demostración del resultado obtenido en [15]. Además, demostramos resultados que proporcionan caracterizaciones locales de ciertas clases de hipersuperficies $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, parametrizadas por líneas de curvatura con n curvaturas principales distintas en cada punto.

Teorema 1. *Una hipersuperficie de duping própia M^n para $n \geq 4$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ con n curvaturas principales distintas y curvatura de Möbius constante no puede ser parametrizada por líneas de curvatura.*

Prueba: Asuma que M^n admite una parametrización $X(x_1, \cdots, x_n)$ por líneas de curvatura con curvaturas principales distintas $-\lambda_i$. Esta parametrización satisface (2.4) y usando el hecho que en el caso de Dupin, la curvatura de Möbius es constante si y solamente si los invariantes de Laplace satisfacen $m_{ijk} = 0$, obtenemos que la transformación

$$X = V\bar{X},\ V = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i},\ i \neq j,\ \text{ para } i, j \text{ fijos.}$$

transforma el sistema (2.4) en el siguiente sistema

$$\bar{X}_{,ij} = \bar{X}_{ik} = \bar{X}_{jk} = \bar{X}_{kl} = 0. \tag{3.1}$$

cuya solución es dada por $\bar{X} = \sum_{r=1}^{n} H^r(x_r)$, donde $H^r(x_r)$ son funciones vectoriales en $\mathbb{R}^{n+1}$, de esta forma obtenemos que

$$X = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \sum_{r=1}^{n} H^r(x_r). \tag{3.2}$$

Como, X es parametrizada por líneas de curvatura de (3.2), por derivación encontramos

$$\sigma^r \neq 0,\ 1 \leq r \leq n,$$

$$< \sigma^r, \sigma^l > = 0,\ 1 \leq r \neq l \leq n, \tag{3.3}$$

$$\lambda_r = (\lambda_j - \lambda_i) \frac{< \sigma^r_{,r}, \sigma^1 \times \sigma^2 \cdots \times \sigma^n >}{|\sigma^r|^2 |\sigma^1||\sigma^2| \cdots |\sigma^n|}, \tag{3.4}$$

donde $\sigma^i = \Gamma^j_{ji} \triangle + H^i_{,i}$ y $\sigma^k = \Gamma^i_{ik} \triangle + H^k_{,k},\ k \neq i,\ \triangle = \sum_{r=1}^{n} H^r(x_r)$.

De (3.3) tenemos que $\{\sigma^i, \sigma^k, N\}$ es una base de $\mathbb{R}^{n+1}$, por tanto

$$\sigma^r_{,r} = f_{r1}\sigma^1 + f_{r2}\sigma^2 + \cdots + f_{rr}\sigma^r + \cdots + f_{rn+1}N \tag{3.5}$$

Usando (3.5) en (3.4)

$$\lambda_r = (\lambda_j - \lambda_i) \frac{f_{rn+1}}{|\sigma^r|^2} \tag{3.6}$$

y por tanto

$$f_{rn+1} = \frac{\lambda_r}{\lambda_j - \lambda_i} |\sigma^r|^2.$$

De esta expresión y (3.5) sigue que

$$\sigma^r_{,r} = f_{rr}\sigma^r + f_{rn+1}N.$$

Ahora, si existe $t \neq r$ tal que $f_{tn+1} \neq 0$ y $f_{rn+1} \neq 0$ podemos concluir que N es constante y como consecuencia las curvaturas principales son nulas, la cual es una contradicción.

Si $f_{rn+1} \neq 0$ para algún r y $f_{tn+1} = 0$ para todo $t \neq r$, sigue de (3.4) que $\lambda_t = 0$ y tenemos una contradicción.

Si $f_{rn+1} = 0$ para todo r, de (3.6) sigue que $\lambda_r = 0$ y nuevamente tenemos una contradicción, de esta forma, la demostración está completa. □

Teorema 2. *Sea $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, n \geq 3$, una hipersuperficie parametrizada por líneas de curvatura, con n curvaturas principales distintas $-\lambda_i$.*

1) Las foliaciones de M^n son hipersuperficies umbílicas en M^n si y solamente si $m_{ijk} = 0,\ \forall 1 \leq i \neq$

$j \neq k \leq n$,
2) Las foliaciones de M^n son hipersuperficies de Dupin en M^n si y solamente si $m_{ij} = 0, \ \forall\, 1 \leq i \neq j \leq n$,
3) Si $m_{ij} = 0$. Entonces las líneas de curvatura tienen curvatura geodésica constante.

Prueba: 1) Sea $X(x_1, \cdots, x_n)$ una parametrización local de M^n por líneas de curvatura y considere la foliación de M^n dada por

$$Y(x_1, \cdots, x_r) = X(x_1, x_2, \cdots, x_r, x^0_{r+1}, \cdots, x^0_n),$$

Mostraremos que Y es umbílica. De hecho, los vectores

$$N^j = \frac{X_{,j}}{\sqrt{g_{jj}}}, \quad r+1 \leq j \leq n \tag{3.7}$$

son campos normales unitários a Y en M^n.

Derivando (3.7) con relación a x_i y usando las ecuaciones (2.4)-(2.6) obtenemos

$$N^j_{,i} = \frac{\Gamma^i_{ij}}{\sqrt{g_{jj}}} X_{,i}, \ 1 \leq i \leq r. \tag{3.8}$$

De aquí, las curvaturas principales de Y son dadas por

$$\lambda^j_i = \frac{\Gamma^i_{ij}}{\sqrt{g_{jj}}}, \ 1 \leq i \leq r. \tag{3.9}$$

Por tanto, Y es una hipersuperficie umbílica en M^n si y solamente si $\lambda^j_i = \lambda^j_k, \quad i \neq j \neq k$. De (3.9) tenemos que $\Gamma^i_{ij} = \Gamma^k_{kj}, \ i \neq j \neq k$, usando (2.7) obtenemos el resultado.

2) De forma semejante al ítem 1), usando (3.9), Y es una hipersuperficie de Dupin en M^n si y solamente si $\lambda^j_{i,i} = 0$, es decir, si y solamente si

$$\left(\frac{\Gamma^i_{ij}}{\sqrt{g_{jj}}} \right)_{,i} = 0 \tag{3.10}$$

De la ecuación (2.7) sigue que (3.10) es equivalente a $m_{ij} = 0, \ i \neq j$.

3) Derivando la ecuación (2.10) con relación a x_i tenemos

$$k^i_g \, k^i_{g,i} = \sum_{j \neq i} \frac{\Gamma^i_{ij}}{\sqrt{g_{jj}}} \left(\frac{\Gamma^i_{ij,i}}{\sqrt{g_{jj}}} - \frac{g_{jj,i}}{2(g_{jj})^{3/2}} \right).$$

Utilizando (2.6) y (2.7) obtenemos

$$k^i_g \, k^i_{g,i} = -\sum_{j \neq i} \frac{\Gamma^i_{ij} \, m_{ij}}{g_{jj}}.$$

Usando esta expresión y del hecho de que $m_{ij} = 0$ tenemos que $k^i_{g,i} = 0$ y de esta forma obtenemos el resultado. □

Corolario 1. *Sea $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, n \geq 3$, una hipersuperficie parametrizada por líneas de curvatura, con n curvatures principales distintas $-\lambda_i$. Si las foliaciones de M^n son hipersuperficies umbílicas en M^n. Entonces estas foliaciones son hipersuperficies de Dupin en M^n.*

Prueba: Del Teorema 2 (ítem 1)), tenemos que $m_{ijk} = 0, \ 1 \leq i \neq j \neq k \leq n$, usando este hecho en la segunda ecuación de (2.8), sigue que $m_{ij} = 0, \ i \neq j$. Por tanto, el resultado sigue del Teorema 2 (ítem 2)). □

Lema 2. *Sea $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, n \geq 3$, una hipersuperficie parametrizada por líneas de curvatura planas, con n curvaturas principales distintas $-\lambda_i$ cuyas foliaciones son superficies mínimas, $m_{ij} = 0, \ i \neq j$ y $\lambda_j + \lambda_k \neq 0, \ j \neq k$. Entonces M^n es de Dupin.*

Prueba: Sea $X(x_1, \cdots, x_n)$ una parametrización local de M^n por líneas de curvatura. Considere la foliación (superficie mínima) de M^n dada por

$$Y(x_r, x_{r+1}) = X(x^0_1, x^0_2, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x^0_n), \ 1 \leq r \leq n.$$

Los vectores $N^j = \dfrac{X_{,j}}{\sqrt{g_{jj}}}$, $j \neq r, r+1$ son campos normales unitários a Y y las curvaturas principales son dadas por (3.9).
Como, las foliaciones son superficies mińimas tenemos que

$$\lambda_r^j + \lambda_{r+1}^j = 0 \iff \Gamma_{rj}^r + \Gamma_{r+1j}^{r+1} = 0, j \neq r, r+1. \tag{3.11}$$

Por otro lado, como las líneas de curvatura son planas y $m_{ij} = 0$, obtenemos

$$\lambda_{i,i}\Gamma_{ij}^j = 0, \ 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Suponiendo que $\lambda_{i,i} \neq 0, \ i \neq j$, obtenemos que $\Gamma_{ij}^j = 0$.
De la ecuación de Gauss sigue que

$$\begin{aligned} \Gamma_{ji,i}^j + \Gamma_{ji}^j(\Gamma_{ji}^j - \Gamma_{ii}^i) + \lambda_i\lambda_j g_{ii} = 0, \\ \Gamma_{ki,i}^k + \Gamma_{ki}^k(\Gamma_{ki}^k - \Gamma_{ii}^i) + \lambda_i\lambda_k g_{ii} = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

De las ecuaciones (3.11) y (3.12) tenemos

$$\lambda_i(\lambda_j + \lambda_k)g_{ii} = 0.$$

De esto, sigue que $\lambda_i = 0$ la cual es una contradicción, por tanto $\lambda_{i,i} = 0$ y de esta forma M^n es de Dupin. Esto concluye la demostración. □

Observación 1. La recíproca del Lemma 2 no es verdadera. De hecho, consideremos la hipersuperficie de Dupin parametrizada por líneas de curvatura dada por

$$X(x_1, x_2, x_3) = \frac{e^{-x_2}}{\sqrt{c}}\left(\frac{\sin x_1}{\sqrt{c-1}}, -\frac{\cos x_1}{\sqrt{c-1}}, \sin x_3, -\cos x_3\right), c > 1.$$

Las curvaturas principales de X son dadas por

$$\lambda_1 = -(c-1)e^{x_2}, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = e^{x_2}.$$

Además,

$$\begin{aligned} m_{ij} &= 0, \ 1 \leq i \neq j \leq 3, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= -(c-1)e^{x_2} \neq 0, \\ \lambda_1 + \lambda_3 &= -(c-2)e^{x_2} \neq 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= e^{x_2} \neq 0. \end{aligned}$$

También,

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{32}^3 = -1, \ \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{21}^2 = 0.$$

Considerando la foliación $Y(x_1, x_3)$ de X con vector normal $N^2 = \dfrac{X_{,2}}{\sqrt{g_{22}}}$ y usando (3.9) obtenemos que las curvaturas principales de esta foliación son dadas por

$$\lambda_1^2 = \lambda_3^2 = -\sqrt{c-1}e^{x_2},$$

de esto, sigue que $\lambda_1^2 + \lambda_3^2 = -2\sqrt{c-1}e^{x_2} \neq 0$ y por tanto esta foliación no es mínima.

Lema 3. *Sea $M^n \subset I\!R^{n+1}, n \geq 3$, una hipersuperficie parametrizada por líneas de curvatura, con n curvaturas principales distintas $-\lambda_i$, $1 \leq i \leq n$. Las líneas de curvatura son curvas de Dupin planas en M^n, si y solamente si , M^n es de Dupin.*

Prueba: Sea $X(x_1, \cdots, x_n)$ una parametrización de M^n por líneas de curvatura y $\alpha_i(x_i) = X(x_1^0, \cdots, x_i, \cdots, x_n^0)$ una línea de curvatura de X.
Como, $N^j = \dfrac{X_{,j}}{\sqrt{g}_{jj}}$, $j \neq i$ son campos normales unitários a α_i y las curvaturas principales son dadas por (3.9), tenemos que, α_i es una curva de Dupin si y solamente si $\left(\dfrac{\Gamma_{ij}^i}{\sqrt{g}_{jj}}\right)_{,i} = 0$, esta condición es

equivalente a $m_{ij} = 0,\ 1 \leq i \neq j \leq n$. De la Proposition 1, sigue que $\lambda_{i,i}\Gamma^i_{ij} = 0$ y de esto, obtenemos $\lambda_{i,i} = 0$. Por tanto, M^n es de Dupin. □

Lema 4. *Dada una hipersuperficie $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, n \geq 3$, parametrizada por líneas de curvatura planas con n curvaturas principales distintas $-\lambda_i,\ 1 \leq i \leq n$. Existe una hipersuperficie $\widetilde{M}^n \subset S^{n+1}$ parametrizada por líneas de curvatura con n curvaturas principales distintas $\widetilde{\lambda}_i$ satisfaciendo*

$$\widetilde{\lambda}_{i,i}\widetilde{\Gamma}^i_{ij} + \widetilde{\lambda}_i\widetilde{m}_{ij} =< X, X_{,j} > \lambda_{i,i} + < X, N > m_{ij},\ 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{3.13}$$

donde X es una parametrización de M^n y N es un campo normal unitário a X.

Prueba: Sea X una parametrización local de M^n. Considerando la proyección estereográfica $P : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ dada por

$$P(x) = \frac{1}{1+ < x, x >}(2x, 1- < x, x >),$$

obtenemos la hipersuperficie parametrizada por líneas de curvatura $\widetilde{M}^n \subset S^{n+1}$ con parametrización dada por $\widetilde{X} = P(X)$. Por un cálculo directo, podemos mostrar que las curvaturas principales de $\widetilde{X}$ son dadas por

$$\widetilde{\lambda}_i = -\frac{1+ < X, X >}{2}\lambda_i + < X, N >,\ 1 \leq i \leq n. \tag{3.14}$$

Usando (3.14) obtenemos los símbolos de Christopher de $\widetilde{X}$

$$\widetilde{\Gamma}^i_{ij} = \Gamma^i_{ij} - 2\frac{< X, X_{,j} >}{1+ < X, X >},\ 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{3.15}$$

De (3.15) tenemos que $\widetilde{m}_{ij} = m_{ij}$. Por otro lado, derivando (3.14) con relación a x_i

$$\widetilde{\lambda}_{i,i} = -\frac{1+ < X, X >}{2}\lambda_{i,i} \tag{3.16}$$

Por tanto, el resultado sigue de la Proposition 1 y de las ecuaciones (3.14)-(3.16). □

4. Discusión. En este trabajo usando a teoría de invariantes de Laplace:

1. Dimos otra demostración de un resultado obtenido en [15], el cual afirma que para $n \geq 4$ hipersuperficies de Dupin propias con n curvaturas principales distintas y curvatura de Möbius constante no pueden ser parametrizadas por líneas de curvatura.
2. También obtenemos relaciones geométricas en estas hipersuperficies, a saber, que las foliaciones de una hipersuperficie M^n parametrizada por líneas de curvatura pueden ser hipersuperficies umbílicas en M^n (si $m_{ijk} = 0$) o hipersuperficies de Dupin en M^n (si $m_{ij} = 0$). Además cuando $m_{ij} = 0$ la curvatura geodésica de las líneas de curvatura es constante.
3. Considerando hipersuperficies parametrizadas por líneas de curvatura plana cuyas foliaciones son superficies mínimas y algunas condiciones sobre las curvaturas principales e invariantes de Laplace mostramos que esta hipersuperficie tiene que ser de Dupin.
4. Finalmente, decir que las curvas coordenadas de una hipersuperficie parametrizada por líneas de curvatura son curvas de Dupin planas es equivalente a decir que esta hipersuperficie es de dupin.

5. Conclusiones. De los resultados obtenidos en este trabajo podemos hacer las siguientes conclusiones:

Para $n \geq 4$, no existen hipersuperficies de Dupin propias parametrizadas por líneas de curvatura con n curvaturas principales distintas y curvatura de Möbius constante. Toda foliación umbilical de una hipersuperficie parametrizada por líneas de curvatura es de Dupin. No siempre las foliaciones de una hipersuperficie de Dupin son superficies mínimas. Dada una hipersuperficie en $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrizada por líneas de curvatura siempre es posible encontrar una hipersuperficie parametrizada por líneas de curvatura en la esfera unitaria S^{n+1} satisfaciendo la ecuación (3.13).

6. Recomendaciones y Propuestas. Resultados semejantes pueden ser obtenidos considerando hipersuperficies parametrizadas por líneas de curvatura con curvaturas principales distintas en $\mathbb{H}^{n+1}$, por aparecer futuramente.

Referencias

[1] T. E. CECIL AND P. J. RYAN, *Conformal geometry and the cyclides of Dupin*, Can. J. Math. 32 (1980), pp. 767–782.
[2] T. E. CECIL AND G. JENSEN, *Dupin hypersurfaces with three principal curvatures*, Invent. Math. 132 (1998), pp. 121–178.
[3] ———, *Dupin hypersurfaces with four principal curvatures*, Geom. Dedicata, 79 (2000), pp. 1–49.
[4] N. KAMRAN AND K. TENENBLAT, *Laplace transformation in higher dimensions*, Duke Math. Journal 84 (1996), pp. 237–266.
[5] ———, *Periodic systems for the higher-dimensional Laplace transformation*, Discrete and continuous dynamical systems, (1998), pp. 359–378.
[6] R. MIYAOKA, *Compact Dupin hypersurfaces with three principal curvatures*, Math. Z. 187 (1984), pp. 433–452.
[7] ———, *Dupin hypersurfaces and a Lie invariant*, Kodai Math. J. 12 (1989), pp. 228–256.
[8] R. NIEBERGALL, *Dupin hypersurfaces in* $\mathbb{R}^5$, Geom. Dedicata 40 (1991), pp. 1-22, and 41 (1992), pp. 5–38.
[9] U. PINKALL, *Dupinsche Hyperflachen in* E^4, Manuscripta Math. 51 (1985), pp. 89–119.
[10] ———, *Dupin hypersurfaces*, Math. Ann. 270 (1985), pp. 427–440.
[11] U. PINKALL AND G. THORBERGSSON, *Deformations of Dupin hypersurfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), pp. 1037–1043.
[12] C. M. C. RIVEROS AND A. M. V. CORRO, *Classes of Hypersurfaces with vanishing laplace invariants*, Bull. Korean Math. Soc. 49 (2012), no 4, pp. 685–692
[13] C. M. C. RIVEROS AND K. TENENBLAT, *On four dimensional Dupin hypersurfaces in Euclidean space*, An. Acad. Bras. Cien. 75(1) (2003), pp. 1–7.
[14] ———, *Dupin hypersurfaces in* $\mathbb{R}^5$, Canadian Journal of Mathematics, 57(6) (2005), pp. 1291–1313.
[15] K. TENENBLAT, C. M. C. RIVEROS AND L. A. RODRIGUES, *On Dupin hypersurfaces with constant Möbius curvature*, Pacific J. Math. 236 (2008), no 1, pp. 89–103.
[16] G. THORBERGSSON, *Dupin hypersurfaces*, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), pp. 493–498.