Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 03(02): 107 - 112 (2016)

Convexidad Estricta a Través de normas equivalentes en espacios de Banach Separables.

Strict Convexity Through Equivalent Norms in Separables Banach Spaces.

Willy Zubiaga Vera*

Received, Jun. 18, 2016 *Accepted, Sept. 22, 2016.*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2016.02.06

Resumen

Sea E un espacio de Banach separable con norma $\|.\|$. En el presente trabajo, se tiene como objetivo construir una norma $\|.\|_1$ que sea equivalente a $\|.\|$ en E, tal que $\|.\|_1$ estrictamente convexa. Además se demuestra que su norma dual conjugada es también estrictamente convexa.

Palabras clave. Convexidad estricta, norma dual, espacios de Banach separable.

Abstract

Let E be a separable Banach space with norm $\|.\|$. In the present work, the objective is to construct a norm$\|.\|_1$ that is equivalent to $\|.\|$ in E, such that $\|.\|_1$ is strictly convex. In addition it is shown that its dual conjugate norm is also strictly convex..

Keywords. Strict convexity, dual norm, separable Banach spaces.

1. Introducción. En esta sección se introduce las herramientas esenciales para demostrar nuestro resultado.

Sea E un espacio normado dotado de la norma $\|.\|$. Recordemos que la topología débil en el espacio normado E es denotada por $\sigma(E, E^*)$, y es la topología generada por los funcionales continuos $f \in E^*$. Además, para cada $x_0 \in E$, los conjuntos de la forma

$$V_{J,\epsilon} = \{x \in E : |\langle f_i, x\rangle - \langle f_i, x_0\rangle| < \epsilon \text{ para todo } i \in J\},$$

donde J es un conjunto finito, $f_i \in E^*$ para todo $i \in J$ y $\epsilon > 0$, forman una base de vecindades abiertas de x_0 para la topología débil.

Sea E^* el dual de E. La topología débil-$*$ en E^*, es denotada por $\sigma(E^*, E)$, es la topología en E^* generada por las funciones que pertenecen al conjunto $J_E = \{J_E(x) : \ x \in E\}$, esto es, por las funciones

$$f \in E^* \to J_E(x)(f) = \langle f, x\rangle$$

donde $x \in E$. Para cada $f_0 \in E^*$, los conjuntos de la forma

$$W_{J,\epsilon} = \{f \in E^* : \ |\langle f, x_i\rangle - \langle f_0, x_i\rangle| < \epsilon \text{ para todo } i \in J\},$$

donde J es un conjunto finito, $x_i \in E$ para todo $i \in J$ y $\epsilon > 0$, forman una base de vecindades abiertas de f_0 en la topología débil-$*$ (ver [1]).

* Departamento de Matemáticas-Universidad Nacional de Trujillo (wizuve@hotmail.com.)

Recordemos que, dado un espacio normado E, B_E representa la bola unitaria cerrada de E, es decir

$$B_E = \{x \in E : \ \ \|x\| \leq 1\}$$

Teorema 1. *(Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki [1]) Para todo espacio normado E, la bola B_{E^*} es compacta en la topología débil-$*$ $\sigma(E^*, E)$ de E^**

Se dice que E es separable, si existe un subconjunto denso $D \subset E$ que es denso y numerable en E.

Teorema 2. *[1] Sea E un espacio de Banach. Entonces*

1. *Si E^* es separable, entonces E es separable.*
2. *E es reflexivo y separable sí y sólo sí E^* es reflexivo y separable.*
3. *Si E es separable, entonces B_{E^*} es metrizable en la topología débil-$*$ $\sigma(E^*, E)$.*
4. *Si E^* es separable, entonces B_E es metrizable en la topología débil $\sigma(E, E^*)$.*

Un espacio de Banach es uniformemente convexo si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$x, y \in E, \ \ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \ \text{ y } \ \|x - y\| \geq \epsilon \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Teorema 3. *(Milman-Pettis [1]) Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.*

Nota 1.1. *Todo espacio de Hilbert H es uniformemente convexo. En efecto, dados $x, y \in B_H$ y $0 < \epsilon \leq 2$, por la Ley del paralelogramo, se tiene que si $\|x - y\| \geq \epsilon$, entonces*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{\|x-y\|^2}{4} \leq 1 - \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Basta tomar $\delta = 1 - (1 - \epsilon^2/4)^{1/2} > 0$

2. Resultado. Sea $(a_n) \subset B_E$ un subconjunto denso de B_E con respecto a la topología fuerte. Sea $(b_n) \subset B_{E^*}$ un subconjunto numerable de B_{E^*} que es denso en B_{E^*} para la topología débil-$*$ $\sigma(E^*, E)$. Se debe notar que, puesto que E es un espacio de Banach separable, entonces B_{E^*} es un espacio métrico compacto para la topología $\sigma(E^*, E)$, por lo tanto existe $(b_n) \subset B_{E^*}$ denso numerable (consecuencia del Teorema 1 y 2).

Considere el siguiente funcional

$$\begin{aligned} [.] &: E^* \to \mathbb{R} \\ f &\to [f] = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f, a_n \rangle|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Notemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f, a_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|f\|^2 \|a_n\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < 1,$$

lo cual implica que $[f]$ esta bien definida.

Afirmación 1: $[.]$ es una norma en E^*.

En efecto. Se debe notar que $[f] \geq 0 \, \forall f \in B_{E^*}$, además si $[f] = 0$, entonces

$$\langle f, a_n \rangle = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $\{a_n\}$ es denso en E y f es continua entonces $\langle f, a \rangle = 0$ para cualquier $a \in E$, esto implica que $f = 0$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in B_{E^*}$ entonces

$$\begin{aligned} [\lambda f] &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle \lambda f, a_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(|\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f, a_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &= |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle \lambda f, a_n \rangle|^2 \right)^{1/2} = |\lambda| [f] \end{aligned}$$

Ahora se quiere probar que $[f+g] \leq [f]+[g]$ para todo $f, g \in B_{E^*}$. En efecto, sean

$$a = \frac{|\langle f, a_n\rangle|}{[f]}, \quad b = \frac{|\langle g, a_n\rangle|}{[g]}.$$

Por la desigualdad de Young se tiene

$$\frac{|\langle f, a_n\rangle|}{[f]}\frac{|\langle g, a_n\rangle|}{[g]} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{|\langle f, a_n\rangle|^2}{[f]^2} + \frac{|\langle g, a_n\rangle|^2}{[g]^2}\right),$$

luego

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\langle f, a_n\rangle|}{[f]}\frac{|\langle g, a_n\rangle|}{[g]} &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{[f]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f, a_n\rangle|^2 + \frac{1}{[g]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle g, a_n\rangle|^2\right)\\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f, a_n\rangle||\langle g, a_n\rangle| \leq [f][g]. \tag{2.2}$$

Ahora, puesto que

$$\begin{aligned}|\langle f+g, a_n\rangle|^2 &= |\langle f+g, a_n\rangle||\langle f+g, a_n\rangle|\\ &\leq |\langle f, a_n\rangle||\langle f+g, a_n\rangle| + |\langle g, a_n\rangle||\langle f+g, a_n\rangle|\end{aligned}$$

entonces, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f+g, a_n\rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f, a_n\rangle||\langle f+g, a_n\rangle| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle g, a_n\rangle||\langle f+g, a_n\rangle|$$

Combinando esto último con la ecuación (2.2) se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f+g, a_n\rangle|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f, a_n\rangle||\langle f+g, a_n\rangle| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle g, a_n\rangle||\langle f+g, a_n\rangle|\\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f, a_n\rangle|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f+g, a_n\rangle|^2\right)^{1/2}\\ &\quad + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle g, a_n\rangle|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\langle f+g, a_n\rangle|^2\right)^{1/2}\\ \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f+g, a_n\rangle|\right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f, a_n\rangle|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle g, a_n\rangle|^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$

asi $[f+g] \leq [f]+[g]$. Por lo tanto $[.]$ es una norma.

Ahora, sea $f \in E^*$ y

$$\|f\|_1 = \left(\|f\|^2 + [f]^2\right)^{1/2},$$

donde $\|.\|$ denota la norma en el espacio E^*

Afirmación 2: $\|.\|_1$ es una norma equivalente a $\|.\|$. Por lo anterior se tiene que $\|.\|_1$ es norma. Ademas, como $a_n \in B_E$, entonces $\|a_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\begin{aligned}\|f\| \leq \|f\|_1 &= \left(\|f\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f, a_n\rangle|^2\right)^{1/2}\\ &\leq \left(\|f\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\|f\|^2\|a_n\|^2\right)^{1/2}\\ &\leq \left(\|f\|^2 + \|f\|^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)^{1/2} \leq \sqrt{2}\|f\|.\end{aligned}$$

así se concluye la afirmación.

Afirmación 3: $\|.\|_1$ es estrictamente convexa. En efecto, se debe notar que $[.]$ es inducida por un producto. En efecto, verifiquemos que $[.]$ cumple la ley del paralelogramo se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f+g,a_n\rangle|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f-g,a_n\rangle|^2&\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(|\langle f,a_n\rangle|^2+2\langle f,a_n\rangle\langle g,a_n\rangle+|\langle g,a_n\rangle|^2)\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(|\langle f,a_n\rangle|^2-2\langle f,a_n\rangle\langle g,a_n\rangle+|\langle g,a_n\rangle|^2)\\ &=2[f]^2+2[g]^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto $[.]$ es estrictamente convexa (ya que es inducida por un producto interno). Además, para todo $t\in[0,1]$ y para todo $f,g\in E^*$ se tiene

$$\begin{aligned}[tf+(1-t)g]^2+t(1-t)[f-g]^2&\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle tf+(1-t)g,a_n\rangle|^2+t(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f-g,a_n\rangle|^2\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(t^2|\langle f,a_n\rangle|^2+2t(1-t)\langle f,a_n\rangle\langle g,a_n\rangle+(1-t)^2|\langle g,a_n\rangle|^2\right)\\ &+t(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}(|\langle f,a_n\rangle|^2-2\langle f,a_n\rangle\langle g,a_n\rangle+|\langle g,a_n\rangle|^2)\\ &=t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f,a_n\rangle|^2+(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle g,a_n\rangle|^2\\ &=t[f]^2+(1-t)[g]^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $f\to\|f\|^2+[f]^2$ es estrictamente convexa

Ahora sea $x\in E$ y considere

$$\|x\|_2=\left(\|x\|_1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle b_n,x\rangle|^2\right)^{1/2},$$

donde $\|x\|_1=\sup\limits_{\|f\|_1\le 1}|\langle f,x\rangle|$

Afirmación 4: $\|.\|_2$ es una norma equivalente a $\|.\|$. De manera análoga a la afirmación 1 se prueba que $\|.\|_2$ es una norma en E. En este caso se debe notar que; debido a la densidad de (b_n) en E^*, se obtiene

$$\langle b_n,x\rangle=0\ \ \forall n\in\mathbb{N}\implies x=0.$$

Ademas

$$\begin{aligned}\|x\|=\|x\|_1&=\sup_{\|f\|_1\le 1}|\langle f,x\rangle|\\ &\le\left(\|x\|_1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle b_n,x\rangle|^2\right)^{1/2}=\|x\|_2\\ &\le\left(\|x\|_1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\|b_n\|^2\|x\|_1^2\right)^{1/2}\\ &\le\sqrt{2}\|x\|_1=\sqrt{2}\|x\|.\end{aligned}$$

Afirmación 5: La norma dual de $\|.\|_2$ es estrictamente convexa. En efecto, sea

$$\begin{aligned}&\Phi:E\to\mathbb{R}\\ &\quad x\to\Phi(x)=\frac{1}{2}[x]^2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle b_n,x\rangle|^2,\end{aligned}$$

puesto que $[.]$ es inducida por un producto interno, se tiene que

$$\Phi(y) = \Phi^*(y)$$

donde Φ^* es la conjugada de Fenchel de Φ (ver [3]). Por lo tanto Φ^* es una norma. Denotemos por $\Phi^*(.) = [.]^*$ la norma conjugada de $[.]$ en E^*, es decir

$$[f]^* = \sup_{x\in E}\{\langle f, x\rangle - \frac{1}{2}[x]^2\}, \quad f \in E^*.$$

Ahora notemos que

$$([tf + (1-t)g]^*)^2 = \sup_{x\in E}\{\langle tf + (1-t)g, x\rangle - \frac{1}{2}[x]^2\}$$
$$([f-g]^*)^2 = \sup_{y\in E}\{\langle f-g, y\rangle - \frac{1}{2}[y]^2\},$$

luego,

$$\begin{aligned}([tf + (1-t)g]^*)^2 + t(1-t)([f-g]^*)^2 &= \sup_{x\in E}\left\{\langle tf + (1-t)g, x\rangle - \frac{1}{2}[x]^2\right\}\\ &\quad + t(1-t)\sup_{y\in E}\left\{\langle f-g, y\rangle - \frac{1}{2}[y]^2\right\} \qquad (2.3)\\ = \sup_{x,y\in E}&\left\{\langle tf + (1-t)g, x\rangle + t(1-t)\langle f-g, y\rangle - \frac{1}{2}[x]^2 - \frac{1}{2}t(1-t)[y]^2\right\}.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $x = t\xi + (1-t)\eta$ y $y = \xi - \eta$ se obtiene

$$\langle tf + (1-t)g, t\xi + (1-t)\eta\rangle = t^2\langle f, \xi\rangle + t(1-t)\langle f, \eta\rangle + t(1-t)\langle g, \xi\rangle + (1-t)^2\langle g, \eta\rangle, \qquad (2.4)$$

$$t(1-t)\langle f-g, \xi-\eta\rangle = t(1-t)\langle f, \xi\rangle - t(1-t)\langle f, \eta\rangle - t(1-t)\langle g, \xi\rangle + t(1-t)\langle g, \eta\rangle, \qquad (2.5)$$

$$\begin{aligned}[t\xi + (1-t)\eta]^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle b_n, t\xi + (1-t)\eta\rangle|,^2\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(t^2|\langle b_n, \xi\rangle|^2 + 2t(1-t)\langle b_n, \xi\rangle\langle b_n, \eta\rangle + (1-t)^2|\langle b_n, \eta\rangle|^2)\\ &= t^2[\xi]^2 + 2t(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\langle b_n, \xi\rangle\langle b_n, \eta\rangle + (1-t)^2[\eta]^2 \qquad (2.6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\xi-\eta]^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle b_n, \xi-\eta\rangle|^2\\ &= [\xi]^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\langle b_n, \xi\rangle\langle b_n, \eta\rangle + [\eta]^2. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Ahora, reemplazando (2.4)-(2.7) en (2.3) se obtiene

$$([tf + (1-t)g]^*)^2 + t(1-t)([f-g]^*)^2 = t[f]^{*2} + (1-t)[g]^{*2}.$$

Ahora recordando que $(f+g)^* = f^* \circ g^*$ donde $f^*(x^*) = \sup_{x\in E}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}$ es la conjugada de Fenchel de la función f y $f \circ g = \inf_{y\in E}\{f(x-y) + g(y)\}$, $x \in E$ es la inf-convolución de f y g, luego

$$\|f\|_2^{*2} = \operatorname{ínf}_{h\in E^*}\{\|f-h\|_1^2 + [h]^{*2}\} = \operatorname{mín}_{h\in E^*}\{\|f-h\|_1^2 + [h]^{*2}\}$$

Ahora se demostrará que $f \to \|f\|_2^{*2}$ es estrictamente convexa. En efecto, sean $f, g \in E^*$ fijos y $h_1, h_2 \in E^*$ tal que

$$\|f\|_2^{*2} = \|f - h_1\|_1^2 + [h_1]^{*2}, \quad \|g\|_2^{*2} = \|g - h_2\|_1^2 + [h_2]^{*2}.$$

Luego, para todo $t\ n(0,1)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|tf + (1-t)g\|_2^{*2} &= \inf_{h \in E^*} \{\|f - h\|_1^2 + [h]^{*2}\} \\
&\leq \|tf + (1-t)g - (th_1 + (1-t)h_2)\|_1^2 + [th_1 + (1-t)h_2]^{*2} \\
&< t\|f\|_2^{*2} + (1-t)\|g\|_2^{*^2}
\end{aligned}$$

a menos que $f - h_1 = g - h_2$ y $h_1 = h_2$, es decir $f = g$, lo cual implica que $f \to \|f\|_2^{*2}$ es estrictamente convexa.

3. Conclusión. Como conclusión final, se puede decir que en todo espacio de Banach separable es posible construir una norma equivalente a la original que es estrictamente convexa y cuya norma conjugada dual también es estrictamente convexa.

Referencias

[1] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Science + Business Media, LLC 2011.

[2] G. Botelho, D. Pellegrino and E. Teixeira, *"Fundamentos de Análise Funcional"*, EDITORASBM, Brasil, 2012.

[3] F. Álvarez, *"Análisis Convexo y Dualidad"*, DIM-CMM, Universidad de Chile, 2012.