



Dinámica Simbólica y Algunas Aplicaciones.

Symbolic Dynamics and some Applications.

Jorge Horna Mercedes*, Jony Dionicio Vereau, †, Raúl Martínez Zocón, ‡, Azucena Zavaleta Quipuscoa§, and Yesabella Brenis Delgado¶

Received, Aug. 09, 2016

Accepted, Nov. 03, 2016.

DOI: <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2016.02.05>

Resumen

En este artículo presentamos algunas aplicaciones de dinámica simbólica en el campo de los sistemas dinámicos mediante la discretización del espacio.

Palabras clave. Dinámica simbólica, aplicación shift, partición de Markov, punto homoclínico.

Abstract

In this article we present some applications of symbolic dynamics in the field of dynamic systems by the discretization of space.

Keywords. Symbolic dynamics, shift application, Markov partition, point homoclinic..

1. Introducción. El campo de la dinámica simbólica se desempeña como una herramienta para analizar sistemas dinámicos en general por discretización del espacio.

Consideremos un punto que sigue alguna trayectoria en el espacio y busquemos estudiar su comportamiento. Para ello se particiona el espacio en una cantidad finita de piezas, cada una de ellas etiquetada por un símbolo diferente. Con dicha situación se obtiene una trayectoria simbólica escribiendo la sucesión de símbolos correspondientes a las sucesivas particiones visitadas por el punto en su órbita. Es natural plantearnos si la trayectoria simbólica determina completamente la órbita, además de poder determinar si es posible encontrar una descripción simple de el conjunto de todas las posibles trayectorias.

Historicamente fue Hadamard el primero en utilizar dinámica simbólica en su análisis de flujos geodésicos sobre superficies con curvatura negativa en 1898 [8]. El estudio abstracto vino motivado por un interés matemático intrínseco de sistemas simbólicos y la necesidad de tener una mejor comprensión con la finalidad de aplicar técnicas simbólicas para sistemas continuos. Un trabajo muy interesante está relacionado con la teoría de información y la teoría matemática explorada por Shannon [14].

En este trabajo presentamos conceptos básicos de dinámica simbólica y algunas aplicaciones.

2. Material y Métodos.

2.1. Ejemplos simples . Consideremos $I = [0, 1)$ y la aplicación f definida por $f(x) = \{2x\}$, donde $x \in I$ y $\{2x\}$ es la parte fraccional de $2x$.

Estamos interesados en la trayectoria simbólica de la órbita $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$

* Departamento de Matemática, Universidad Nacional de Trujillo - Perú (jhorna@unitru.edu.pe)

† Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo-Perú(jony11651@hotmail.com)

‡ Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo-Perú(martinez@unitru.edu.pe)

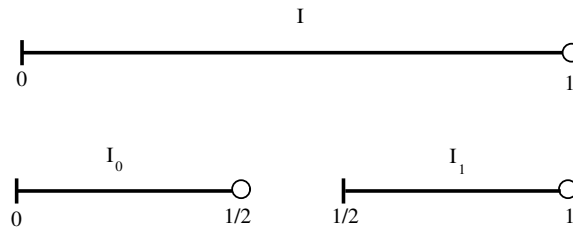
§ Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo-Perú(szavaletaquipuscoa@unitru.edu.pe)

¶ Universidad Nacional de Trujillo-Perú(yes_brenisdel@hotmail.com)

This work is licensed under the [Creative Commons Attribution-NoComercial-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Para discretizar el espacio; dividimos el intervalo $I = [0, 1)$ en dos partes iguales

$$I_0 = [0, 1/2) \qquad I_1 = [1/2, 1)$$



Se designa la trayectoria simbólica x_0, x_1, x_2, \dots donde $x_i \in \{0, 1\}$ de acuerdo así $f^i(x)$ esta en I_0 o en I_1 .

Es decir $x_0 = 0$ si $x \in I_0$ o $x_0 = 1$ si $x \in I_1$, $x_1 = 0$ si $f(x) \in I_0$ o $x_1 = 1$ si $f(x) \in I_1$ y así sucesivamente. Se puede observar que x_0, x_1, x_2, \dots es simplemente una expresión binaria de el número x . Con esta designación aparecen todas las sucesiones binarias excepto aquella que termina en $11111 \dots 1 \dots$ para considerar lo anterior se toma $I = [0, 1]$.

Si se tiene cualquier sucesión binaria x_0, x_1, x_2, \dots se le puede asignar el único punto

$$x = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-i}(I_{x_i}).$$

Una variación del primer ejemplo está dado por la aplicación

$g(x) = \{\gamma x\}$ sobre $I = [0, 1]$ donde $\gamma = (1 + \sqrt{5})/2$

Sea $I_0 = [0, 1/\gamma]$, $I_1 = [1/\gamma, 1]$ como $\gamma = 1 + \frac{1}{\gamma}$ se tiene

$g(I_0) = I$ y $g(I_1) = I_0$.

Un punto que llega a I_1 bajo algún iterado de g deberá de moverse a I_0 en la siguiente iteración. No es difícil ver que el conjunto de trayectorias simbolicas es exactamente el conjunto de sucesiones binarias que no contiene la cadena 11 . La trayectoria simbólica x_0, x_1, x_2, \dots corresponde a la expresión de la serie

$$x = x_0\gamma^{-1} + x_1\gamma^{-2} + \dots$$

expresión de números con respecto a una base no entera β . Propiedades dinámicas de dinámica simbólica relacionados a expresión de números en base no entera se puede ver en [5].

2.2. Conceptos Básicos de Dinámica Simbólica. Definición 1. El conjunto de las sucesiones infinitas de los elementos de $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ es denotado por Σ_n . Es decir

$$\begin{aligned} \Sigma_n &= \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}^{\mathbb{Z}} \\ &= \{s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots) / s_j \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\} \forall j \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Σ_n es llamado espacio shift de dos lados. Un caso particular

$$\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{s = (s_0, s_1, \dots) / s_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \mathbb{N}\}$$

Definición 2. Sea $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ y $t = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ dos puntos en Σ , se define la función

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

Observación 3. La función d definida satisface las cuatro propiedades que por definición una métrica posee.

Observación 4.

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2$$

$$d[s, t] \leq 2$$

Ejemplo 1. Si $t = (1, 1, 1, 1, \dots, 1)$ y $s = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

$$d[s, t] = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{4}{3}$$

2.3. Teorema de Proximidad. Sea $s, t \in \Sigma$ y $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Entonces $d[s, t] \leq 1/2^n$. Recíprocamente si $d[s, t] < 1/2^n$, entonces $s_i = t_i$ para $i \leq n$.

Prueba.

\Rightarrow]

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}$$

$$d[s, t] = \frac{1}{2^n}$$

\Leftarrow] Si $s_i \neq t_i$ para algún $j \leq n$ se tiene

$$d[s, t] \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$$

Si $d[s, t] < 1/2^n$ entonces $s_i = t_i$ para $i \leq n$.

El espacio métrico (Σ, d) es compacto, totalmente desconexo y perfecto.

Definición 5. La aplicación shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es definida por $\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$

$$[\sigma(x)]_i = [x]_{i+1}$$

Ejemplo 2. Si

$$x = (s_0, s_1, s_2, s_3, \dots)$$

$$\sigma^2(x) = (s_2, s_3, s_4, \dots)$$

\vdots

$$\sigma^2(x) = (s_n, s_{n+1}, \dots)$$

Ejemplo 3. Sea $s = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_0, \dots)$
 $\sigma^2(s) = s$.

Es fácil encontrar puntos periódicos.

Teorema 1. La función σ es continua en el punto fijo $(0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots)$. **Prueba.**

Debemos probar que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $s \in \Sigma$ con $d[s, (0, 0, 0, 0, \dots)] < \delta$ entonces $d[\sigma^n(s), (0, 0, 0, 0, \dots)] < \varepsilon$.

Sea $s_i = 0$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$ elegimos un $\delta = 1/2^{n+1}$. Si $d[(s_0, s_1, \dots), (0, 0, 0, \dots, 0, \dots)] < \delta$, entonces $d[\sigma(s_0, s_1, \dots), (0, 0, 0, \dots, 0, \dots)] = d[(s_1, s_2, \dots), (0, 0, 0, \dots, 0, \dots)] \leq \frac{1}{2^n} = \varepsilon$.

Teorema 2. La función $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es continua en todos los puntos de Σ . **Prueba.**

Supongamos que dado $\varepsilon > 0$ y $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ encontramos un n tal que $1/2^n < \varepsilon$, bastará con elegir $\delta = 1/2^{n+1}$. Si $t \in \Sigma$ y $d[t, s] < \delta$, por teorema de aproximación se tiene $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n+1$ $t = (s_0, \dots, s_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3}, \dots)$, se tiene $\sigma(t) = (s_1, s_2, \dots, s_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3}, \dots)$, con lo que $\sigma(t)$ y $\sigma(s)$ concuerdan en los primeros $n+1$.

Por teorema de proximidad

$$d[\sigma(s), \sigma(t)] \leq 1/2^n < \varepsilon$$

Observación 6.

1. Todos los puntos periódicos en Σ de σ es un subconjunto denso en Σ .
2. La aplicación shift depende sensitivamente sobre las condiciones iniciales.
3. Existe un punto cuya órbita es densa en Σ .

Definición 7. Un sistema dinámico f es caótico si

- a) Los puntos periódicos para f forman un conjunto denso.
- b) f tiene una órbita densa.
- c) f depende sensitivamente sobre las condiciones iniciales.

La aplicación shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es un sistema dinámico caótico.

3. Particiones de Markov. Uno de los principales usos de la dinámica simbólica es representar otros sistemas dinámicos. Es útil pues es muy difícil analizar el sistema dinámico pero con su representación es mucho más fácil de analizar.

Supongamos que se desea estudiar el sistema dinámico (M, ϕ) , donde ϕ es inversible, es decir podemos usar iterados positivos y negativos. Si $y \in M$ se pueden describir la órbita $\{\phi^n(y)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en la siguiente forma:

Si divide M en un número finito de piezas E_0, E_1, \dots, E_{r-1} y luego realizar un seguimiento de la órbita de y manteniendo un registro sobre el cual $\phi^n(y)$ permanece en estas piezas. Esto genera una correspondiente sucesión

$x = \dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots \in \{0, \dots, r-1\} = X_{[r]}$ definida por $\phi^n(y) \in E_{x_n}$ para $n \in \mathbb{Z}$. Se estudia básicamente el comportamiento de x bajo iteración de ϕ .

Si para todo $y \in M$, se le asocia el punto simbólico x , y por definición, $\phi(y)$ le corresponde $\sigma(x)$. Si estamos con suerte esta correspondencia es uno a uno, con lo cual el estudio de (M, ϕ) justamente se reduce al estudio de sucesiones.

Para un sistema dinámico no-inversible, podemos considerar sucesiones de un solo lado.

Ejemplo 4. Sea $M = T$ y $\phi : M \rightarrow M$ definido por $\phi(y) = 10y \pmod{1}$ se subdivide M en 10 subintervalos iguales $E_j = [\frac{j}{10}, \frac{j+1}{10})$ para $j = 0, 1, \dots, 9$ aquí el alfabeto es $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, 9\}$.

En este caso, y corresponde precisamente a la sucesión de dígitos en la expansión decimal (considere $M \cong [0, 1)$). La acción de ϕ corresponde a la aplicación shift de un solo lado.

Definición 8. Una partición topológica de un espacio métrico es una colección finita $P = \{P_0, P_1, \dots, P_{r-1}\}$ de conjuntos abiertos disjuntos cuya clausuras $\overline{P_j}$ cubren M .

Definición 9. Sea (M, ϕ) un sistema dinámico (no necesariamente inversible) y P una partición topológica de M , sea $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, r-1\}$. Entonces un término $w = a_1 a_2, \dots, a_n$ es admisible para P, ϕ si $\bigcap_{j=1}^n \phi^{-1}(P_{a_j}) \neq \emptyset$.

Definición 10. Sea $\mathcal{L}_{P, \phi}$ la colección de todos los términos admisibles para P, ϕ .

Definición 11. $X_{P, \phi}$ es llamado el sistema dinámico correspondiente a P, ϕ . Si ϕ no es necesariamente inversible, entonces el espacio shift de un solo lado $X_{P, \phi}^+$ es el sistema dinámico simbólico de un solo lado correspondiente a P, ϕ .

Ejemplo 5. Sea $M = P$ y $\phi(y) = 10y \pmod{1}$. Sea $P = \{\langle 0, \frac{1}{10} \rangle, \langle \frac{1}{10}, \frac{2}{10} \rangle, \dots, \langle \frac{9}{10}, 1 \rangle\}$, y $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Entonces $\mathcal{L}_{P, \phi}$ es el conjunto de todos los términos sobre \mathcal{A} , así $X_{P, \phi}^+$ es el espacio shift $X_{[10]}^+$ de un solo lado.

Ejemplo 6. Sea $M = T$ y ϕ la aplicación identidad. Sea P y $\mathcal{A} = 0, 1, 2, \dots, 9$. Entonces $\mathcal{L}_{P, \phi}$ solamente contiene términos de la forma a^n con $a \in \mathcal{A}$ y $n \geq 1$, además $X_{P, \phi}$ justamente contiene 10 puntos etiquetados $0^\infty, 1^\infty, \dots, 9^\infty$.

Consideremos el sistema dinámico inversible (M, ϕ) . Sea $P = \{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\}$ es la partición topoló-

gica de M . Para cada $x \in X_{P,\phi}$ y $n \geq 0$, consideremos el correspondiente conjunto abierto no vacío:

$$D_n(x) = \bigcap_{k=-n}^n \phi^{-k}(P_{x_k}) \subseteq M$$

La clausura $\bar{D}_n(x)$ de estos conjuntos son compactos y decrecen con n , además que $D_0(x) \supseteq D_1(x) \supseteq \dots$. Por lo tanto $\bigcap_{k=-n}^n \bar{D}_n \neq \emptyset$. Ahora lo ideal sería que se tenga una correspondencia uno a uno entre puntos en $X_{P,\phi}$ y puntos en M , con lo cual la intersección de la parte anterior debe contener un solo punto.

Definición 12. Sea (M, ϕ) un sistema dinámico inversible. Una partición topológica $P = \{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\}$ de M da una representación simbólica de (M, ϕ) si para todo $x \in X_{P,\phi}$ la intersección $\bigcap_{n=0}^{\infty} D_n(x)$ consiste de exactamente de un solo punto. Se llama a P una partición Markov para (M, ϕ) si P da una representación simbólica de (M, ϕ) y además $X_{P,\phi}$ es un shift de tipo finito.

Ejemplo 7. La partición topológica $P = \{(0, \frac{1}{10}), \dots, (\frac{9}{10}, 1)\}$ es una partición de Markov de un solo lado para el sistema dinámico. Supongamos que P da una representación simbólica de el sistema dinámico inversible (M, ϕ) . Entonces existe una aplicación natural $\phi : X = X_{P,\phi}$ el cual aplica $x = \dots x_{-1}, x_0, x_1, \dots$ al único punto $\pi(x)$ en $\bigcap_{n=0}^{\infty} D_n(x)$.

Definición 13. Llamamos a x una representación simbólica de $\pi(x)$. Usando el hecho que $D_{n+1}(\sigma x) \subseteq \phi(D_n(x)) \subseteq D_{n-1}(\sigma x)$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_{P,\phi} & \xrightarrow{\sigma} & X_{P,\phi} \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ M & \longrightarrow & M \end{array}$$

El hecho fundamental es que identifiquemos ϕ con σ vía π . El siguiente resultado muestra que π es continua y sobre y por lo tanto una aplicación factor de $(X_{P,\phi}, \sigma)$ para (M, ϕ) . Se omite la prueba simplemente notando que usa el hecho $diam(\bar{D}_n)$ se reduce a 0 para mostrar que π es continua y el teorema de categoría de Baire para mostrar que π es sobre.

Proposición 1. La partición P da una representación simbólica del sistema dinámico no inversible (M, ϕ) y sea $\pi : X_{P,\phi} \rightarrow M$ es la aplicación definida como en la parte anterior. Entonces π es una aplicación factor $(X_{P,\phi}, \sigma)$ para (M, ϕ) . Existe también una versión para sistemas dinámicos no inversibles.

Proposición 2. Sea P una partición que da una representación simbólica del sistema dinámico no-inversible (M, ϕ) . Para cada una de las siguientes, si $(X_{P,\phi}, \sigma)$ tiene la propiedad, entonces también cumple (M, ϕ)

- (1) Transitividad topológica
- (2) Mixing topológico
- (3) El conjunto de orbitas periódicas es denso.

Para finalizar presentamos un ejemplo que corresponde a la aplicación de Arnold.

Ejemplo 8. Sea $M = T^2$ y $\phi((x, y)) = A(x, y)$ donde la adición es la adición mod 1 y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notese que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ \pi^2 & \longrightarrow & \pi^2 \end{array}$$

donde $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi^2$ es la aplicación natural. Por lo tanto, en este ejemplo, podemos usualmente identificar ϕ y A .

Notese que A tiene dos autovalores $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Observar que $|\lambda_+| > 1$ y $|\lambda_-| < 1$, con lo cual este sistema dinámico es llamado hiperbólico. Además se tiene:

$$L_1 = E_{\lambda_+} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

$$L_2 = E_{\lambda_-} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

Entonces, una partición de Markov de el sistema esta dada por P_1, P_2, P_3 .

4. Resultados..

- Las aplicaciones cuadráticas con comportamiento caótico son modelados por sistemas dinámicos simbolicos.
- La aplicación de Thom es una aplicación modelada por sistemas dinámicos simbolicos.

5. Conclusiones..

- La dinámica simbolica permite un descripción mas sencilla de un sistema dinámico de comportamiento complicado.
- Los sistemas dinámicos caóticos pueden ser modelados por dinámica simbolica.
- La dinámica simbolica es una herramienta que permite estudiar sistemas dinámicos de difícil comportamiento.

Agradecimiento.. Los autores agradecen a todos los colegas y estudiantes que contribuyeron a preparar este trabajo.

Referencias

- [1] R. Adler & B. Weiss. Similarity of automorphisms on the torus. *Mem. Amer. Math. Soc.* 98, 1970.
- [2] R. Adler, A. Konheim & M. McAndrew. Topological Entropy. 114 (1965), 309-319.
- [3] R. Bowen & J. Franks. Homology for zero-dimensional basic sets. *Annals of Math.* 106 (1977), 37-92.
- [4] M.P. Béal & D. Perrin. Symbolic dynamics and finite automata, *Handbook of Formal Languages* (G. Rozenberg & A. Salomaa, eds.) vol. 2, Springer Verlag, Berlin 1997, pp. 463-505.
- [5] F. Blanchard, A. Maass & A. Nogueira. eds. *Topics in Symbolic Dynamics and Applications*. Cambridge Univ. Press. Cambridge, U.K., 2000.
- [6] M. Boyle. Symbolic dynamics and matrices, *Combinatorial and Graph Theoretic Problems in Linear Algebra*. IMA Volumes in Math. and its Appl. (R. Brualdi et al., eds.), vol. 50, 1993, pp. 1-38.
- [7] Douglas A. Lind and Brian Marcus. *An Introduction to Symbolic Dynamics and coding*. Cambridge: Cambridge University Press. 1995.
- [8] J. Hadamard. Les surfaces à courbures opposées et leur lignes géodésiques. *J. Maths. Pures et Appliqués* 4 (1898), 27-73.
- [9] B. Kitchens. *Symbolic Dynamics: One-sided, Two-sided and Countable State Markov Chains*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [10] K.H. Kim & F.W. Roush. Decidability of shift equivalence, in J.W. Alexander, ed., *Dynamical systems, Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 1342, Springer-Verlag, Heidelberg, 1988.
- [11] K.H. Kim & F.W. Roush. Willams's conjecture is false for irreducible subshifts. *Elec. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* 3 (1997), 105-109.
- [12] M. Morse & G.A. Hedlund. Symbolic Dynamic. *Amer. J. Math.* 60 (1938), 815-866.
- [13] A. Manning. Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions. *Bull. London Math. Soc.* 3 (1971), 215-220.
- [14] Peyam Ryan Tabrizian. *Homoclimic Orbits and chaotic behavior in classical mechanics*. 2008.
- [15] B. Weiss. Subshifts of finite type and sofic systems. *Math.* 77 (1973), 462-474.
- [16] R.F. Williams. Classification of subshifts of finite type. *Annals of Math.* 98 (1973), 120-153; erratum, *Annals of Math.* 99 (1974), 380-381.