Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 03(02): 67 - 70 (2016)

Sobre la Recíproca del Teorema de Dirichlet-Lagrange.

On the Reciprocal of the Dirichlet-Lagrange Theorem .

Gerard John Alva Morales *

Received, Aug. 27, 2016 *Accepted, Oct. 12, 2016.*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2016.02.01

Resumen

Estudiamos la inestabilidad en el sentido de Lyapunov de un punto de equilibrio de un sistema hamiltoniano con n grados de libertad para una clase amplia de energías potenciales. Mostraremos aquí que, esta clase de energías potenciales determinan condiciones suficientes para la inestabilidad de este punto de equilibrio.

Palabras clave. Estabilidad de Lyapunov, Sistemas Hamiltonianos, Teorema de Dirichlet-Lagrange, Teorema de Cetaev.

Abstract

We study the instability in the sense of Lyapunov of a point of equilibrium of a hamiltonian system with n degrees Of freedom for a broad class of potential energies. We will show here that, this kind of potential energies determine sufficient conditions for the Instability of this equilibrium point.

Keywords. Stability of Lyapunov, Hamiltonian Systems, Dirichlet-Lagrange Theorem, Cetaev's Theorem.

1. Introducción. Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto conteniendo el origen. Consideremos el sistema hamiltoniano

$$X_H(q,p)\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q,p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p), \end{cases}$$

con hamiltoniana $H(q,p) = T(q,p) + \Pi(q) \in C^2$, $q \in \Omega$, $p \in \mathbf{R}^n$, $X_H(0,0) = (0,0)$. Aquí $T(q,p) = \frac{1}{2}\langle p, B(q)p\rangle$ es una forma quadrática definida positiva en p e $\Pi(0) = 0$, $\nabla\Pi(0) = 0$.

En este artículo, estudiamos la estabilidad en el sentido de Lyapunov del equilibrio del sistema X_H con n grados de libertad; donde Π pertenece a la familia de energías potenciales considerada en [1].

Un teorema importante en la teoría de estabilidad es el teorema de Dirichlet-Lagrange que afirma: *si en q_0 la energía potencial Π tiene un mínimo estricto local, entonces el equilibrio $(q_0, 0)$ del sistema X_H es estable.*

Como es conocido en la literatura, por ejemplo de [6], sabemos que la recíproca del teorema de Dirichlet-Lagrange es falsa, para ver esto, considere por ejemplo para $n = 1$, las energías

$$T(q,p) = \frac{1}{2}p^2,$$
$$\Pi(q) = e^{-\frac{1}{q^2}}\cos(\frac{1}{q}), \quad q \neq 0$$
$$\Pi(0) = 0.$$

* Departamento de Matemática Aplicada-Universidade de São Paulo (jgerardao@gmail.com.)

En este caso, $(0,0)$ es estable pero Π no tiene mínimo en el origen [Painlevé 1904].

Un problema en este contexto, es conocido como el problema de *"inversión del teorema de Dirichlet-Lagrange"* que consiste en establecer condiciones suficientes sobre Π que garanticen la inestabilidad del equilibrio de X_H. Este problema no tiene una completa solución.

Un resultado importante en esta dirección fue dado por A.M. Lyapunov, que en el lenguaje de jatos introducido en [2], afirma que: *si el jato puntual de orden* 2 *de* Π *en* q_0 *muestra que la energía potencial* Π *no tiene mínimo en* q_0*, entonces el equilibrio* $(q_0, 0)$ *del sistema hamiltoniano* X_H *es inestable*.

1.1. Conjetura de Lyapunov-Barone. Denotamos por $j^s\Pi$ al jato puntual en el origen de orden s de Π, y cuando existe, este jato es el polinomio de grado menor o igual a s satisfaciendo $\Pi(q) = j^s\Pi(q) + o(|q|^s)$.

Con esta notación, el resultado anterior debido a Lyapunov originó la siguiente conjetura: *Si para algún natural* $s \geq 2$*, el jato de orden* s *de* Π *muestra que la energía potencial* Π *no tiene mínimo en* q_0*, entonces el equilibrio* $(q_0, 0)$ *del sistema hamiltoniano* X_H *es inestable*.

1.2. Energías de tipo Cetaev. Un resultado de inestabilidad contribuyendo a la inversión del teorema de Dirichlet-Lagrange es el siguiente

Teorema 1 (Teorema de Cetaev 1936). *Si para algún* $\varepsilon > 0$*, con* $\overline{B_\varepsilon} \subset \Omega$ *el sistema* X_H *satisface:*

(a) $\Theta = \{q \in B_\varepsilon | \Pi(q) < 0\} \neq \emptyset$,
(b) $0 \in \partial\Theta$,
(c) $\langle \nabla\Pi(q), q\rangle < 0, \quad \forall q \in \Theta$

Entonces el equilibrio $(0,0)$ *de* X_H *es inestable.*

La prueba de este teorema de Cetaev dada en [6] utiliza como función auxiliar, la función $V(q,p) = -H(q,p)\langle q,p\rangle$. El lector puede realizar una demostración diferente utilizando la función $V(q,p) = \log(\frac{1}{1-\langle q,p\rangle})$, con $\langle q,p\rangle > 0$.

Las energías potenciales que satisfacen los requerimientos de este teorema son llamadas aquí de energías potenciales de Cetaev.

Otros resultados relevantes contribuyendo a la inversión del teorema de Dirichlet-Lagrange por ejemplo pueden ser encontrados en [3], [4] y [5].

1.3. El problema y el resultado principal. Asumiendo que $\Pi \in C^2$ es una energía potencial que admite jato puntual en el origen $j^s\Pi$, de orden $s \geq 2$; nuestro problema es natural: *Si* $j^s\Pi$ *es un potencial de Cetaev, será que* Π *es un potencial de Cetaev ?*

Sin hipótesis adicionales este problema tiene una respuesta negativa, aun en el caso en que $j^s\Pi$ muestre que Π no tiene mínimo en el origen, como será mostrado posteriormente con un ejemplo.

En este artículo, vamos a considerar una sub-familia de la familia considerada en [1], la cual es suficientemente genérica para obtener las condiciones suficientes de inestabilidad del equilibrio de X_H. Esta sub-familia es constituida por las energías potenciales satisfaciendo las siguiente hipótesis :

(G_1) Existe $\nu \in \{k, ..., s-1\}$ tal que en alguna vecindad del origen valen $\Pi_r \geq 0$ y $\Pi_\ell \leq 0$, si $k \leq r \leq \nu$, $\nu + 1 \leq \ell \leq s-1$ y, además de esto $j^{s-1}\Pi \geq 0$,
(G_2) $j^s\Pi$ muestra que Π no tiene mínimo en el origen,
(G_3) Existe $\varepsilon > 0$ con $\overline{B_\varepsilon} \subset \Omega$ tal que $(\overline{A_s} \setminus \{0\}) \cap B_\varepsilon \subset (C_s)^\circ \cap B_\varepsilon$.

donde, con la notación $R^s\Pi(q) := \langle \nabla j^s\Pi(q), q\rangle$, los conjuntos A_s y C_s son conjuntos semi-algébricos, dados por

$$A_s = \{q \in \Omega | j^s\Pi(q) < 0\}, \quad C_s = \{q \in \Omega | R^s\Pi(q) < 0\}.$$

Notemos que, una consecuencia directa de la hipótesis (G_1) es que en una vecindad del origen vale $j^\ell\Pi \geq 0$ para todo $k \leq \ell \leq s-1$.
Note también que de las hipótesis (G_2) y (G_3) tenemos respectivamente que, el jato $j^s\Pi$ de la energía potencial Π satisface la hipótesis de la conjetura de Lyapunov y además $j^s\Pi$ es un potencial de Cetaev. El lector podrá ver en [1] la relación que existe entre las hipótesis (G_2) y (G_3). El conjunto de hipótesis (G_1), (G_2) y (G_3) será denotado por $\mathcal{G}$.

Nuestro resultado principal es el siguiente:

Teorema 2. Si Π satisface la hipótesis $\mathcal{G}$, entonces Π es un potencial de Cetaev.

2. Resultados. A continuación veremos la estrategia utilizada para solucionar nuestro problema. Es de crucial importancia la construcción de un cono $\mathcal{K}_s \subset \mathbf{R}^n$ dado en el siguiente resultado

Teorema 3. *Suponga que* Π *satisface la hipótesis* $\mathcal{G}$*, y considere una semi-recta* $r \subset Z_{s-1}$ *de origen en* 0 *tal que* $\Pi_s(q) < 0$ *para todo* $q \in r \setminus \{0\}$*, y sea* Δ_r *la componente conexa de* Z_{s-1} *que contiene* r*. Entonces existe un cono* $\mathcal{K}_s \subset \mathbf{R}^n$ *de vértice en el origen tal que*

(a) $\Delta_r \setminus \{0\} \subset (\mathcal{K}_s)^\circ$.

(b) *Si* $q \in \partial\mathcal{K}_s \setminus \{0\}$ *existe* $\ell \in \{k, \cdots, s-1\}$ *tal que* $\Pi_\ell(q) > 0$ *y* $\Pi_j(q) = 0$ *para* $j < \ell$.

(c) $\Pi_s(q) < 0$ *para todo* $q \in \mathcal{K}_s \setminus \{0\}$.

donde

$$Z_{s-1} := \bigcap_{\ell=k}^{s-1} \big\{q \in \Omega \big| \Pi_\ell(q) = 0\big\} \setminus \{0\}.$$

es tal que, $Z_{s-1} \subset (j^{s-1}\Pi)^{-1}(\{0\})$ y, de la homogeneidad de las funciones Π_ℓ, resulta que $Z_{s-1} \cup \{0\}$ es también un cono de vértice en 0. Con estos conos, obtenemos un resultado que fortalece nuestra estrategia.

Corolario 1. *Suponga que* Π *satisface la hipótesis* $\mathcal{G}$*, y sea* r *una semi-recta de origen* 0 *contenida en* M_{s-1}*. Si* $\tilde{A}_s$ *y* $\tilde{C}_s$ *son, respectivamente las componentes conexas de* A_s *y* C_s *que contienen* $r \setminus \{0\}$ *y* $\mathcal{K}_s$ *es el cono dado en el Teorema* $2{,}1$*, entonces existe* $0 < \varepsilon_0 < 1$ *tal que*

$$(\overline{\tilde{C}_s} \setminus \{0\}) \cap B_{\varepsilon_0} \subset (\mathcal{K}_s)^\circ \cap B_{\varepsilon_0}.$$

donde, el conjunto

$$M_{s-1} := \big\{r \subset Z_{s-1} \big| \quad \Pi_s|_{(r\setminus\{0\})} < 0\big\} \neq \emptyset$$

en caso de ser conexo, tendríamos $M_{s-1} = \Delta_r$ para alguna semi-reta $r \subset M_{s-1}$ de origen en 0.

Los detalles técnicos que ayudan en la demostración de los resultados previos pueden ser encontrados en [1].

Admitiendo que los conjuntos A_s, C_s y M_{s-1} son conexos, para completar nuestra estrategia presentamos el siguiente resultado:

Teorema 4. *Suponga que* Π *satisface la hipótesis* $\mathcal{G}$*. Entonces existen* $0 < \varepsilon < 1$ *y un conjunto semi-algébrico* $W_s \subset B_\varepsilon$ *tales que* $0 \in \partial W_s$*, y:*

1. $(\overline{A}_s \setminus \{0\}) \cap B_\varepsilon \subset W_s^\circ \subset \overline{W}_s \setminus \{0\} \subset (C_s)^\circ \cap B_\varepsilon$.
2. $\Pi_s(q) < 0$ *para todo* $q \in \overline{W}_s \setminus \{0\}$ *y, además, existen constantes* $\alpha > 0$ *e* $\beta > 0$ *tales que:*
   (a) *Si* $q \in \partial W_s \setminus \{0\}$*, entonces* $j^s\Pi(q) \geq -\alpha\Pi_s(q)$*;*
   (b) *Si* $q \in \overline{W}_s \setminus \{0\}$*, entonces* $R^s\Pi(q) \leq \beta\Pi_s(q)$.

Proof. Consideremos la siguiente familia a un parámetro de conjuntos semi-algébricos $\mathcal{W}_s^\lambda := \{q \in \Omega | Q(q, \lambda) < 0\}$, con $\lambda \in [0, 1]$, donde $Q(q, \lambda)$ son polinomios definidos como

$$Q(q, \lambda) = \nu j^s\Pi(q) + \lambda\Big[\sum_{r=k}^{\nu-1}(r-\nu)\Pi_r(q) + \sum_{\ell=\nu+1}^{s-1}(\ell-\nu)\Pi_\ell(q) + (s-\nu)\Pi_s(q)\Big]$$

y satisfacen lo siguiente:

(i) $Q(q, 0) = \nu j^s\Pi(q)$ para todo $q \in \Omega$, lo cual muestra que $\mathcal{W}_s^0 = A_s$;

(ii) $Q(q, 1) = R^s\Pi(q)$ para todo $q \in \Omega$, mostrando que $\mathcal{W}_s^1 = C_s$;

(iii) Utilizando la hipótesis (G_1), obtenemos

$$\frac{\partial Q}{\partial\lambda}(q, \lambda) < (s-\nu)\Pi_s(q) < 0, \quad \forall q \in \mathcal{K}_s \setminus \{0\}, \quad \forall\lambda \in [0, 1],$$

donde $\mathcal{K}_s$ es el cono dado en el Teorema 2,1.

De aqui, considerando $0 < \varepsilon_0 < 1$ dado en el Corolario 2,2; resulta que la família $\mathcal{W}_s^\lambda$ es cresciente en λ, satisfaciendo las siguientes incluciones

$$(\overline{A}_s \setminus \{0\}) \cap B_{\varepsilon_0} \subset \mathcal{W}_s^{\lambda_1} \cap B_{\varepsilon_0} \subset \mathcal{W}_s^{\lambda_2} \cap B_{\varepsilon_0} \subset C_s \cap B_{\varepsilon_0}$$

para cada $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$. Para algum número $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < 1$, consideremos el conjunto semi-algébrico $W_s := \mathcal{W}_s^{1/2} \cap B_\varepsilon$, es claro que $0 \in \partial W_s$ y que $W_s \subset B_\varepsilon$ satisface el item 1. Es claro también que, de la inclusión

$$\overline{W}_s \setminus \{0\} \subset C_s \cap B_\varepsilon \subset (\mathcal{K}_s)^\circ \cap B_\varepsilon$$

y del Teorema 2,1, se tiene $\Pi_s(q) < 0$ para todo $q \in \overline{W}_s \setminus \{0\}$.

Notemos que, si $q \in \partial W_s \setminus \{0\}$, entonces $Q(q, 1/2) = 0$, y luego, utilizando la hipótesis (G_1), obtenemos la siguiente desigualdad

$$\nu j^s \Pi(q) \geq -(1/2)(s-\nu)\Pi_s(q)$$

lo cual muestra el item 2-(a) con $\alpha = \frac{s-\nu}{2\nu}$.

Por otro lado, si $q \in \overline{W}_s \setminus \{0\}$, entonces $Q(q, 1/2) \leq 0$, y aplicando la hipótesis (G_1) una vez más, resulta la segunda desigualdad

$$R^s \Pi(q) = Q(q, 1) \leq (1/2)(s-\nu)\Pi_s(q)$$

mostrandose el item 2-(b) con $\beta = \frac{s-\nu}{2}$.

□

2.1. Estabilidad. Ahora, usando los resultados del Teorema 2,3, mediante un cálculo directo similar al realizado en [1], podemos mostrar la existencia de constantes $\varepsilon > 0$, $\theta_1 > 0$ y $\theta_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} \Pi(q) = j^s\Pi(q) + h_1(q) &> \theta_1 |q|^s, \quad \forall q \in (\partial W_s \setminus \{0\}) \cap B_\varepsilon \\ \langle \nabla \Pi(q), q \rangle = R^s \Pi(q) + h_2(q) &< -\theta_2 |q|^s, \quad \forall q \in (\overline{W}_s \setminus \{0\}) \cap B_\varepsilon \end{aligned}$$

donde, las funciones $h_i(q)$ satisfacen $\lim_{q \to 0} h_i(q)/|q|^s = 0$ para $i = 1, 2$.

Estas estimativas garantizan evidentemente, que la energía potencial Π satisfaciendo la hipótesis $\mathcal{G}$, es de Cetaev. Por tanto, por el Teorema de Cetaev, el equilibrio de X_H resulta ser inestable.

Nuestro resultado principal enunciado en la introducción, con los resultados previos, admite una demostración y en consecuencia nuestro problema tiene respuesta positiva. Este resultado es de inestabilidad contribuyendo también al problema de inversión del teorema de Dirichlet-Lagrange.

2.2. Observación de la hipótesis (G_1). La intención de mejorar nuestro resultado substituyendo la hipótesis (G_1) por alguna hipótesis mas general podría llevarnos a una respuesta negativa a nuestro problema. Para ver esto, consideremos el polinomio $f(x, y)$ de dos variables, de grado 12 y su derivada radial $F(x, y) = \langle \nabla f(x, y), (x, y) \rangle$ dados por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y^6 - 2y^4x^4 + y^2x^8 - y^{10} - cx^{12} - y^{12}, \\ F(x, y) &= 6y^6 - 16y^4x^4 + 10y^2x^8 - 10y^{10} - 12cx^{12} - 12y^{12} \end{aligned}$$

donde $c = \frac{1}{729}(28 + 19\sqrt{19})$.

Notemos que la energía potencial Π con $j^{12}\Pi = f$ no satisface la hipótesis (G_1). Con un análisis análogo al realizado en [1], podemos mostrar que $j^{12}\Pi = f$ es una energía potencial de Cetaev sin embargo Π no lo es; para esto basta considerar $\Pi(x, y) = f(x, y) + x^{14}$.

Agradecimientos. Deseo agradecer al profesor Manuel Valentin de Pera Garcia por las motivadoras discusiones sobre el problema y la hospitalidad del Instituto de Matemática e Estatística de la Universidade de São Paulo.

Referencias

[1] GERARD JOHN ALVA MORALES; *Estabilidade de Liapunov e derivada radial*; Tese de Doutorado, IME-USP, Outubro (2014).
[2] BARONE NETO; *Jet-detectable Extrema*; Proceding A.M.S, (1984).
[3] R.S. FREIRE JR., M.V.P. GARCIA, F.A. TAL; *Instability of equilibrium points of some Lagrangian systems*; Journal of Differential Equations, 245, (2008), 490-504.
[4] MANUEL V.P. GARCIA, FÁBIO A. TAL; *Stability of equilibrium of conservative systems with two degrees of freedom*; Journal of Differential Equations, 194, (2003), 364-381.
[5] VINICIO MOAURO AND PIERO NEGRINI; *On the Inversion of Lagrange-Dirichlet Theorem*; Differential and Integral Equations,Volume 2, Number 4, October (1989), pp. 471-478.
[6] N. ROUCHE, P. HABETS, M. LALOY; *Stability Theory by Liapunov`s Direct Method*; Springer-Verlag New York, (1977).