



Simulación del comportamiento del nivel freático en un sistema de acuífero costero por elementos finitos.

Simulation of the behavior of the water table in a coastal aquifer system finite element.

Luis Lara Romero* and Obidio Rubio†

Received, Feb. 15, 2016

Accepted, May. 15, 2016.

DOI: <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2016.01.08>

Resumen

En este artículo presentamos la aplicación del método de Galerkin para discretizar la ecuación modelo del flujo de aguas subterráneas en un acuífero confinado semipermeable con condiciones de contorno de marea sobre una de sus fronteras, las otras fronteras se mantienen constantes. Para las simulaciones se ha generado un programa numérico, **Ground Water Finite Element Method**, que implementa el método de los elementos finito con elementos triangular con tres nodos y un grado de libertad por nodo.

Palabras clave. Elemento finito, método de Galerkin, acuífero confinado.

Abstract

This paper presents the application of Galerkin method to discretize the model equation of groundwater flow in a confined aquifer semipermeable with tidal boundary conditions on one of its borders, the other borders remain constant. For the simulations was generated a numerical program, **Ground Water Finite Element Method**, which implements the method of finite elements with triangular elements with three nodes and a degree of freedom per node.

Keywords. Finite element, method of Galerkin, confined aquifer.

1. Introducción. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio de Lipschitz con frontera poligonal Γ . Sobre un subconjunto cerrado Γ_D de la frontera Γ con longitud positiva, asumimos condiciones de Dirichlet, mientras tenemos condiciones de frontera de Neumann sobre el complemento Γ_N . Entonces planteamos el siguiente problema para $f \in L^2(\Omega)$, $u_D \in H^1(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma_N)$.

Hallar $u(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)$ tal que

$$(1.1) \quad -\Delta u(\mathbf{x}) + bu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{en } \mathbf{x} \in \Omega$$

$$(1.2) \quad u(\mathbf{x}) = u_D \quad \text{en } \Gamma_D$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}(\mathbf{x}) = g \quad \text{en } \Gamma_N$$

donde η es la normal saliendo en la frontera Γ_N .

*Luis A. Lara Romero, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Perú (llara@unitru.edu.pe),

† Obidio E. Rubio, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Perú (orubio@unitru.edu.pe).

De acuerdo al Lema de Lax-Milgram, existe siempre solución débil del problema (1.1)-(1.3) la cual es regular en el interior del dominio, esto es, $u \in H_{loc}^2(\Omega)$.

Las condiciones de Dirichlet homogéneas (1.2) son incorporadas a través de la descomposición $v = u - u_D$ tal que $v = 0$ en Γ_D , esto es,

$$(1.4) \quad v \in H_D^1(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) | w = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$$

Entonces la formulación débil del problema de valor de frontera (1.1)-(1.3) es:

Hallar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$(1.5) \quad \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u_D \cdot \nabla w \, d\Omega + b \int_{\Omega} (v + u_D) \cdot w \, d\Omega = \int_{\Omega} f w \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g w \, ds, \\ w \in H_D^1(\Omega)$$

o también

$$(1.6) \quad \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla w + b v w) \, d\Omega = \int_{\Omega} f w \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g w \, ds - \int_{\Omega} (\nabla u_D \cdot \nabla w + b u_D w) \, d\Omega, \\ w \in H_D^1(\Omega)$$

Para la implementación, el problema (1.5) es discretizado usando el método estándar de Galerkin, donde $H^1(\Omega)$ y $H_D^1(\Omega)$ son reemplazados por los subespacios finitos dimensional S y $S_D = S \cap H_D^1$, respectivamente.

Sea $U_D \in S$ una función que aproxima a u_D en Γ_D . (Definimos U_D como la interpolación nodal de u_D sobre Γ_D .) entonces tenemos el problema discretizado.

Hallar $V \in S_D$ tal que

$$\int_{\Omega} (\nabla V \cdot \nabla W + b V W) \, d\Omega = \int_{\Omega} f W \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g W \, ds \\ - \int_{\Omega} (\nabla U_D \cdot \nabla W + b U_D W) \, d\Omega; \quad W \in S_D$$

Sea (η_1, \dots, η_N) una base del espacio finito dimensional S , y sea $(\eta_{i_1}, \dots, \eta_{i_M})$ una base de S_D , donde $I = \{i_1, \dots, i_M\} \subseteq \{1, \dots, N\}$ es un conjunto de índices de cardinalidad $M \leq N - 2$. Entonces, (1.7) es equivalente a

$$(1.7) \quad \int_{\Omega} (\nabla V \cdot \nabla \eta_j + b V \eta_j) \, d\Omega = \int_{\Omega} f \eta_j \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g \eta_j \, ds \\ - \int_{\Omega} (\nabla U_D \cdot \nabla \eta_j + b U_D \eta_j) \, d\Omega, \quad (j \in I)$$

Además, si

$$(1.8) \quad V = \sum_{k \in I} x_k \eta_k \quad U_D = \sum_{k=1}^N U_k \eta_k$$

Entonces, la ecuación (1.7) produce un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$(1.9) \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde la matriz de coeficientes $\mathbf{A} = (A_{jk})_{j,k \in I} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ y $\mathbf{b} = (b_j)_{j \in I} \in \mathbb{R}^M$ son definidos como

$$(1.10) \quad A_{jk} = \int_{\Omega} (\nabla \eta_k \cdot \nabla \eta_j + \beta \eta_k \eta_j) \, d\Omega$$

y

$$(1.11) \quad b_j = \int_{\Omega} f \eta_j \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g \eta_j \, ds - \sum_{k=1}^N U_k \int_{\Omega} (\nabla \eta_j \cdot \nabla \eta_k + b \eta_j \eta_k) \, d\Omega$$

La matriz de rigidez \mathbf{A} es esparsa, simétrica y definida positiva, por lo tanto (1.9) tiene solución única $x \in \mathbb{R}^M$ la cual determina la solución de Galerkin

$$(1.12) \quad U = U_D + V = \sum_{j=1}^N U_j \eta_j + \sum_{k \in I} x_k \eta_k$$

Por otro lado se tiene que $\bar{\Omega}$ es posible cubrirlo por una triangulación regular τ de triángulos T , esto es, $\bar{\Omega} = \cup_{T \in \tau} T$.

La triangulación regular significa que los N nodos de la malla están sobre los vértices de los triángulos, los elementos de la triangulación no deben solaparse, los nodos no pertenecen al borde del triángulo y cada borde $E \subset \Gamma$ de un elemento $T \in \tau$ pertenece a $\bar{\Gamma}_N$ o $\bar{\Gamma}_D$.

Los elementos de la base, las *funciones de interpolación* η_j son tal que en cada nodo (x_j, y_j) de la malla se tiene

$$(1.13) \quad \eta_j(x_k, y_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, N$$

Con los espacios S y S_D y sus correspondientes bases, las integrales en (1.10) y (1.11) pueden ser calculadas como la suma sobre todos los elementos y la suma sobre todos los contorno sobre Γ_N , esto es,

$$(1.14) \quad A_{jk} = \sum_{T \in \tau} \int_T (\nabla \eta_j \cdot \nabla \eta_k + \beta \eta_j \eta_k) dT$$

y

$$(1.15) \quad b_j = \sum_{T \in \tau} \int_T f \eta_j dT + \sum_{E \subset \Gamma_N} \int_E g \eta_j ds - \sum_{k=1}^N U_k \sum_{T \in \tau} \int_T (\nabla \eta_j \cdot \nabla \eta_k + \beta \eta_j \eta_k) dT$$

Para la ecuación en régimen transitorio

$$(1.16) \quad S \frac{\partial u}{\partial t} = T \Delta u - bu + f \quad \text{en } \Omega \times [0, T_{max}]$$

utilizamos el método de Galerkin para la discretización espacial y para la discretización temporal el método de Euler. Para esto dividimos el intervalo de tiempo $[0, T_{max}]$ en N subintervalos de igual longitud, $dt = T_{max}/N$ lo cual produce que la ecuación (1.16) sea discretizada en la forma

$$(1.17) \quad \frac{u_n - u_{n-1}}{dt} = \frac{T}{S} \Delta u_n - \frac{b}{S} u_n + \frac{1}{S} f_n$$

$$u_n - dt \frac{T}{S} \Delta u_n + dt \frac{b}{S} u_n = dt \frac{1}{S} f_n + u_{n-1}$$

donde $t_n = ndt$, $f_n = f(x, t_n)$ y $u_n = u(x, t_n)$.

La formulación débil de (1.17) esta dada por

$$(1.18) \quad dt \frac{T}{S} \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla v d\Omega + dt \frac{b}{S} \int_{\Omega} u_n v d\Omega + \int_{\Omega} u_n v d\Omega = dt \frac{1}{S} \int_{\Omega} f_n v d\Omega + dt \frac{T}{S} \int_{\Gamma_N} g_n v ds + \int_{\Omega} u_{n-1} v d\Omega$$

$$dt \frac{1}{S} \int_{\Omega} (T \nabla u_n \cdot \nabla v + b u_n v) d\Omega + \int_{\Omega} u_n v d\Omega = dt \frac{1}{S} \left[\int_{\Omega} f_n v d\Omega + T \int_{\Gamma_N} g_n v ds \right] + \int_{\Omega} u_{n-1} v d\Omega$$

donde $g_n = g(x, t_n)$.

Ahora para cada paso de tiempo la ecuación (1.18) es resuelta usando el método de Galerkin que produce un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de la forma

$$(1.19) \quad \left(dt \frac{1}{S} \mathbf{A} + \mathbf{B} \right) U_n = dt \frac{1}{S} \mathbf{b} + \mathbf{B} U_{n-1}$$

La matriz de rigidez \mathbf{A} y el vector \mathbf{b} son definidos como en (1.10) y (1.11), respectivamente. La matriz de masa \mathbf{B} resulta de los términos de $\int_{\Omega} u_n v d\Omega$, es decir,

$$(1.20) \quad B_{jk} = \sum_{T \in \tau} \int_T \eta_j \eta_k dT$$

CUADRO 2.1

Resumen de algunas soluciones analíticas para el flujo de aguas subterráneas en acuíferos costeros

Fuente	Nivel piezométrico
Jacob (1950) Acuífero Confinado 1D	$h(x, t) = h_z + Ae^{-\sqrt{\frac{aS}{2T}}x} \cos\left(at - \sqrt{\frac{aS}{2T}}x + c\right)$
Sun (1997) Acuífero Confinado 2D	$h(x, y, t) = h_z + Ae^{-px-my} \cos\left(at + by - \frac{aS+2bmT}{2pT}x + c\right)$ $p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[(b^2 - m^2)^2 + \left(\frac{aS}{T} + 2bm\right)^2 \right]^{1/2} + b^2 - m^2 \right\}^{1/2}$
Jiao y Tang (1999)	$h(x, t) = h_z + Ae^{-px} \cos\left(at - \frac{aS}{2pT}x + c\right)$ $p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[\left(\frac{L}{T}\right)^2 + \left(\frac{aS}{T}\right)^2 \right]^{1/2} + \frac{L}{T} \right\}^{1/2}$
(2001)	$h(x, y, t) = h_z + Ae^{-px-my} \cos\left(at + by - \frac{aS+2bmT}{2pT}x + c\right)$ $p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[(b^2 - m^2 + \frac{L}{T})^2 + \left(\frac{aS}{T} + 2bm\right)^2 \right]^{1/2} + b^2 - m^2 + \frac{L}{T} \right\}^{1/2}$

2. Resultados. La ecuación modelo (1.1)-(1.3) es aplicada al modelamiento de los niveles de las cargas hidráulicas del nivel freático de un acuífero confinado semipermeable afectado por una condición marea sobre uno de sus lados mientras las otras condiciones se mantienen constantes. Para las simulaciones se ha generado un programa numérico, **Ground Water Finite Element Method**, que implementa el método de los elementos finito con elementos triangular con tres nodos y un grado de libertad por nodo.

2.1. Programa . El programa calcula las cargas hidráulicas en un acuífero confinado semipermeable con con condiciones de contorno de marea.

1. **output :** cargas hidráulicas h .
2. **input :** *contorno-omega1, ...* : matriz de orden $N_1 \times 2$ que contiene las xy -coordenadas para cada uno de los N_1 nodos; *nodos-contorno1,...*: vector de orden $M_1 \times 1$ que contiene los nodos sobre la frontera *contorno-omega1,...*
 - generación del vector *nodos-dirichlet, ...* de orden $M_{n_1} \times 1$ que contiene la condición de frontera de Dirichlet Γ_D
 - generación de la matriz *connect-seg-ne1,...* de orden $M_{n_2} \times 2$ que contiene la condición de frontera de Neuman Γ_N
 - ensamblaje *connect* de orden $M_{n_3} \times 1$: vector de conexión de nodos
 - ensamblaje *coord-xy* de orden $M_{n_4} \times 1$: vector de conexión de coordenadas
 - **generate-mesh2d**: generación de la mallas adaptativas de elementos finitos
 - **solve-head-hydraulic-nosteady**: generación de las matrices elementales k_e y f_e ; ensamblaje de la matriz **K** y **F** e imposición de las condiciones de contorno, resuelve el sistema de ecuaciones

2.2. Problema de aplicación . En la Tabla 2.1 puede verse que la solución analítica para el flujo de aguas subterráneas dos dimensional en un sistema de acuífero semipermeable cerca a la marea abierta es obtenida con la ecuación (2.1),

$$(2.1) \quad h(x, y, t) = h_z + Ae^{-px-my} \cos\left(at + by - \frac{aS + 2bmT}{2pT}x + c\right)$$

donde

$$(2.2) \quad p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[\left(b^2 - m^2 + \frac{L}{T} \right)^2 + \left(\frac{aS}{T} + 2bm \right)^2 \right]^{1/2} + b^2 - m^2 + \frac{L}{T} \right\}^{1/2}$$

$$(2.3) \quad q = -\frac{aS + 2bmT}{2pT}$$

que es idéntica a la solución obtenida por Jiao y Tang (2001). El dominio del acuífero para la aplicación del código en elementos finitos es un rectángulo de 3.0×6.0 km. El dominio ha sido discretizado en 5 965 nodos y 11 072 triángulos, Figura (2.1). El paso del tiempo es de una hora. Sobre el acuífero confinado existe un acuífero no confinado con una carga hidráulica constante. Existe una filtración entre los dos acuíferos de $L = 0.001$ h. Otros parámetros son listados en la Tabla (2.2). Esos parámetros son basados en los estudios hidráulicos de la Bahía de Apalachicola, USA (Sun, 1997) y son usados para el estudio de la solución analítica y numérica.

La frontera sobre el lado izquierdo es la condición límite de marea

$$(2.4) \quad h(0, y, t) = h_z + Ae^{-my} \cos(at + by + c)$$

donde h es la carga (m), $h(0, y, t)$ es la carga hidráulica en $x = 0$; S es el coeficiente de almacenamiento del acuífero; T es la transmisividad del acuífero (m^2/d); L es la filtración específica, que es la razón de la conductividad hidráulica (k) sobre el espesor (m') de la unidad semiconfinada; A es la amplitud del cambio de marea; a es la velocidad de marea igual a $2\pi/t_0$, donde t_0 es el periodo de marea, o tiempo de la marea en ir de un extremo a otro; b es el coeficiente de separación; m es el coeficiente de humedad o amplitud de marea; c es el cambio de fase.

La carga hidráulica en el lado derecho se asume constante

$$(2.5) \quad h(\infty, y, t) = h_z$$

la cual afirma que la marea no tiene efecto lejos del interior cuando x se aproxima al infinito se asume que no cambia durante el periodo de simulación. En las fronteras superior e inferior ($y = 0$ y $y = 6$ km) se asume que no existe flujo. La condición inicial para la carga hidráulica h se asume que es cero en todo lugar del acuífero. Resultados de la simulación numéricas y la solución analítica bajo las mismas condiciones hidrodinámicas son presentas en las Tablas (2.4) y (2.3).

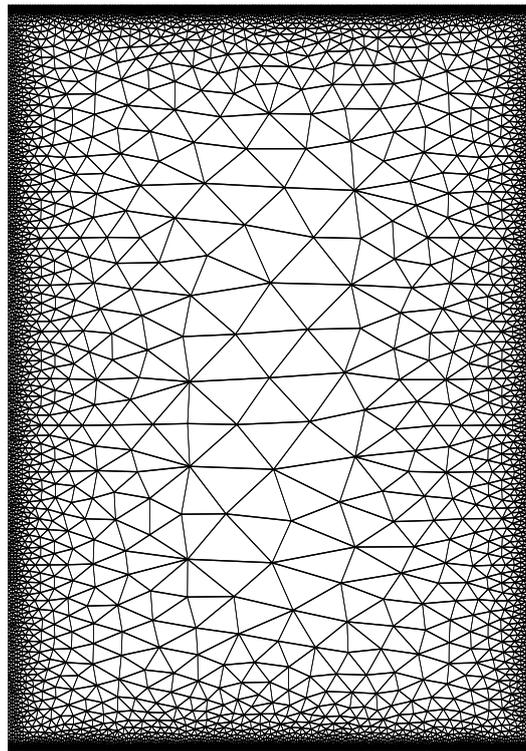


FIGURA 2.1. Modelo de malla no estructurada con 5 965 nodos y 11 072 triángulos

En la Tabla (2.3) se observa que el error máximo y la media tienen una aproximación de centésimas. Además vemos que los promedios en los errores de aproximación se ajustan mejor cuando se utiliza elementos finitos.

Presentamos ejemplos hipotéticos para demostrar como las fluctuaciones de marea son transmitidas dentro del acuífero confinado y como la filtración de agua influye la transmisividad. Los parámetros usados en las simulaciones pueden ser encontrados en la Tabla (2.2). La Figura (2.2) muestra como la carga hidráulica en el acuífero confinado cambia con el espacio y el tiempo cuando la frontera sobre la izquierda tiene

CUADRO 2.2
Parámetros usados en el modelo de solución analítica y numérica (Sun, 1997)

Marea	Parámetros	Valor
Diurna	Transmisividad, T	$700 \text{ m}^2/h$
	Coefficiente de almacenamiento	0.002
	Longitud en la dirección interior	3 km
	Longitud en la línea costera	6 km
	Amplitud en $x = 0$, A_1	0.342 m
	Coefficiente de humedad, m_1	$5.48 \times 10^{-6} (1/m)$
	Velocidad de marea, a_1	$-0.2618 (1/h)$
	Constante de separación, b_1	$1.67 \times 10^{-6} (1/m)$
semidiurna	Cambio de fase, c_1	0.0
	Amplitud en $x = 0$, A_2	0.35 m
	Coefficiente de humedad, m_2	$2.32 \times 10^{-5} (1/m)$
	Velocidad de marea, a_2	$-0.5236 (1/h)$
	Constante de separación, b_2	$6.89 \times 10^{-5} (1/m)$
	Cambio de fase, c_2	7.0

una componente de marea diurna. La filtración específica usada en la simulación es fijada en $L = 0.001$ h. En la Figura (2.2) se observa que pasadas las $t = 5$ horas de simulación las cargas hidráulicas son positivas. La Figura (2.3)(a) muestra como la onda se propaga hacia la dirección interior cuando han transcurrido $t = 6$ horas. Para las $t = 10$ horas de simulación, la carga hidráulica en gran parte del sistema es negativo, Figura (2.3)(b),(c). En este caso se esta utilizando una sola componente de marea sobre la frontera izquierda, lo cual produce que el nivel del agua no cambie mucho en la dirección del eje Y .

Las Figuras (2.4) y (2.5) muestran la distribución de la carga hidráulica cuando la condición de marea izquierda es una superposición lineal de una componente de marea diurna y semidiurna. Dar un patrón de comportamiento de la carga hidráulica es mas complicado que el caso diurno pues el nivel del agua tiene una variación considerable en ambas direcciones, x e y . En general, la distribución espacial y temporal de la carga hidráulica en el acuífero confinado semipermeable tiene un patrón similar de comportamiento a los descritos por Jiao y Tang(2001) y para el caso con filtración nula con el trabajo de Sun(1997).

Para entender la influencia de la filtración¹ vertical sobre las cargas hidráulicas, la solución numérica por elementos finitos es analizada usando diferentes valores para la filtración. La Figura (2.6) muestra como la carga hidráulica cambia con la filtración para 18 horas de simulación cuando la frontera de marea izquierda tiene solo componente de marea diurna. En el perfil $y = 0$ se observa para el caso de filtración nula, que la carga hidráulica tiene una variación grande, Figura (2.6)(a). La fluctuación máxima es 0.10 y esta localizada en $x = 1922.52$. Cuando L se incrementada a 0.005 h, Figura (2.6)(b), la máxima fluctuación es aproximadamente 0.006 y esta localizada en las coordenadas 350 y 400. Las fluctuaciones se hacen cero para valores de x mayores a 1 500. Cuando L se incrementa a 0.01 h, Figura (2.6)(c), la fluctuación máxima en este perfil es aproximadamente de 0.004 y esta localizada en las coordenadas 300 y 350, mientras que las fluctuaciones se hacen cero para valores de x mayores a 900. Como podemos notar, los cambios de fluctuación efectivamente afectan los valores de la carga hidráulica.

CUADRO 2.3

Comparación del error estadístico entre la solución analítica y la solución aproximada por diferencias finitas y elementos finitos para una componente de marea diurna

Indicador $t = 4$ h, $S = 0.002$	Jiao y Tang(2001) Método de Diferencias Finitas	Presente estudio Método del Elemento Finito
Error Máximo	0.00590	0.00838
Media del error	0.00318	0.00387
Varianza	1.89×10^{-3}	7.46×10^{-6}

¹leakage

CUADRO 2.4

Cargas hidráulicas en las coordenadas $x = 1\ 595.45$ e $y = 5\ 943.63$

Tiempo (h)	Solución Analítica S=0.002	Solución Numérica S=0.002
1	0.045048	0.013045
2	0.046268	0.031317
3	0.044335	0.009115
4	0.039380	0.035570
5	0.031742	0.029278
6	0.021940	0.020072
7	0.010643	0.009115
8	-0.001378	-0.002618
9	-0.013307	-0.014231
10	-0.024328	-0.024892

CUADRO 2.5

Comparación del error estadístico entre la solución analítica y la solución aproximada por diferencias finitas y elementos finitos para una componente de marea diurna y semidiurna

Indicador t = 4 h, S = 0.002	Jiao y Tang(2001) Método de Diferencias Finitas	Presente estudio Método de los Elementos Finitos
Error Máximo	0.01090	0.01467
Media del error	0.00746	0.00525
Varianza	2.92×10^{-3}	2.19×10^{-5}

CUADRO 2.6

Cargas hidráulicas en las coordenadas $x = 1\ 595.45$ e $y = 5\ 943.63$

Tiempo (h)	Solución Analítica S=0.002	Solución Numérica S=0.002
1	0.047561	0.020202
2	0.066864	0.055006
3	0.077495	0.072422
4	0.076219	0.072962
5	0.062388	0.058896
6	0.038183	0.034005
7	0.008129	0.003685
8	-0.021975	-0.02588
9	-0.046467	-0.049017
10	-0.061167	-0.061826

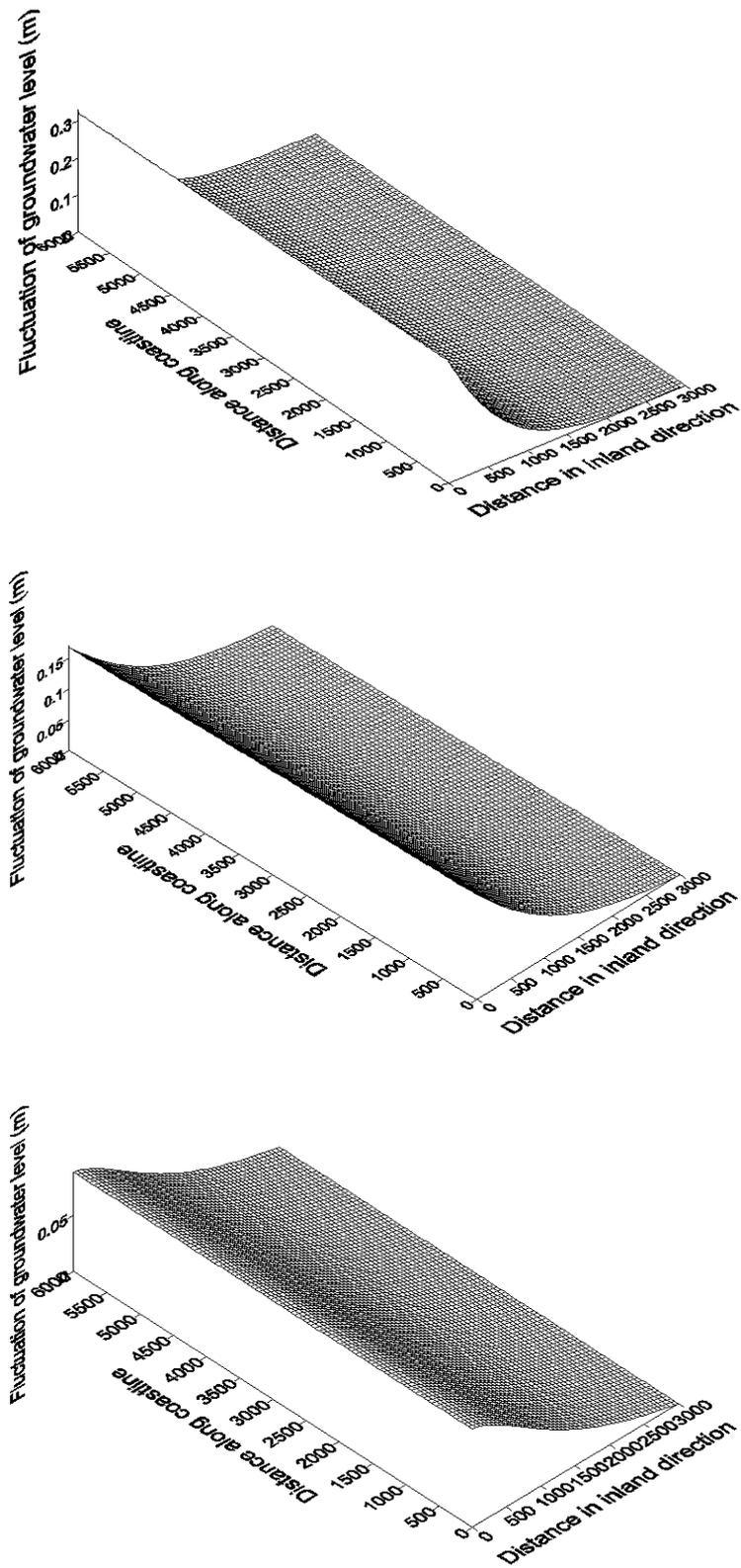


FIGURA 2.2. Niveles piezométricos para el acuífero confinado con marea abierta diurna en (a) $t = 1$, (b) $t = 4$ y (c) $t = 5$ horas

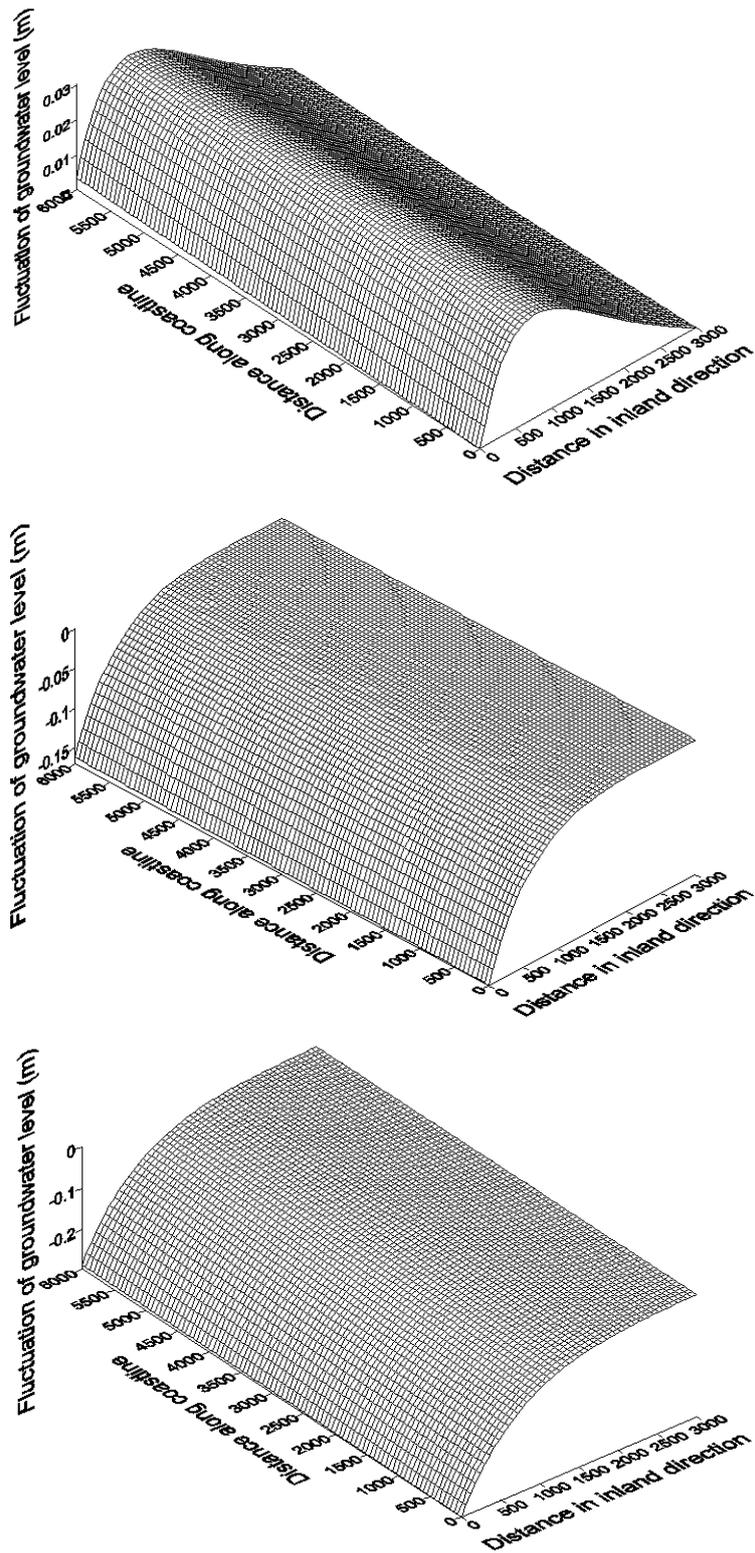


FIGURA 2.3. Niveles piezométricos para el acuífero confinado con marea abierta diurna en (a) $t = 6$, (b) $t = 8$ y (c) $t = 10$ horas

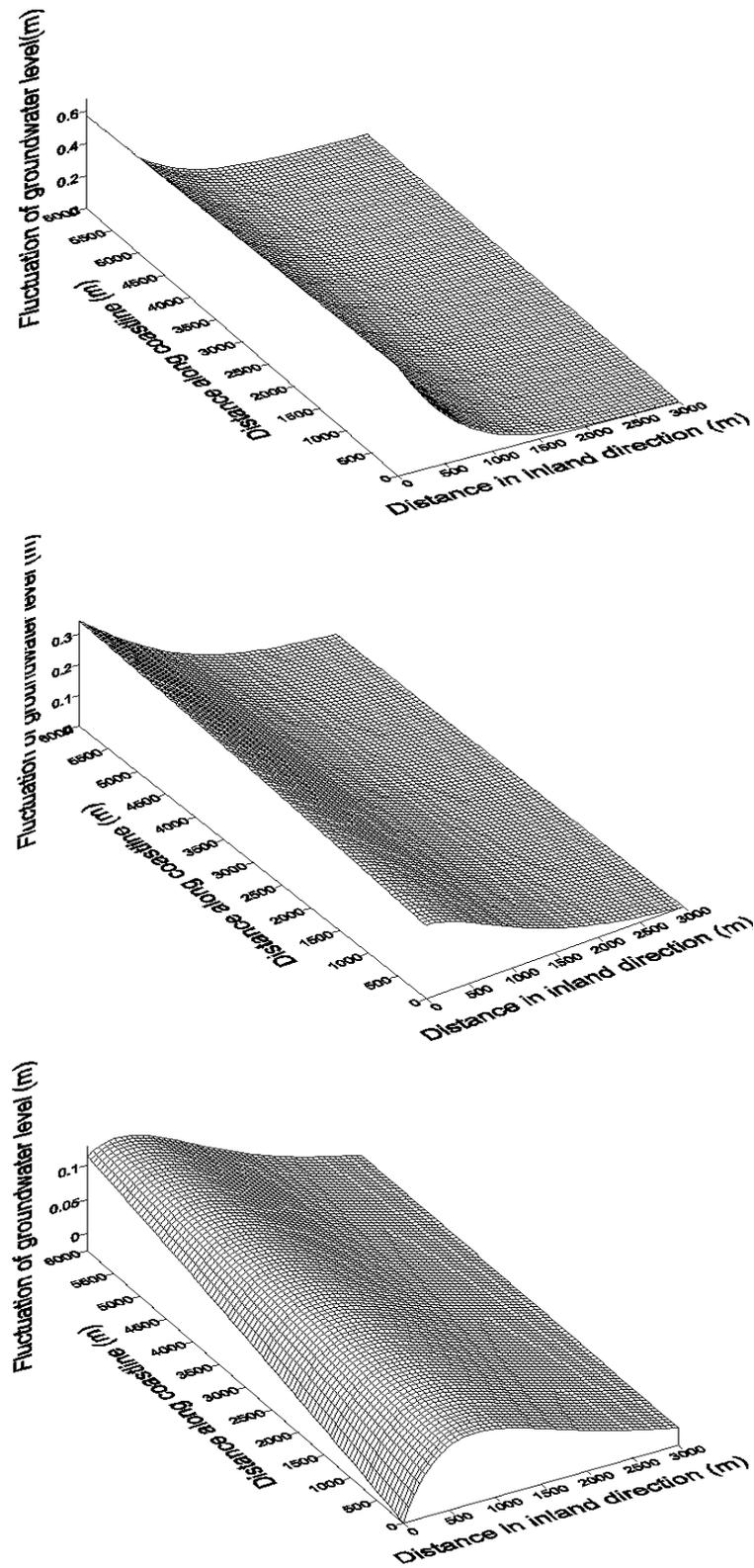


FIGURA 2.4. Niveles piezométricos para el acuífero confinado bajo marea abierta diurna en (a) $t = 1$, (b) $t = 4$ y (c) $t = 5$ horas

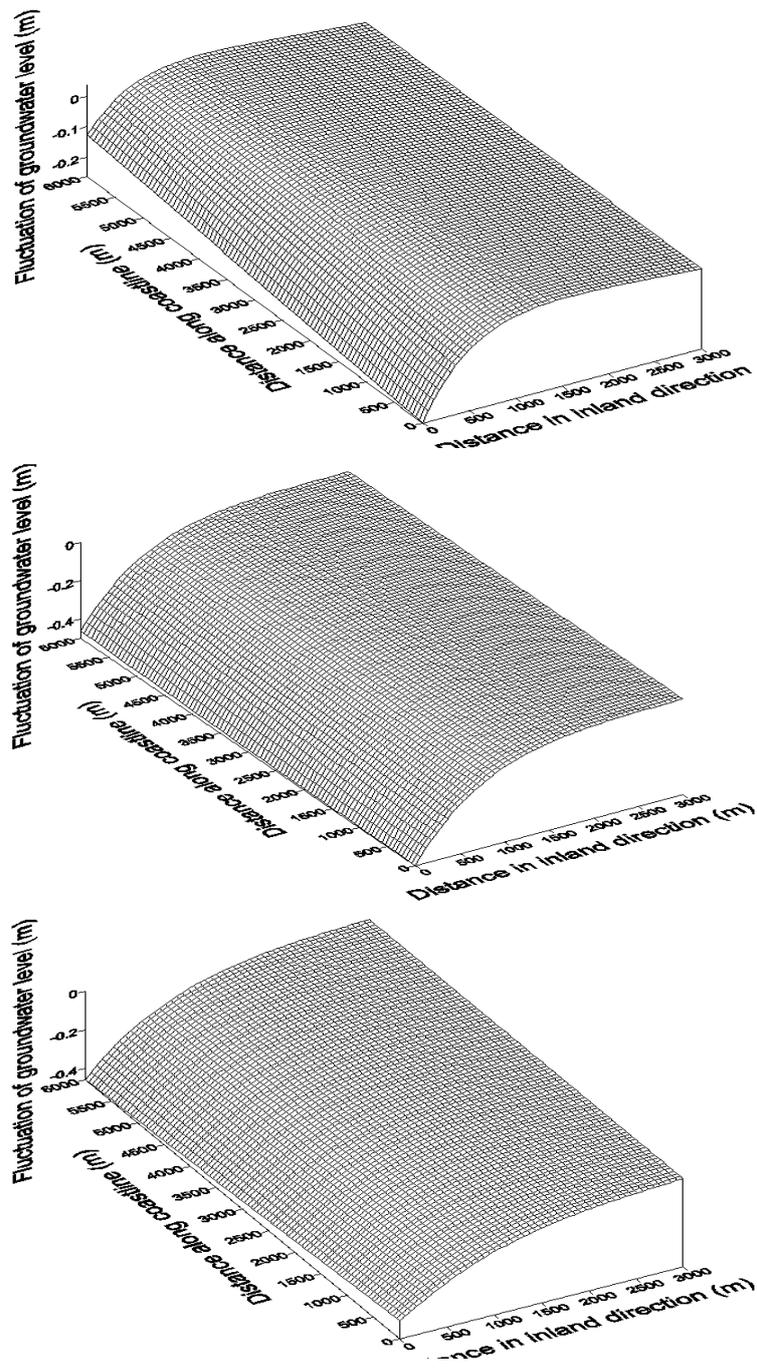


FIGURA 2.5. Niveles piezométricos para el acuífero confinado bajo marea abierta semidiurna en (a) $t = 6$, (b) $t = 8$ y (c) $t = 10$ horas

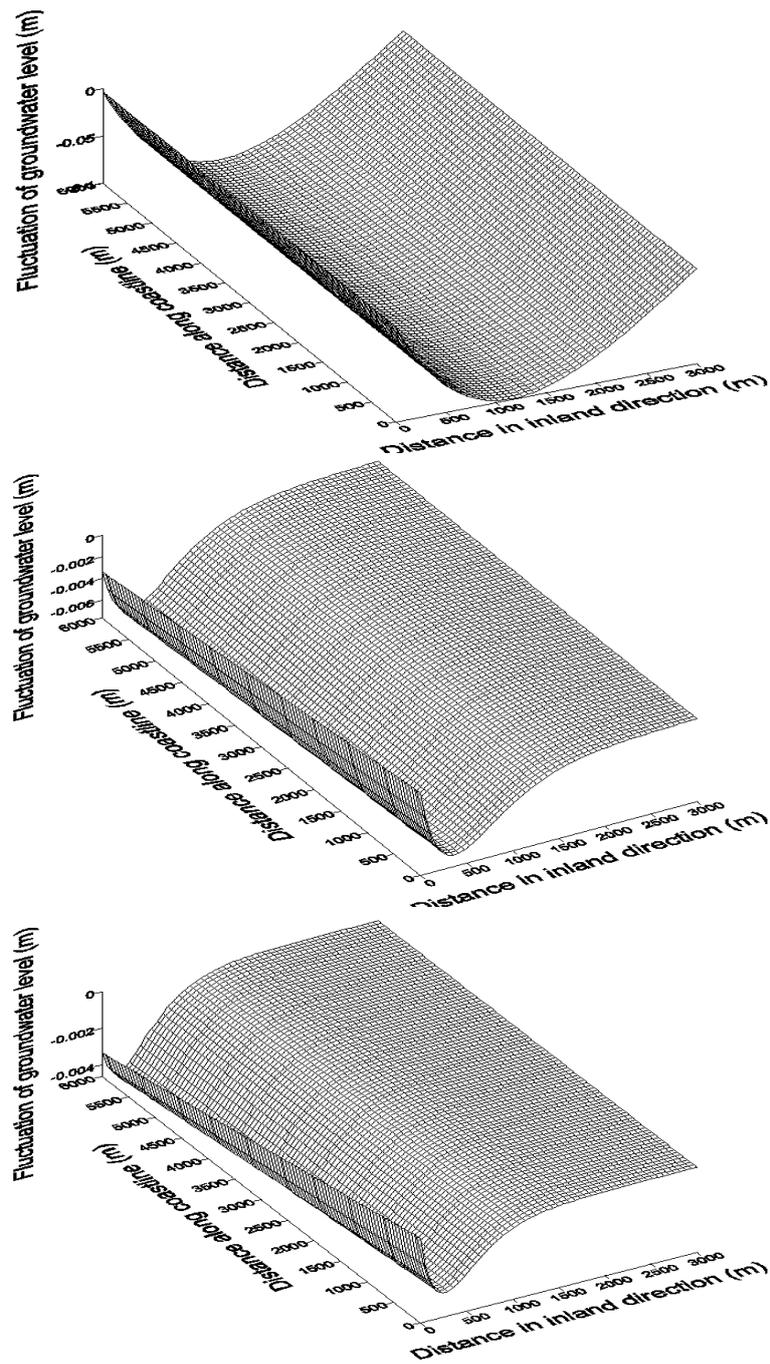


FIGURA 2.6. Niveles piezométricos para el acuífero confinado semipermeable bajo marea abierta diaria con filtración (a) $0/h$, (b) $0.005/h$ y (c) $0.01/h$ en un tiempo de $t = 18$ horas

Agradecimientos. Los resultados de este trabajo fueron obtenidos durante mis estudios de doctorado en Universidad de Porto, Portugal.

Referencias

- [1] M. ANDERSON AND W. WOESSNER. *Applied Groundwater Modeling. Simulation of Flow and Advective Transport*, Academic Press, San Diego, USA, 1992
- [2] J. ALBERTY, C. CARSTENSEN AND A. FUNKEN. Remarks around 50 lines of Matlab: Short finite element implementation. *Numerical Algorithms* 1999 **20**: 117-137.
- [3] J. BEAR. *Hydraulics of Groundwater*, McGraw-Hill Inc, USA, 1979.
- [4] J. BEAR AND A. VERRUIT. *Modeling Groundwater Flow and Pollution*, Published by D. Reidel, Holland, 1978.
- [5] H. BOROUCHEKI AND P. LOUIS. Aspects of 2-D Delaunay mesh generation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1997; **40**: 1957-1975.
- [6] H. BOROUCHEKI AND P. LOUIS. Optimal Delaunay point insertion, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1996; **39**: 3407-3437.
- [7] M.-D CHUANG AND H.-D YEH . An analytical solution for the head distribution in a tidal leaky confined aquifer extending an infinite distance under the sea, *Advances in Water Resources* (2006), doi:10.1016/j.advwatres.2006.05.011.
- [8] C. CUVILIER. *A. Finite Element Methods and Navier-Stokes-Equations*, Reidel Publishing Company, Dordrech, Holland, 1986.
- [9] J. DELLEUR. *The Handbook of Groundwater Engineering* . Edit. Editor-in-Chief Jacques W. Delleur, Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.
- [10] E. DOGRUL AND T. KADIR. Flow computational and mass balance in Galerkin Finite-Element groundwater models, *Journal of Hydraulic Engineering*. 2006; **132**(11): 1206-1214.
- [11] J. GALLAGHER, J. ODEN, C. TAYLOR AND O. ZIENKIEWICZ. *Finite Element in Fluid*, Vol. I, *Viscous Flow and Hydrodynamics*, Edit. John Wiley and Sons, 1978.
- [12] C. JACOB. Flow of ground-water. *In Engineering Hydraulics*, Rouse H. (ed.). Wiley: New York 1950; 321-386.
- [13] J. JIAO AND Z. TANG. An analytical solution of groundwater response to tidal fluctuation in a leaky confined aquifer, *Water Resources Research* 1999; **35**(3): 747-751.
- [14] J. JIAO AND Z. TANG. A two-dimensional analytical solution for groundwater flow in a leaky confined aquifer system near open tidal water, *Hydrol. Process.* 2001; **15**: 573-585.
- [15] M. JONES AND P. PLASSMANN. Adaptive refinement of unstructured finite-element meshes, *Finite Elements in Analysis and Design* 1997; **25**: 41-60.
- [16] I. KAZDA. *Finite Element Techniques in Groundwater Flow Studies, With Applications in Hydraulic and Geotechnical Engineering*. Edit. Elsevier, Czechoslovakia, 1990.
- [17] P. NITHIARASU AND O. ZIENKIEWICZ. Adaptive mesh generation for fluid mechanics problems, *Int.J. Numer. Meth. Engng.* 2000; **19**: 629-662.
- [18] P. PERSSON AND G. STRANG. A simple mesh generator in MatLab, *SIAM Review* Vol. 2004 **46**(2): 329-345.
- [19] A. RASSINEUX. Generation and optimization of tetrahedral meshes by advancing front technique, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1998; **41**: 647-651.
- [20] H. SUN. A two-dimensional analytical solution of groundwater response to tidal loading in an estuary, *Water Resources Research* 1997; **33**(6): 1429-1435.
- [21] G. TANG, N. ALSHAWABKEH AND D. BERNAL. Semianalytical time integration for transient groundwater flow in confined aquifers, *Journal of Hydrologic Engineering* 2007; **12**(1): 73-82..