Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 03(01): 18 - 24 (2016)

Sobre el Control óptimo de un Problema de contaminación ambiental.

On the optimal control of a problem of environmental pollution.

José Dávalos Chuquipoma*

Received, Jan. 15, 2016 *Accepted, May. 15, 2016.*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2016.01.03

Resumen

En este artículo es estudiado el control óptimo de un sistema de parámetros distribuidos aplicado a un problema de contaminación ambiental. El modelo consiste de una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico que modela el transporte de una sustancia contaminante en un fluido. En el modelo es considerado la velocidad con que el contaminante se propaga en el medio ambiente y la degradación que la sustancia contaminante sufre por la presencia de un factor inhibidor biológico, que descompone el contaminante a una tasa que no depende del espacio y el tiempo. Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange es posible probar la existencia de solución del problema de control y la obtención de las condiciones de optimalidad para el control óptimo.

Palabras clave. Contaminación ambiental, multiplicador de Lagrange, condiciones de optimalidad.

Abstract

This article is studied the optimal control of distributed parameter systems applied to an environmental pollution problem. The model consists of a differential equation partial parabolic modeling of a pollutant transport in a fluid. The model is considered the speed with which the pollutant spreads in the environment and degradation that suffers the contaminant by the presence of a factor biological inhibitor, which breaks the contaminant at a rate that is not dependent on space and time. Using the method of Lagrange multipliers is possible to prove the existence solving the problem of control and obtaining optimality conditions for optimal control.

Keywords. Environmental pollution, Lagrange multiplier, optimality conditions.

1. Introducción. Problemas de control óptimo consisten en encontrar, dentro de un conjunto de controles admisibles $\mathcal{U}_{ad}$, una función u llamada de control óptimo, que minimiza o maximiza una funcional $J(v, z(v))$, denominada funcional de costo o función objetivo. La función $z(v)$ representa la variable estado y puede ser definida como solución de un problema de valor de frontera que define el comportamiento del sistema a controlar. Como solución del problema de control, es considerado el par $\{u, y\}$, donde $y = y(u)$ es el estado óptimo [2], [3], [6] y [8].

El estudio de problemas de control óptimo de sistemas distribuidos tiene por objetivo mostrar la existencia de la solución del problema, analizar las propiedades de unicidad y regularidad de la misma y obtener un sistema de condiciones de optimalidad, necesarias y(o) suficientes. Estas condiciones, que envuelven en general una nueva función llamada de estado adjunto, representan una reformulación del problema de control óptimo en términos de un problema de valor de frontera y inicial, para una mejor implementación numérica. La situación, en que el estado del sistema a controlar es definido por un problema de valor de frontera linear, representa el caso clásico y es ampliamente estudiada por varios autores [8], [12], [14]. En este caso la aplicación que a cada control asocia el estado del sistema, es diferenciable con respecto al control y por tanto, el funcional de costo es tambiém Gateux diferenciable. Así, las condiciones de optimalidad que caracterizan el controle óptimo pueden ser encontradas derivándose la funcional de costo com relación al control.

*DEMAT-UFSJ, São João del Rei(jadc13@ufsj.edu.br).

El caso de mayor dificultad encontrándose cuando la ecuación que define el estado es no lineal y el sistema puede tener multiples soluciones. Este tipo de problema es llamado problema de control de sistema singular, para mas detalles ver las referencias [4], [10], [13]. En el caso de inecuaciones variacionales, para obtener las condiciones de optimalidad deben ser aplicados métodos diferentes de los clásicos. La técnica de penalización para obtener un sistema de optimalidad para este tipo de problemas, fue propuesta en el trabajo de Barbu [3]. Utilizando esta técnica, la inecuación variacional es penalizado para obtener un problema aproximado sin restricciones sobre la nueva variable de estado penalizado. Considerando como estado del sistema este problema aproximado, tenemos un problema de control óptimo definido por un operador lineal, aplicando los métodos clásicos se obtiene el sistema de optimalidad para posteriormente pasar al limite en el problema penalizado.

En el caso del control óptimo de polución ambiental, Arantes y Rivera [1] consideran una sustancia contaminante sin presencia de un factor biológico, utilizando el método de transposición y el método directo del cálculo de variaciones, obtienen el sistema de optimalidad para un control de tipo puntual para datos no regulares y algunos resultados numéricos. En este trabajo proponemos la velocidad con que el contaminante se propaga en el medio ambiente y la degradación que la sustancia contaminante sufre por la presencia de un factor inhibidor biológico, que descompone el contaminante a una tasa que no depende del espacio y el tiempo. El control actúa en una region del fluido representado por un conjunto abierto del espacio bidimensional. Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange es posible probar la existencia de solución del problema de control y la obtención de las condiciones de optimalidad para el control óptimo.

2. Formulación del Problema. El problema de control óptimo aplicado a problemas de contaminación ambiental consiste en modelar la concentración de una sustancia contaminante en una determinada región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ocupada por un fluido viscoso incompresible. La concentración del contaminante $z(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ para $T > 0$ dado es definido por la ecuación de estado

$$(S)\left\{\begin{array}{rcll} z_t - D\Delta z + \beta.\nabla z - \lambda z & = & v(x,t)\mathcal{X}_{\omega_T} & \text{en} \quad Q_T \\ z(x,0) & = & 0 & \text{en} \quad \Omega \\ z(x,t) & = & 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_D \\ \frac{\partial z}{\partial \nu}(x,t) & = & f(x,t) & \text{sobre} \quad \Sigma_N. \end{array}\right.$$

donde $Q_T = \Omega \times (0,T), \Sigma_D = \Gamma_D \times (0,T), \Sigma_N = \Gamma_N \times (0,T), D > 0$ es el coeficiente de difusión, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ es el vector velocidad, $\beta_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $\lambda > 0$ es la tasa de decaimiento de la sustancia contaminante, $v \in \mathcal{U}_{ad} \subset L^2(\omega_T)$ representa el control actuando en la región de entrada del contaminante $\omega \subset \Omega$ y en el tiempo, ω es asumido un conjunto abierto, $\omega_T = \omega \times (0,T)$. U_{ad} es el conjunto cerrado convexo de los controles admisibles y $v\mathcal{X}_{\omega_T}$ es la fuente contaminante. $\mathcal{X}_{\omega_T}$ es la función característica del conjunto abierto $\omega_T \subset Q_T$, $f \in L^2(0,T; H^{1/2}(\Gamma_N \times (0,T)))$. Es estudiado el siguiente problema:

$$(P)\left\{\begin{array}{l} J(u,y) \leq J(v,z), \quad \{u,y\} \; \forall \; \{v,z\} \in \mathcal{U}_{ad} \; \times L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ \text{donde } \; z \text{ es la solución del problema } (S). \end{array}\right.$$

donde

$$J(v,z) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[z(x,T) - z_d(x)\Big]^2 dx + \frac{N}{2}\int\int_{\omega_T} v(x,t)^2 dx\, dt.$$

La funcional de costo J interpreta el promedio de la sustancia contaminante en el instante final T, sujeta al costo propio del control v presente en la zona de contaminación ω_T.

3. Existencia de solución de la ecuación de estado. Consideremos el espacio de Sobolev

$$V = H^1_{0,\,\Gamma_D}(\Omega) = \{z \in H^1(\Omega) \mid z = 0 \text{ sobre } \Gamma_D\}, \tag{3.1}$$

con norma

$$\|z\|_V = \left(\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Sea $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ el conjunto de las restricciones a Ω de las funciones en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, luego, el espacio $H^1_{0,\,\Gamma_D}(\Omega)$ es caracterizado como siendo la clausura de $V_{0,\Gamma_D} = \{z \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \mid z = 0$ sobre una vecindad de $\overline{\Gamma_D}\}$ en $H^1(\Omega)$, es decir,

$$V = H^1_{0,\,\Gamma_D}(\Omega) = \Big[\overline{V_{0,\Gamma_D}}\Big]^{H^1(\Omega)}.$$

Para $y, z \in V$ y $\beta_i \in L^{\infty}(\Omega)$, definimos la forma bilineal y continua

$$a(y,z) = D\int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla z dx + \int_{\Omega} z\beta \cdot \nabla y dx.$$

Consideremos la terna de Hilbert (V, H, V'), donde $H = L^2(\Omega)$, y V' es el espacio dual topológico de V. Tenemos la siguiente definición de solución de la ecuación de estado (S).

Definición 1. *Dado $f \in L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma_N))$, decimos que la función $z : (0,T) \to V$, es una solución débil del sistema (S), si z verifica*

$$\left(\frac{\partial z(t)}{\partial t}, w\right) + a(z(t), w) - (\lambda z(t), w) = (v(t)\mathcal{X}_{\omega_T}(t), w) + \int_{\Gamma_N} f(t)w, \quad \forall w \in V. \tag{3.2}$$

Aquí $(\cdot,\cdot)$ representa el producto interno de $L^2(\Omega)$.

El segundo término de (3.2) es una funcional lineal y continua en $L^2(0,T;V)$. De los métodos convencionales para problemas de ecuaciones diferenciales de tipo parabólico, tenemos la validez del siguiente teorema.

Teorema 1. *Dados $f \in L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma_N)), v \in L^2(\omega_T)$ existe una única solución débil z de (S) tal que*

$$z \in L^2(0,T;V \cap H^2(\Omega)) \ \cap \ C^0(0,T;H^1(\Omega)) \ \cap \ C^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Del Teorema 1 podemos afirmar que la aplicación

$$t \to z(t) = z(t;v) \quad \text{es continua de} \quad [0,T] \to L^2(\Omega).$$

Por lo tanto, $z(\cdot,T,v) \in L^2(\Omega)$. Esto implica que para cada control $v \in L^2(\omega_T)$, existe un único correspondiente z. En general el lema siguiente es válido.

Lema 1. *si $v \in L^2(\omega_T)$, entonces la única solución $z(x,t;v)$ de la ecuación de estado (S) es una aplicación afín, es decir*

$$v \to z(x,t;v) - z(x,t;0)$$

es una aplicación lineal.

El Lema (1) implica que el problema de control (P) puede ser escrito en la forma reducida

$$\min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \tilde{J}(v) = J(v, z(v)), \tag{3.3}$$

donde $z(v) = z(x,t;v)$.

4. Resultado principal. Siendo $v \in L^2(\omega_T)$ y $z(\cdot,t;v) \in L^2(\Omega)$, la función costo está bien definida en $L^2(\omega_T)$. El espacio de los controles $\mathcal{U}$ es:

$$\mathcal{U} = \{v \in L^2(\omega_T) \mid z(\cdot,t;v) \in L^2(\Omega)\}.$$

$\mathcal{U}$ unido de la norma

$$\|v\|_{\mathcal{U}} = \left(\int_{\omega_T} |v(x,t)|^2 dxdt + \int_{\Omega} |z(x,T;v)|^2 dx\right)^{1/2}$$

es un Espacio de Hilbert. Definimos el conjunto cerrado convexo

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in \mathcal{U} \mid v \geq \phi \geq 0\}, \text{ para } \phi, \text{ dado en } \mathcal{U}. \tag{4.1}$$

De las definiciones y propiedades de $\mathcal{U}, \mathcal{U}_{ad}, J$ y utilizando el método directo del cálculo de variaciones, se obtiene el teorema siguiente.

Teorema 2. *Sean $v \in \mathcal{U}_{ad}$ y $f \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))$. Entonces existe un único control óptimo $u \in \mathcal{U}_{ad}$ solución del problema (P) tal que.*

$$\langle \tilde{J}'(u), v - u\rangle \geq 0, \quad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Del Lema (1) tenemos que la aplicación $v \mapsto z(x,t;v) - z(x,t;0)$ es lineal, esto implica que $\tilde{J}$ puede ser escrito en la forma

$$\begin{aligned} \tilde{J}\ (v) &= \tfrac{1}{2}\int_{\Omega}\Big[z(x,T;v) - z(x,T;0) + z(x,T;0) - z_d(x)\Big]^2 dx \\ &+ \frac{N}{2}\int_{\omega_T} v(x,t)^2 dx\ dt. \end{aligned}$$

Sobre $\mathcal{U}_{ad}$ definimos: la forma bilinear continua

$$b(v,w) = \int_{\Omega}[z(T;v) - z(T;0)][z(T;w) - z(T;0)] + N\int_{\omega_T} v\ w,$$

la funcional lineal y continua:

$$Lv = \int_{\Omega}[z(T;v) - z(T;0)][z(T;0) - z_d(x)]dx$$

y

$$q = \frac{1}{2}\int [z(T;0) - z_d(x)]dx.$$

Resulta que $\tilde{J}$ toma la forma

$$\tilde{J}\ (v) = \frac{1}{2}b(v,v) + Lv + q.$$

Así, del Teorema 2 tenemos $\forall\ v \in \mathcal{U}_{ad}$:

$$\langle \tilde{J}\,'(u), v-u\rangle = b(u, v-u) + L(v-u) \geq 0,$$

después de algunos ajustes se torna $\forall\ v \in \mathcal{U}_{ad}$:

$$\int_{\Omega}[y(T;u) - z_d][z(T;v-u) - z(T;0)] + N\int_{\omega_T} u(v-u) \geq 0,$$

donde $y(T;u) = z(x,T;u)$ es el estado óptimo, solución de la ecuación de estado (S) para el control óptimo $u \in \mathcal{U}_{ad}$.

4.1. El Método de los Multiplicadores de Lagrange. Utilizando la linealidad de $v \mapsto z(t;v) - z(t;0)$, introducimos la función $p \in L^2(0,T;V)$ como un multiplicador de Lagrange para escribir la funcional de costo $\tilde{J}$ en la forma aumentada

$$\begin{aligned} \tilde{J}\ (v) &= \tfrac{1}{2}\int_{\Omega}(z[T;v] - z_d)^2 dx + \frac{N}{2}\int_{Q_T}(v\mathcal{X}_{\omega_T})^2 dxdt \\ &+ \int_{Q_T} p\left\{v\mathcal{X}_{\omega_T} - (\dot{z}[t;v] - \dot{z}[t;0]) + \xi(z[t;v] - z[t;0])\right\} dxdt. \end{aligned}$$

donde

$$\xi(z) = D\Delta z - \beta.\nabla z + \lambda z,$$

$$z[t;v](x) = z(x,t;v),$$

$$\dot{z}[t;v](x) = \frac{\partial}{\partial t}z(x,t;v).$$

Con estas notaciones la derivada de Gateux para la funcional aumentada $\tilde{J}$ es:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{J}\,'(u), v-u\rangle &= \int_{\Omega}(y[T,u] - z_d)(z[T;v-u] - z[T;0])dx + \int_{Q_T}(Nu\mathcal{X}_{\omega_T} + p)(v-u)dxdt \\ &- \int_{Q_T} p\left\{(\dot{z}[t;v-u] - \dot{z}[t;0]) - \xi(z[t;v-u] - z[t;0])\right\} dxdt \ \geq\ 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Siendo $z[0; v-u] - z[0;0] = 0$ y integrando por partes en la última integral de (4.2) se obtiene

$$-\int_{Q_T} p\,(\dot z[t; v-u] - \dot z[t;0]) = \int_{Q_T} \dot p\,(z[t; v-u] - z[t;0]) - \int_{\Omega} p(x;T)\,(z[T; v-u] - z[T;0])\,.$$

De otro lado, de la definición de ξ e tomando $w = v - u$ tenemos en (4.2)

$$\int_{Q_T} p\,\xi(z[t;w] - z[t;0]) = \int_{Q_T} p\,(D\Delta - \beta.\nabla + \lambda)(z[t;w] - z[t;0]). \tag{4.3}$$

A seguir simplificamos (4.3).

$$\int_{Q_T} p\,\Delta(z[t;w] - z[t;0]) = \int_{Q_T} (z[t;w] - z[t;0])\,\Delta p \;+ \int_{\Gamma_N\times(0,T)} \frac{\partial p}{\partial \nu}\,(z[t;w] - z[t;0]) \tag{4.4}$$

$$\int_{Q_T} p\,\beta\cdot\nabla(z[t;w] - z[t;0]) = \int_{\Gamma_N\times(0,T)} p(z[t;w] - z[t;0])\beta\cdot\nu - \int_{Q_T} (z[t;w] - z[t;0])\beta\cdot\nabla p. \tag{4.5}$$

Luego, sustituyendo (4.4) y (4.5) en (4.3) se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} p\xi(z[t;w] - z[t;0]) &= \int_{Q_T} (D\Delta p + \beta\cdot\nabla p + \lambda p)(z[t;w] - z[t;0]) \\ &+ \int_{\Gamma_N\times(0,T)} \left(D\frac{\partial p}{\partial \nu} + p\beta\cdot\nu\right)(z[t;w] - z[t;0]).\end{aligned}$$

Con el objetivo de simplificar (4.2) y basado en la última igualdad, definimos el multiplicador de Lagrange $p \in L^2(0,T;V)$ siendo la única solución del problema adjunto

$$(S_a)\begin{cases} p_t + D\Delta p + \beta\cdot\nabla p + \lambda p = 0 & \text{en } Q_T \\ p(x,T) = y[T;u] - z_d & \text{en } \Omega \\ p = 0 & \text{sobre } \Gamma_D\times(0,T) \\ D\dfrac{\partial p}{\partial \nu} + p\beta\cdot\nu = 0 & \text{sobre } \Gamma_N\times(0,T). \end{cases}$$

Por tanto la derivada de Gateux en (4.2) se reduce a

$$\int_{Q_T} (Nu\mathcal{X}_{\omega_T} + p)(v-u)dxdt \;\geq\; 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{4.6}$$

Probando de esta manera el siguiente teorema.

Teorema 3. *$\{u, y\}$ es solución del problema (P) si y solamente si, existe un multiplicador de Lagrange $p \in L^2(0,T; V\cap H^2(\Omega)) \;\cap\; C^0(0,T;H^1(\Omega)) \;\cap\; C^1(0,T;L^2(\Omega))$, solución del sistema (S_a), y satisface el sistema (S) y u es caracterizado por la condición de optimalidad (4.6).*

Lema 2. *Si $u \in \mathcal{U}_{ad}$ verifica la condición de optimalidad (4.6), entonces*

$$u = \phi + \left(\phi + \frac{p}{N}\right)^- \quad \text{en } \omega_T,$$

donde $(\phi)^- = \sup\{-\phi, 0\}$ denota la parte negativa de ϕ. Prueba Tomando $v = \phi \in \mathcal{U}_{ad}$ en (4.6) tenemos

$$\int_{Q_T} (Nu\mathcal{X}_{\omega_T} + p)(\phi - u)\,dxdt \;\geq\; 0 \quad u \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{4.7}$$

Considerando $v = 2u - \phi \in \mathcal{U}_{ad}$ en (4.6), obtenemos

$$\int_{Q_T} (Nu\mathcal{X}_{\omega_T} + p)(u - \phi)\,dxdt \;\geq\; 0 \quad u \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{4.8}$$

Luego, de (4.7) y (4.8) se obtiene

$$\int_{Q_T} (Nu\mathcal{X}_{\omega_T} + p)(u - \phi)\,dxdt \;=\; 0. \tag{4.9}$$

Escogiendo $w = u - \phi \geq 0$, tenemos de (4.8)

$$\int_{Q_T} (Nw\mathcal{X}_{\omega_T} + N\phi\mathcal{X}_{\omega_T} + p)w \, dxdt \;\geq\; 0,$$

y siendo $w \geq 0$, tenemos

(4.10) $$w \geq -\left(\phi + \frac{p}{N}\right) \quad \text{en } \omega_T.$$

De (4.9), concluímos que

$$\int_{Q_T} (Nw\mathcal{X}_{\omega_T} + N\phi\mathcal{X}_{\omega_T} + p)w \, dxdt \;=\; 0.$$

Por tanto

(4.11) $$w = 0 \quad \text{en} \quad Q_T,$$

o

(4.12) $$w = -\left(\phi + \frac{p}{N}\right), \quad \text{en } \omega_T.$$

De (4.10), (4.11) y (4.12) se obtiene

$$w = \sup\left\{0, -\left(\phi + \frac{p}{N}\right)\right\} = \left(\phi + \frac{p}{N}\right)^{-}.$$

Por tanto, concluimos que en ω_T

$$u = \phi + \left(\phi + \frac{p}{N}\right)^{-}.$$

□

Los resultados encontrados en los teoremas anteriores y el Lema 2 prueban la validez del resultado principal de este trabajo que caracteriza al control óptimo que enunciamos a seguir.

Teorema 4. *$\{u, y\}$ es solución del problema (P) si y solamente si, existe un multiplicador de Lagrange $p \in L^2(0,T; V \cap H^2(\Omega)) \cap C^0(0,T; H^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega))$, tal que u, y satisfacen el sistema (S), p es definido como solución del sistema adjunto (S_a) e u es caracterizado por la condición de optimalidad*

$$u = \phi + \left(\phi + \frac{p}{N}\right)^{-} \quad en \quad \omega_T.$$

Conclusión. Los resultados obtenidos en este trabajo extienden a los obtenidos por Santina y Rivera [1] para el caso de la presencia de un factor de inhibición biológico.

Agradecimiento. El autor agradece a los autores anónimos cuyos trabajos constituyen un gran aporte en la realización de este archivo.

El autor agradece a la FAPEMIG-BRASIL por el apoyo financiero.

Referencias

[1] S. de F. Arantes; J. Muñoz Rivera, *Optimal control theory for ambient pollution*, International Journal of Control, volume 83, Issue 11, 2010.
[2] H. T. Banks, *Control and Estimation in Distributed Parameter Systems*, Siam, Philadelphia, 1992.
[3] V. Barbu, *Necessary Conditions for Distributed Control Problems Governed by Parabolic Variational Inequalites*. SIAM J. Control and Optimization, Vol. 19, 1981, pp.64-86.
[4] J. A. Chuquipoma, C. A. Raposo, W. D. Bastos, *Optimal control problem for deflection plate with crack*. Journal of Dynamical and Control Systems, **18**, 397-417, 2012.
[5] I. Ekeland, R. Teman, *Analyse Convexe et ProblÃ¨mes Variationelles*. Paris, Dunod - Gauthier Villars, 1973.
[6] A. V. Fursikov, *Optimal Control of Distributed Systems: Theory and Applications* Translations of Mathematical Monographs, volume 187, American Mathematical Society, Moscow, 1999.
[7] H. R, Joshi, *Control of the Convective Velocity Coefficient in a Parabolic Problem*. Proceeding of World Congress on Nonlinear Analysis, 2005.
[8] J. L. Lions, *Controle Optimal des Systemes Gouvernas par des Équations aux DeriveÃ©s Partielles*, Dunod - Gauthiers - Villars, Paris 1968.
[9] ———, *Quelques Mèthodes de Resolution des Problemes aux Limites non Lineaires*, Dunod - Gauthiers - Villars, Paris, 1969.
[10] ———, *Function Spaces and Optimal Control of Distributed Systems*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1980.
[11] ———, *Some aspects of the Optimal Control of Distributed Parameter Systems*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1980.
[12] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action From Modelling to theory*. Springer - Verlag Italia, Milano 2008.
[13] P. Neittaanmäki; D. Tiba, *Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems. Theory, Algorithms and Applications*, 1994.
[14] F. Tröltzsch, *Optimal Control of Partial Differential Equations Theory, Methods and Applications.*, Graduate Studies in Mathematics, vol 112, American Mathematical Society, Berlin 2005.