



Midiendo la Complejidad en el Mercado Financiero Peruano.

Measuring the Complexity in the Peruvian Financial Market.

Alexis Rodriguez Carranza* and Juan Ponte Bejarano[†]

Received, Jul. 20, 2015

Accepted, Set. 15, 2015.

DOI: <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2015.02.06>

Resumen

Información sobre la complejidad de un fenómeno, puede ser obtenida midiendo sus grados de libertad. Asumiendo que las trayectorias del fenómeno convergen a un conjunto atractor, los grados de libertad del sistema, son los grados de libertad del atractor. En el presente artículo estudiamos la presencia de un conjunto atractor para la dinámica en el mercado financiero y estimamos su dimensión. Serán usadas las ideas de reconstrucción de atractores usando coordenadas de retraso de Takes y las aplicaciones son centradas en el mercado financiero peruano.

Palabras clave. Dinámica no lineal, atractores, series temporales.

Abstract

Information on the complexity of a phenomenon, may be obtained by measuring their levels of libertad. Asimismo that phenomenon paths converge to an attractor set, the degrees of freedom of the system, are the degrees of freedom of attractor. In this article we study the presence of an attractor for the dynamic set in the financial market and estimate its dimension. They will be used the ideas of reconstruction of attractors using delay coordinates Takes and applications are centered in the peruvian financial market.

Keywords. Nonlinear dynamics, attractors, time series.

1. Introducción. Para un estudio asintótico del comportamiento de soluciones de un determinado sistema, el área de sistemas dinámicos a desarrollado muchas herramientas. Sin embargo en muchos fenómenos, como en el mercado financiero, el sistema de ecuaciones que modelan su dinámica es desconocido y únicamente se tiene una serie temporal de medidas. Una serie temporal es una función $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cuya imagen puede ser considerada como observaciones tomadas a lo largo del tiempo de un determinado fenómeno. Entonces tales observaciones contienen información dinámica y geométrica del sistema y podrían ser usadas para investigar el comportamiento del fenómeno. La teoría del caos será usada para entender la complejidad de la dinámica en el mercado financiero, ya que en ellos, sistemas con comportamiento aparentemente aleatoria, provienen de un sistema determinístico, es decir, de un sistema modelado completamente por ecuaciones. La complejidad de un sistema caótico radica fundamentalmente en la sensibilidad a pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales. Una de las característica de los sistemas caóticos es la presencia de un conjunto con dimension no entera, fractal, donde las soluciones convergen. Haremos nuestras investigaciones en un par de series temporales de precios: acciones de la empresa minera MINSUR.SA y TelefBC1 para determinar indicios sobre la presencia de un conjunto atractor fractal en la dinámica de las series. En la Figura (1.1) se muestra la evolución de los precios de dichas acciones.

*Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n., Ciudad Universitaria, Trujillo, Per[PleaseinsertPrerenderUnicode{Ã}intopreamble](alexis@unitru.edu.pe).

[†]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n., Ciudad Universitaria, Trujillo, Per[PleaseinsertPrerenderUnicode{Ã}intopreamble](jponte@unitru.edu.pe), This work is licensed under the [Creative Commons Attribution-NoComercial-ShareAlike 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



FIGURA 1.1. Serie de precios de las acciones de MINSUR y TelfBC

1.1. Dimensión. Podemos pensar la dimension de un conjunto en \mathbb{R}^n como un exponente que expresa la escala entre su “volumen” y su “tamaño”.

$$(1.1) \quad \text{volume} \approx \text{tamanho}^{\text{dimens\~{a}o}}$$

Aquí el “volumen” puede expresar el volumen mismo, masa. El “tamaño” es una distancia lineal, por ejemplo, el "volumen" de un cuerpo en dimensión 2 seria dado por su área y el “tamaño” seria dado por su diámetro. La dimension es usualmente expresado como:

$$\text{Dimension} \approx \lim_{\text{tamanho} \rightarrow 0} \frac{\log(\text{volume})}{\log(\text{tamanho})}$$

El limite indica que la dimensión es una Cantidad local y que para definir una cantidad global es preciso algún tipo de promedio. Otra forma de definir dimensión es la siguiente. Sea $B_x(r)$ la bola de radio r y centrada en el punto x . Dependiendo de la norma, la bola será una hiperesfera, hipercubo. Definimos la función masa puntual por

$$(1.2) \quad M_x(r) = \mu(B_x(r))$$

la escala de la función masa con el radio, como en la ecuación(1.1), define la dimensión puntual en x

$$D_p(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(B_x(r))}{\log(r)}$$

La dimensión puntual es una cantidad local, pero podemos definir una cantidad global, tomando el promedio.

$$D_p = \int_A D_p(x) d\mu(x).$$

Otra forma de pensar, que no sea la de calcular la escala de la masa con el tamaño, es en términos de cuantos números reales son necesarios para especificar la posición de un punto en ese conjunto. Por ejemplo, la posición de un punto en la recta es determinada por un número, la posición sobre un plano por dos. Ahora, la idea es extender este concepto para conjuntos mas complicados que líneas, planos, volúmenes, etc.

Una manera de entender esta definición es cambiar la idea de cuantos números reales son necesarios, por cuantos bits de información son necesarios para especificar la posición de un punto en un conjunto. Aclaremos un poco esta idea. Imaginemos un torneo con 4 equipos participantes, A, B, C, D . Se designa a cada equipo un bit, 0 o 1, como en el siguiente esquema.

1 A
 0 B
 1 C
 0 D .

Si el equipo B es el ganador, tendríamos que dar la información 0, pero como receptores tendríamos la duda si el equipo ganador fue B o D . En este caso un bit de información es insuficiente para interpretar la información sin intercepta. Ahora designemos un bit mas a cada evento, como en el siguiente esquema.

1 1 A
 1 0 B
 0 1 C
 0 0 D .

En este caso, cualquiera que sea el equipo ganador, la información que daremos puede ser interpretada sin certeza. En nuestro ejemplo, la información 00 es interpretada como D es el equipo ganador, es decir 2 bits de información son suficientes.

Aplicando estas ideas a conjuntos, pensemos en un segmento de recta unitario. Queremos determinar la posición de un punto en dicho segmento con una precisión de $r = \frac{1}{2}$. Dividiendo el segmento en dos partes del mismo tamaño y etiquetamos cada sub-segmento por S_1 y S_2 . Es claro que 1 bit es suficiente. Si la precisión es $r = \frac{1}{4}$, dividimos el segmento en 4 sub-segmentos y como en los ejemplos vistos, tendríamos la misma conclusión, un bit es insuficiente para interpretar la información sin certeza, y necesitamos de dos bits. Siguiendo, k bits son necesarios para especificar la posición de un punto sobre el segmento con una precisión de $r = \frac{1}{2^k}$. Para un cuadrado de lado 1, $2k$ bits son necesarios para alcanzar la misma precisión (k bits para cada lado). Análogamente, $3k$ bits son necesarios para un cubo 3 dimensional. En general, $S(r) = -d \log_2(r)$ bits de información son necesarios para especificar la posición de un punto en un d cubo unitario con una precisión r . Estos ejemplos llevan a la definición natural de dimensión de información de un conjunto

$$D_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-S(r)}{\log_2 r}$$

Donde $S(r)$ es la información (en bits) necesarios para especificar la posición de un punto sobre el conjunto con una precisión r . El cálculo de $S(r)$ fue dado por Claude Shanon [14]. Él demostró que si tenemos un conjunto de n -eventos, cuyas probabilidades de ocurrencia son p_1, p_2, \dots, p_n , entonces la cantidad de información media para especificar uno de ellos es dado por:

$$I_p = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i)$$

Para el calculo de la dimensión de información de un conjunto A se considera una partición del en n -cajas B_i de diámetro r . Luego la probabilidad de que un punto del conjunto A esté en la caja B_i es dado por $p_i = \frac{\mu(B_i)}{\mu(A)}$. Usando la formula de Shanon, la información necesaria para especificar un punto en el conjunto A con una precisión r es dado por:

$$S(r) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i).$$

Esta relación lleva directamente a una expresión para la dimensión de información del atractor

$$D_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-S(r)}{\log_2 r}$$

$$D_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i)}{\log_2 r}$$

Observemos que la dimensión de información de alguna forma es un promedio de dimensiones puntuales. En casos prácticos es usual considerar un conjunto finito de puntos sobre el atractor y calcular el promedio de sus dimensiones puntuales. La estrategia mas natural de calcular promedios fue introducida por Grassberger y Procaccia [8]. Ellos notaron que ya que las trayectorias convergen para un conjunto atractor, los puntos sobre las trayectorias están correlacionadas espacialmente a lo largo del tiempo. Midieron esta correlación con lo que ellos llamaron de *integral de correlación*.

$$(1.3) \quad C(r) = \langle M_x(r) \rangle$$

Donde $M_x(r)$ es la función masa puntual definida en la ecuación(1.2) y $\langle . \rangle$ denota el promedio sobre todos los puntos considerados. Se muestra que para r suficientemente pequeño, $C(r)$ crece como una potencia de la forma

$$(1.4) \quad C(r) \approx r^\nu.$$

Donde la dimensión de correlación, ν , es definida por

$$\nu = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(C(r))}{\log(r)}.$$

La tarea principal para el estudio de la dimensión partiendo de una serie temporal, es la reconstrucción de la dinámica que ella contiene. Si una serie temporal proviene de un sistema determinístico, entonces, ella contiene dependencias entre sus componentes, dadas por el sistema de ecuaciones que lo modelan y contiene información geométrica ya que las trayectorias convergen a un conjunto atractor el cual estará inmerso en algún espacio euclidiano. Usando dichas informaciones y las ideas de los teoremas de inmersión de Whitney, en los cuales, una

variedad compacta de dimensión n puede ser inmersada en \mathbb{R}^{2n} y sus generalizaciones para conjuntos fractales, dado por Tim Sauer [4] permiten reconstruir la dinámica que contiene una serie temporal. Usaremos, para ilustrar la reconstrucción, la dinámica del sistema de Lorenz, donde nuestra serie temporal será la primera componente del sistema.

A seguir enunciamos la versión probabilística del teorema de Whitney [4]

1.1.1. Teoremas principales.

Teorema 1. (Teorema Prevalente de Whitney) Sea A una variedad suave y compacta de dimensión d contenida en \mathbb{R}^k . Para casi todo mapa suave, $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$, el es un embending de A . El teorema(1) nos dice que es posible reconstruir la dinámica existente via proyecciones en espacios Euclidianos. A pesar de esta versión del teorema de Whitney, aún tenemos un problema práctico. En el mercado financiero sólo es posible obtener una observación temporal de la dinámica, las evoluciones de los precios de las acciones y necesitaríamos de $2d + 1$ observaciones del fenómeno. Entonces, los resultados hasta aquí enunciados no son de mucha ayuda práctica. Takens abordó este problema incorporando en los teoremas de whitney a dinámica contenida en la serie temporal. Ella es una proyección, via una función de observación, del espacio de fase donde se desenvuelve el sistema dinámico, para \mathbb{R} . Por tanto ella contiene información de la dinámica. Para ello se define las *coordenadas de retraso(delay)*, con las cuales es necesario solamente una observación temporal.

Definición 1. Si Φ es un sistema dinámico sobre una variedad(manifold) A , T un entero positivo(llamado de delay), y $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Definimos el mapa de coordenadas de delay $F_{(\Phi,T,h)} : A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$F_{(\Phi,T,h)}(x) = (h(x), h(\Phi_T(x)), h(\Phi_{2T}(x)), \dots, h(\Phi_{nT}(x)))$$

Takens [6] demostró una versión del teorema de Whitney para las coordenadas de retraso.

Teorema 2. (Takens) Sea A una variedad compacta de dimensión m , $\{\Phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ un sistema dinámico discreto sobre A generado por $F : A \rightarrow A$, y una función de clase C^2 $h : A \rightarrow \mathbb{R}$. Es una propiedad genérica que el mapa $F_{(\Phi,h)}(x) : A \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ definido por

$$F_{(\Phi,h)}(x) = (h(x), h(\Phi_k(x)), h(\Phi_{2k}(x)), \dots, h(\Phi_{nk}(x)))$$

es un embending. La generalización final, usada en el presente artículo, fue dada por B.Hunt, T. Sauer e J. Yorke [7], que es una versión fractal probabilística del Teorema de Whitney, para el conjunto de mapas de retrasos con A siendo un conjunto fractal.

Teorema 3. (Fractal Delay Embedding Prevalence Theorem) Sea Φ un sistema dinámico sobre un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^k , y sea A un subconjunto compacto de U de dimensión de la caja d . Sea $n > 2d$ un entero, y sea $T > 0$. Asuma que A contiene solamente un número finito de puntos de equilibrio, no contiene órbitas periódicas de Φ de período T o $2T$, un número finito de órbitas periódicas de Φ de período $3T, 4T, \dots, nT$, y que las linealizaciones de sus órbitas periódicas tiene autovalores distintos. Entonces para casi toda(en el sentido probabilístico) función suave h sobre U , el mapa de coordenadas de retraso $F_{(\Phi,T,h)} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva sobre A

Cabe mencionar que el Teorema (3) no dá una estimativa sobre la menor dimensión para la cual casi todo mapa de coordenadas de retraso(delay) es inyectiva. Sin embargo existen algoritmos numéricos que permiten estimar la dimensión de inmersión y el tiempo de retraso en las reconstrucciones. En la siguiente sección mostramos la reconstrucción de la dinámica generada por el sistema de Lorenz usando solamente la coordenada x del sistema.

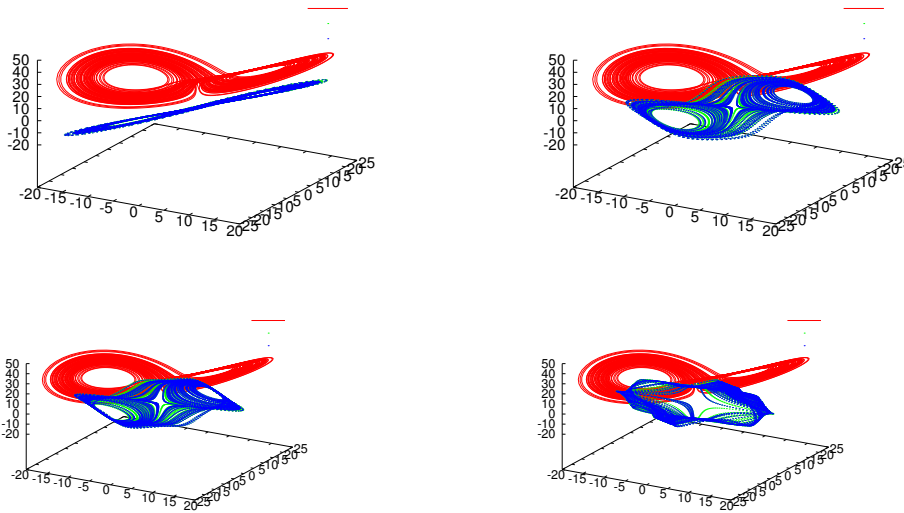
2. Ejemplos de Reconstrucción del atrator usando coordenadas de retraso. Usaremos el atractor de Lorenz para ilustrar la técnica de las coordenadas de retraso. La función de observación h , fue la proyección en el eje x . Así:

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \rightarrow h(x, y, z) = x$$

Así, la série temporal será formada por las coordenadas x de las trayectorias que son soluciones numéricas de la ecuación. Fijada la dimensión, $n = 3$, vamos a variar el valor de T . En el caso del atractor de Lorenz usamos tiempos de retraso, $T = 1, T = 10, T = 17, T = 90$. En el caso de $T = 1$ los puntos en el espacio están muy correlacionados y el gráfico es casi una linea recta. En el otro extremo, $T = 90$, los puntos están muy descorrelacionados y el gráfico obtenido no representa la reconstrucción del atractor. El tiempo de retraso óptimo fue $T = 17$.

Para determinar el tiempo de retraso podemos usar la función de autocorrelación. Dadas dos funciones reales, f_1 y f_2 , la correlación entre ellas en el tiempo t e $t + T$ es dada por

$$\text{corr}(f_1, f_2)(T) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t + T)f_2(t)dt$$

FIGURA 2.1. Reconstrucción del atractor usando proyecciones con delay $d=1, 10, 17$ y 90

y la correlación de una función con ella misma, llamada de *autocorrelación*, es dada por

$$\text{corr}(f, f)(T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+T)f(t)dt$$

La función de autocorrelación define la inter relación de una misma señal en dos instantes de tiempo diferentes, t y $t+T$, y es una función de tiempo de comparación T . Una primera tentativa para el cálculo del tiempo de retraso es estimar desde la función de autocorrelación, la cual es dada para una serie discreta, x_1, \dots, x_N , por:

$$a(T) = \frac{1}{N+1} \sum_{t=0}^N x_t x_{t+T}$$

El tiempo de retraso óptimo será el primer tiempo donde la función de autocorrelación cae para cero o para $\frac{1}{e}$ [12]. El problema con la aplicación de la función de autocorrelación es que para series de tiempo caóticas podría llevar a falsos resultados, ya que es basado solamente en estadísticas lineales y no toma en cuenta las correlaciones no lineales. Otra alternativa fue dada por Fraser y Swinney [1]. Ellos proponen usar el primer mínimo de la información mutua entre x_t e x_{t+T} como el tiempo óptimo de retraso. La idea es que un tiempo de retraso adecuado tiene que ser lo suficientemente grande para que la información disponible en el tiempo $t+T$ sea significativamente diferente de la información en el tiempo t , pero, no demasiado para que dicha información no sea perdida. La información mutua entre x_t e x_{t+T} cuantifica la información que se tiene del estado x_{t+T} asumiendo que tenemos conocimiento del estado x_t . Para el cálculo de la información mutua de una serie temporal, $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, el primer paso es hallar el máximo, $x_{\max} = \max\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ y el mínimo $x_{\min} = \min\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ de los valores de la serie. Luego el valor $|x_{\max} - x_{\min}|$ es particionado en j intervalos del mismo tamaño. Finalmente es calculada la expresión

$$I(T) = \sum_{h=1}^j \sum_{k=1}^j P_{h,k}(T) \ln P_{h,k}(T) - 2 \sum_{h=1}^j P_h \ln P_h$$

Donde P_h y P_k denotan las probabilidades de que las variables asuman los valores en el h -ésimo e k -ésimo intervalo, respectivamente, y $P_{h,k}(T)$ es la probabilidad conjunta de que x_t se encuentre en el intervalo h y x_{t+T} se encuentre en el intervalo k . En la Figura (2.2(a)) la función de autocorrelación queda proximo de cero con T aproximadamente 70. El valor obtenido por la información mutua (2.2(b)) fue 17(el primer mínimo)

En la Figura (2.2 (a)) se muestra el cálculo del tiempo de retraso usando la función de autocorrelación y la información mutua. El primer mínimo local de $I(T)$ indica la mayor cantidad de información que podemos tener del estado x_t para poder determinar el estado x_{t+T} .

Para determinar la dimensión donde será realizada la reconstrucción de la dinámica, será usada la técnica de los falsos vecinos. La técnica de falsos vecinos fue introducido por Kennel et al. [10]. Ella es una herramienta eficiente para determinar la menor dimensión de inserción requerida. Por el teorema de Whitney y generalizaciones, sólo tenemos garantizado que, para una dimensión de reconstrucción adecuada, digamos m , se puede obtener

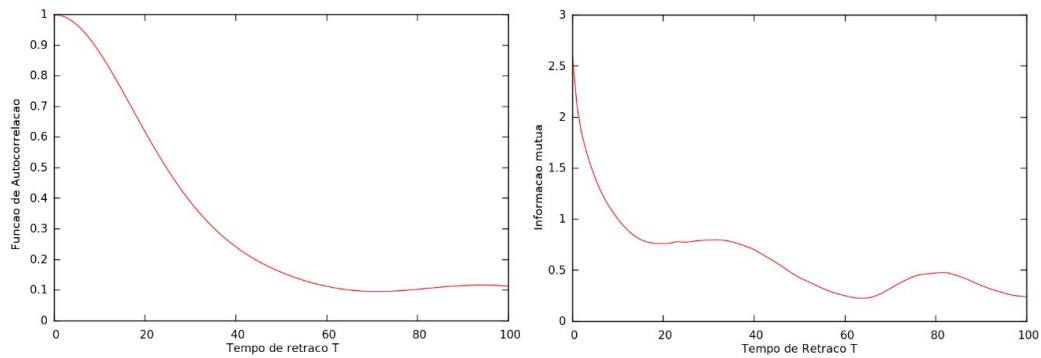


FIGURA 2.2. Cálculo del tiempo de retraso usando la función de autocorrelación y la información mutua

una copia fiel del atractor en \mathbb{R}^m . Sin embargo, en $n > m$ también obtendríamos una copia. En ese sentido el método de falsos vecinos puede servir como un procedimiento de optimización en la búsqueda de la dimensión, m , mínimo. La idea de los falsos vecinos es basado en la intuición geométrica siguiente: Observamos que la dimensión de un atractor expresa los grados de libertad que el necesita para “extenderse”. Así si la dimensión del espacio de inserción es menor que la dimensión del atractor, el no tendría los grados de libertad necesarios, quedando encogido. Luego, puntos aparentemente próximos son falsos vecinos. Aumentando la dimensión de inserción el atractor se desdobra y falsos vecinos dejan de ser vecinos. El algoritmo estima el valor de m donde la fracción de falsos vecinos es nulo. Para calcular la fracción de falsos vecinos, el siguiente algoritmo es usado: Dado un punto $X_t = (x_t, x_{t+\tau}, x_{t+2\tau}, \dots, x_{t+(m-1)\tau})$ en el espacio de reconstrucción m -dimensional, tenemos que encontrar un vecino X_i , tal que $\|X_i - X_t\| < \varepsilon$, donde ε es una constante pequeña. Entonces calculamos la distancia normalizada R_i entre las coordenadas, en \mathbb{R}^{m+1} , de los puntos X_i y X_p de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$(2.1) \quad R_i = \frac{|x_{i+m\tau} - x_{t+m\tau}|}{\|X_i - X_t\|}$$

Si R_i es mayor que un valor referencial dado, R_{tol} , entonces $p(t)$ es marcado como un punto que tiene falsos vecinos. La ecuación (2.1) se tiene que calcular para toda la serie y para varios $m = 1, 2, \dots$ hasta que la fracción de puntos para los cuales $R_i > R_{tol}$ sea despreciable. De acuerdo com Kennel et al. [10], $R_{tol} = 10$ es una buena elección para una cantidad considerable de series. Una prueba matemática formal aún es inexistente. Para la serie formada por las primeras componentes del sistema de Lorenz, obtenemos que el numero de falsos vecinos es casi cero cuando la dimensión de inserción es 3, Figura(3.1).

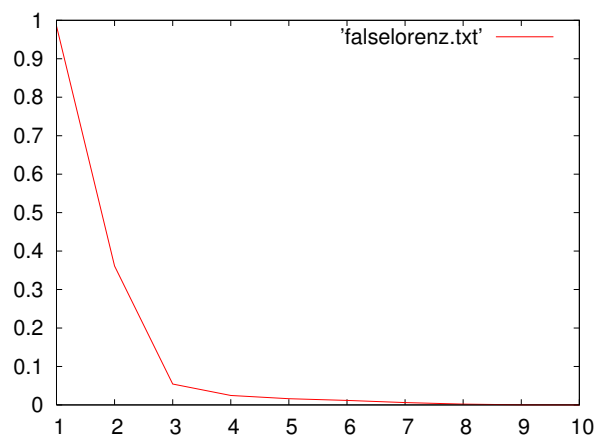


FIGURA 2.3. Dimensión de inserción para el atractor de Lorenz

El ejemplo muestra la eficiencia del algoritmo de los falsos vecinos para detectar la dimensión del espacio de reconstrucción. En nuestro caso, donde sólo tenemos una serie temporal, lo que se hace es estimar la dimensión de correlación en el espacio de reconstrucción y sobre el atractor proyectado. Usando las coordenadas de retraso obtendremos una serie de puntos X_1, X_2, \dots, X_N . Luego $C(r)$ es aproximado por $C(N, r)$, donde

$$C(N, r) = \langle M_x(r) \rangle = \frac{M_{x_1}(r) + M_{x_2}(r) + \dots + M_{x_N}(r)}{N}$$

y

$$M_{x_j}(r) = \frac{\{X_i : i \neq j \quad \|X_i - X_j\| \leq r\}}{N - 1}$$

$$= \frac{1}{N - 1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \theta(r - \|X_i - X_j\|)$$

donde θ es la función de Heaviside:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Reemplazando en la formula (1.3) obtenemos:

$$C(N, r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_{x_j}(r)$$

$$(2.2) \quad C(N, r) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j}^N \theta(r - \|X_i - X_j\|),$$

Un problema al momento de estimar la dimensión de correlación surge por *correlaciones temporales*. Por la continuidad del flujo, si consideramos tiempos próximos, sus respectivas posiciones en el espacio también. Este hecho no solamente es verdad para sistemas puramente determinístico, también lo es para muchos sistemas estocásticos. Theiler [18], mostró que aún en sistemas estocásticos de dimensión infinita la correlación temporal puede llevar para dimensiones de correlación finita.

Provenzale [13] proporcionó una solución al problema excluyendo los puntos que están próximos debido a correlaciones temporales. La ecuación (2.2) modificada ahora quedaría como:

$$C(N, r) = \frac{2}{(N+1-W)(N-W)} \sum_{n=W}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1-n} \theta(r - \|X_i - X_j\|)$$

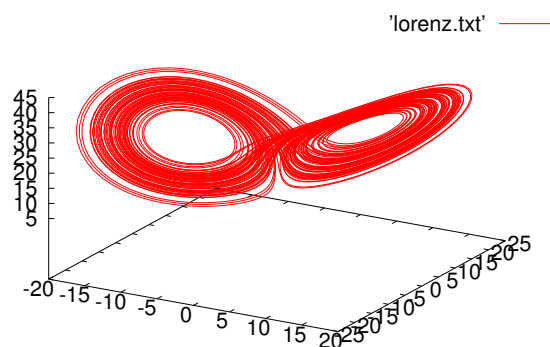


FIGURA 2.4. Sistema de Lorenz

Es interesante notar que las trayectorias recorren una región plana del espacio tridimensional, es decir, mismo siendo el sistema de Lorenz un sistema tridimensional, el atractor de las trayectorias es una región casi plana. Esto

es reflejado en el cálculo de la dimensión del atractor, ver figura(2.5). En la Figura (2.5) muestra el $\log(r)$ versus $\log(C(N, r))$ en el cálculo de la dimensión de correlación del atractor de Lorenz en diferentes dimensiones de inserción. Se observa que por la cantidad finita de datos la auto- semejanza es destruida en escalas muy pequeñas. En escalas no muy pequeñas ni muy grandes un verdadero exponente de escala puede ser encontrado y el es mas o menos el mismo para dimensiones mayores. En el caso del atractor de Lorenz el “planalto” es obtenido en la escala $0,3 < \log(r) < 1,0$. El valor estimado de la dimensión de correlación es 2,05. La estimación de la dimensión de

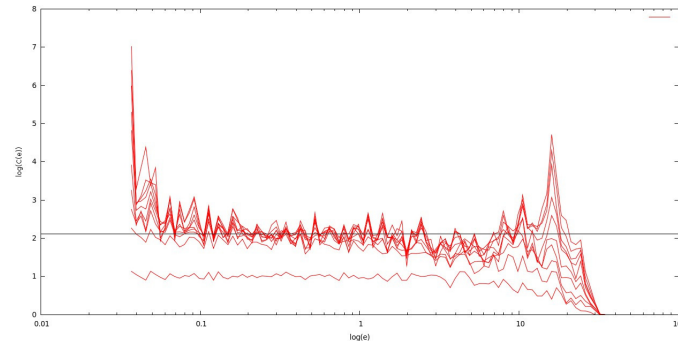


FIGURA 2.5. Dimensión de Correlación del atractor de Lorenz

correlación tiene que ser realizada de manera cuidadosa ya que correlaciones temporales pueden llevar a resultados erróneos [16]. Por otro lado, si la serie temporal estaría formada por números aleatorios(IID) y es proyectada, usando la técnica de las coordenadas de retraso, en diferentes \mathbb{R}^n , los vectores de retraso se van a dispersar de manera uniforme. Consecuentemente la dimensión de correlación aumenta con n , observe la Figura(2.6).

Autores como Theiler [18] y [19], Osborne y Provenzale [17], mostraron ejemplos de datos obtenidos de procesos estocásticos tales que sus respectivas sumas de correlación siguen una ley de potencia, llevando a dimensiones de correlación finitas e bajas. El problema en todos los casos fue la correlación temporal existente en los datos, problemas que fueron abordados en Provenzale, (2.3).

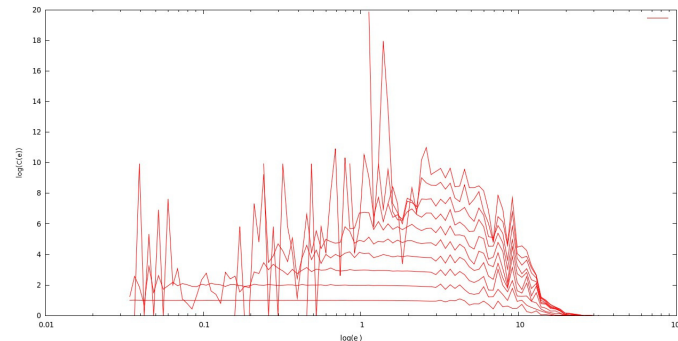


FIGURA 2.6. Dimensión de correlación de una serie de números aleatorios

Provenzale [13] propone rechazar aquellos puntos que presentan correlación temporal. Para ello se introduce los *gráficos de separación espacio-temporal*. La idea es la siguiente: En presencia de correlaciones temporales, la probabilidad de que un par de puntos tenga entre si una distancia inferior a r depende tanto del propio r como también del tiempo pasado entre as dos observaciones. Esa dependencia puede ser detectado generando un gráfico del número de pares próximos como una función de dos variables, el tiempo pasado δt y la distancia espacial r . Luego, para cada tiempo de separación se obtiene un histograma de distancias espaciales menores que r .

3. Aplicaciones. La primera série estudiada fue la série de precios de las acciones de la empresa minera Minsur, contando con los precios desde 13/10/1993 hasta 26/11/2014 siendo un total de 21 años de observaciones diarias y la segunda serie considerada fueron los precios de las acciones de la empresa TelfBC, desde 02/01/1992 hasta 26/11/2014.

3.1. Reconstrucción del atractor. En esta sección obtendremos los parámetros necesarios en la reconstrucción del atractor. La dimensión de inserción será estimada usando el algoritmo de falsos vecinos y el tiempo de retraso usando el algoritmo de información mutua. El tiempo de retraso en la reconstrucción de la dinámica de la serie de precios de MINSUR fue de 5 y de TelfBC de 9. En la Figura (3.1) muestra estos resultados.

La dimensión del espacio de reconstrucción es mostrado en la Figura (3.2). El porcentaje de falsos vecinos es casi cero, en ambos casos, cuando la dimensión es 12.

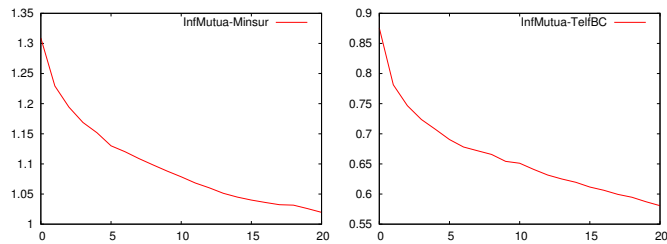


FIGURA 3.1. Información mutua de los precios de las acciones de MINSUR y TelfBC

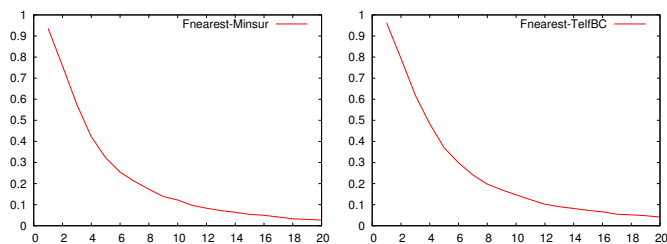


FIGURA 3.2. Porcentaje de falsos vecinos en la reconstrucción del espacio de fase para los precios de las acciones de MINSUR y TelfBC

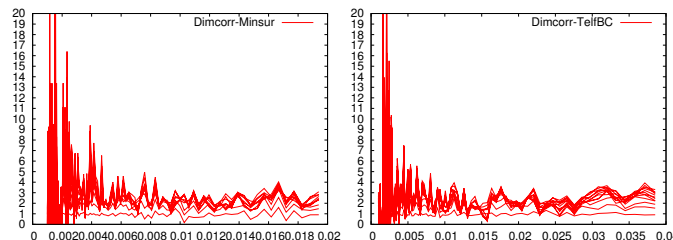


FIGURA 3.3. Evidencias de la existencia de un atractor Fractal en ambos casos, en la dinámica de los precios de las acciones de MINSUR y TelfBC. El valor estimado fue de 2.2

4. Conclusiones. Usando análisis no lineal y la teoría del caos aplicada en las series de precios de las acciones de la empresa minera MINSUR y TelfBC obtuvimos los siguientes resultados:

1. Los datos contienen dependencia no lineal.
2. Existe evidencia de la existencia de un atractor fractal.

Un trabajo a seguir, en la búsqueda de indicios de dinámica caótica, es la presencia de orbitas periódicas inestables, usando para ello, mapas de recurrencia o mapas de Poincaré.

5. Agradecimientos. Los autores agradecen al Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Trujillo, UNT, donde el presente trabajo fue desarrollado. También extendemos nuestro agradecimiento a la empresa ECONOMATICA [11] quien dispuso los datos en nuestro estudio.

Referencias

- [1] ANDRE M. FRASER, HARRY. L. SWINNEY(1986). Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A (General Physics)*, Volume 33, Issue 2, pp.1134-1140.
- [2] HOLGER KANTZ, THOMAS SCHREIBER, *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press 2004.
- [3] J.P. ECKAMANN, D.RUELLE, *Ergodic Theory of chaos and strange attractor*, *Reviews of Modern Physics*, vol 57 No 3, Part I, 1985.
- [4] TIM SAUER, JAMES A. YORKE, MARTIN CASDAGLI, *Embedology*. Springer Netherlands, *Journal of Statistical Physics*, Pages 579-616.
- [5] J.P. ECKMAN, D. RUELLE(1985). Ergodic theory of chaos and strange attractors. *The American Physical Society. Rev. Mod. Phys.* 57, 617-656
- [6] Floris Takens(1981). Detecting strange attractors in turbulence. Springer Berlin, *Book Series Lecture Notes in Mathematics*, Volume 898/1981, Pages 366-381.
- [7] TIM SAUER, JAMES A. YORKE, MARTIN CASDAGLI(1992). *Embedology*. Springer Netherlands, *Journal of Statistical Physics*, Pages 579-616.
- [8] Peter Grassberger, Itamar Procaccia(1982). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Volume 9, Issue 1-2, p. 189-208.
- [9] RAINER HEGGER, HOLGER KANTZ, AND THOMAS SCHREIBER(1999). Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package. *Chaos* 9, 413 (1999); doi:10.1063/1.166424.
- [10] MATTHEW B. KENNEL, REGGIE BROWN, HENRY D. I. ABARBANEL(1992). Determining embedding dimensions for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *The American Physical Society, Phys. Rev. A* 45
- [11] <https://economatrica.com/>

- [12] MICHAEL T. ROSENSTEIN, JAMES J. COLLINS, CARLO J. DE LUCA.(1993). A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena* Volume 65, Issues 1-2, Pages 117-134
- [13] PROVENZALE, A., SMITH, L. A., VIO, R., MURANTE G.(1992). Distinguishing between low-dimensional dynamics and randomness in measured time series. *Physica D*, 58, 31.
- [14] C. E. SHANNON(1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379-423 and 623-656.
- [15] THOMAS SCHREIBER, ANDREAS SCHMITZ(1999). Improved surrogate data for nonlinearity tests. *Phys. Rev. Lett.* 77, 635.
- [16] HOLGER KANTZ, THOMAS SCHREIBER(1997). *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press.
- [17] OSBORNE, A.R., PROVENZALE, A .(1989). Finite Correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra. *Physica D*, 35, 357.
- [18] JAMES THEILER(1986). Spurious dimension from algorithms applied to limited time-series data. *Physical Review A (General Physics)*, Volume 34, Issue 3, pp.2427-2432.
- [19] JAMES THEILER(1991). Some comments on the correlation dimension of $\frac{1}{f^\alpha}$ noise. *Physical. Lett A*, 155, 480.
- [20] W. A. BROOCK, J. A. SCHEINKMAN, W. D. DECHERT, B. LEBARON(1996). A test for independence based on the correlation dimension. *Journals in its journal Econometric Reviews*.Volume 15, Issue 3, Pages: 197-235.
- [21] WOLF, ALAN; SWIFT, JACK B.; SWINNEY, HARRY L.; VASTANO, JOHN A.(1984). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Volume 16, Issue 3, p. 285-317.
- [22] SCHEINKMAN, JOSE A.(1990). Nonlinearities in Economic Dynamics. *Royal Economic Society, Economic Journal*, Issue 400, Pages: 33-48.
- [23] DAVID A. HSIEH.(1991). Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets. *The Journal of Finance*, Vol. 46, No. 5 (Dec., 1991), pp. 1839-1877.
- [24] THOMAS WILLEY.(1992). Testing for nonlinear dependence in daily stock indices. *Journal of Economics and Business* Volume 44, Issue 1, Pages 63-76.
- [25] APOSTOLOS SERLETIS, PERIKLIS GOGAS.(1997). Chaos in East European black market exchange rates. *Research in Economics* Volume 51, Issue 4, Pages 359-385.
- [26] MICHAEL BASK.(1996). Dimensions and Lyapunov Exponents from Exchange Rate Series. *Chaos, Solirons and Fractals* Vol. 7, No. 12, pp. 2199-2214.