Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 02(02): 76 - 82 (2015)

Modelos y Métodos de Optimización Lineal con Incertidumbre: Una breve revisión del estado del arte.

Models and Methods of Linear Optimization with Uncertainty: A brief review of the state of the art.

Edith Malca Arroyo *, Edmundo Vergara Moreno †, Flabio Gutiérrez Segura ‡, and Rafael Asmat Uceda§

Received, Jul. 20, 2015 *Accepted, Nov. 15, 2015.*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2015.02.02

Resumen

En la modelación de muchos problemas de optimización lineal no es posible considerar el modelo clásico determinista, porque el conjunto de los parámetros no son completamente conocidos debido a que los datos varían en forma significativa a lo largo del tiempo o porque no hay homogeneidad en los valores. Estos problemas son conocidos como problemas con incertidumbre, para los cuales existen diversos enfoques en la modelación y en los métodos de solución. En este artículo se revisa tales enfoques, incidiendo fundamentalmente en la optimización estocástica, optimización difusa, optimización intervalar y optimización híbrida. La diferencia entre estos enfoques se perciben en la naturaleza de los datos, nociones de factibilidad y optimalidad, requerimientos computacionales, entre otros.

Palabras clave. Optimización, incertidumbre.

Abstract

In the modeling of many problems on linear optimization is not possible to consider the classic deterministic model because the set of parameters is not fully known due to the significant variation of the data along time or because there is no uniformity on the values. These kind of problems are known as problems with uncertainty and there are different approaches about modeling and methods of solution to resolve them. In this paper we make a review of such approaches focusing basically in stochastic optimization, fuzzy optimization, intervaling optimization and hybrid optimization. The difference between these approaches is perceived in the nature of the data, notions of feasibility and optimality and computational requirements, among others.

Keywords. Optimization, uncertainty.

1. Introducción. La Optimización es una herramienta de gran ayuda en el proceso de toma de decisiones, que permite escoger la mejor estrategia para alcanzar un objetivo. Para esto es necesario modelar como un problema de optimización el entorno en el que se produce esa toma de decisión.
De manera general, un modelo de optimización tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{rl} \text{Optimizar} & f(x) \\ \text{Sujeto a} & x \in S \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

donde $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la función objetivo y el conjunto factible S es definido por las restricciones impuestas al vector x. La optimización puede ser minimización o maximización.

*Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo-Perú ($emalcaa@unitru.edu.pe$).
†Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo-Perú ($evergara@unitru.edu.pe$).
‡Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Piura, Piura-Perú ($flabio@unp.edu.pe$).
§Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo-Perú ($rasmat@unitru.edu.pe$).

En la optimización lineal $f(x) = c^T x$ y $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$ donde c es un vector columna n-dimensional, A es una matriz mxn y b es un vector columna m-dimensional.

En la optimización clásica se asume que los parámetros que intervienen en el modelo (c, A, b) son conocidos con certeza; y por tanto para resolver se pude utilizar los métodos clásicos de optimización lineal, método simplex [6, 27, 35], métodos de puntos interiores [57, 67] , etc. Sin embargo, en diversas situaciones problemáticas de la vida real, estos parámetros no son conocidos con precisión, es decir, son parámetros imprecisos o inciertos. La incertidumbre puede presentarse debido a la carencia de datos fiables, errores de medida o porque representan información sobre el futuro. Un gran número de problemas sobre planificación de la producción y scheduling, transporte, finanzas y diseños de ingeniería requieren que las decisiones se tomen en presencia de incertidumbre de esta naturaleza.

En estos casos es común asumir que la incertidumbre puede ser representada por medidas de probabilidad o, según estudios más recientes mediante funciones de pertenencia propios de la teoría de conjuntos difusos. Sin embargo, no siempre cada representación es la más adecuada.

Una dificultad importante a considerar en la optimización bajo incertidumbre es cuando se trabaja con un espacio de incertidumbre muy grande lo cual, con frecuencia, conduce a modelos de optimización de gran escala.

A partir de los trabajos de Beale [7], Bellman [8], Bellman y Zadeh [9], Charnes y Cooper [25], Dantzig [28], y Tintner [75], la optimización bajo incertidumbre ha experimentado un rápido desarrollo tanto en lo referente a la teoría así como en algoritmos de solución. Pese a este avance, sigue vigente lo que Dantzig consideraba la planificación bajo incertidumbre como uno de los problemas abiertos más importantes en la optimización [29].

En este trabajo se revisan los principales enfoques para tratar la optimización con incertidumbre. Se hace una revisión del enfoque estocástico, las diferentes definiciones propuestas, sus modelos y se incluyen algunas referencias de artículos en donde se hace uso de este enfoque para la solución de diferentes tipos de problemas. Se revisa la optimización difusa, la optimización flexible y la optimización posibilística, incluyendo referencias de artículos que hacen estudios de este enfoque y también se revisa la optimización intervalar con sus respectivas referencias de principales artículos.

Finalmente se revisa la optimización híbrida, en la cual se incluyen los trabajos sobre optimización difusa-intervalar y artículos de optimización difusa-estocástica.

2. Material y Métodos.

2.1. Optimización Estocástica. La optimización estocástica trata problemas de Programación Matemática en cuya formulación aparece algún elemento aleatorio, es decir, mientras que en el caso determinístico todos los datos o parámetros que aparecen son números conocidos, en Programación Estocástica dichos parámetros (o parte de ellos) no se conocen con certeza.

La programación estocástica tiene su inicio con los trabajos de Dantzig [28] y Beale [7]. En esa misma década alcanzó con Markowitz [52] una aplicación muy destacada al problema de selección de carteras lo cual lo llevaría a la consecución del Premio Nobel. Prekopa [62] propone dos definiciones para Programación Estocástica:

Definición 1. *Es la ciencia que ofrece soluciones para problemas formulados en conexión con sistemas estocásticos, en los que el problema numérico resultante a resolver es un problema de Programación Matemática de tamaño no trivial.*

Definición 2. *Es una ciencia que trata problemas de Programación Matemática en los que algunos de los parámetros son variables aleatorias. Su metodología se basa en el estudio de las propiedades estadísticas del valor óptimo aleatorio o de otras variables aleatorias presentes en el problema o bién en la reformulación del problema a otro problema de decisión en el que se tiene en cuenta la distribución de probabilidad conjunta de los parámetros aleatorios.*

Básicamente existen dos tipos de modelos de programación estocástica:

Modelos “Esperar y Ver"(“wait and see") o modelos de programación estocástica pasiva. Estos modelos consisten en esperar la ocurrencia de un evento incierto (realización de variables aleatorias) para luego optimizar. Sin embargo en ocasiones puede ser de gran interés conocer la distribución de probabilidad del valor objetivo óptimo o algunos de sus momentos (valor esperado o varianza) antes de conocer la realización de sus variables aleatorias. Tales problemas se llaman problemas de distribución y se estudian en: [10, 54, 62].

Modelos “aquí y ahora"(“here and now") o modelos de programación estocástica activa basados en optimización inmediata en base a alguna medida de probabilidad [23].

Por otro lado Ermoliev and Wets [30] proponen dos esquemas de modelos de programación estocástica: Modelos Adaptativos y Modelos con Recursos. En los modelos adaptativos, los cuales usan distribuciones posteriores, se presenta dos casos: problemas de distribución y modelos anticipados. En los problemas de distribución se puede obtener la distribución de probabilidad o algunas características de las variables aleatorias tales como: la distribución de probabilidad del valor óptimo aleatorio o la solución optimal, para el caso de programas lineales aleatorios. En el caso de los modelos anticipados sólo se tienen las distribuciones apriori de los parámetros. En cada uno de estos modelos, la función objetivo inducida o el conjunto factible pueden estar definidos en términos de otras probabilidades o momentos de funciones de distribución tales como:

a) Modelos probabilísticos: Los cuales usan probabilidades.
b) Modelos basados en Momentos: Los cuales usan momentos.
c) Modelos Híbridos: que vienen a ser una combinación de restricciones probabilísticas con función objetivo basada en momentos.

En los modelos con recursos, las variables de decisión de un problema de optimización bajo incertidumbre se dividen en dos etapas. Las variables de la primera etapa son aquellas que tienen que ser decididas antes de la realización actual de los parámetros de incertidumbre, mientras que las variables de la segunda etapa se interpretan como medidas correctivas o de recursos, que surgen debido a una realización particular de la incertidumbre. El concepto de recurso ha sido aplicado a la programación lineal, no lineal y entera. Estudios de optimización estocástica se pueden encontrar en los siguientes artículos:

- “Optimization under uncertainty: state -of-the art and opportunities", [58]. En este artículo se revisa la teoría y metodología desarrollada para hacer frente a la complejidad de los problemas de optimización bajo incertidumbre.
- “Uncertain Programming: Optimization Theory in Uncertain Environments", [45]; en donde se proporciona una breve introducción a la programación con incertidumbre, incluyendo ideas de modelado híbrido, algoritmos inteligentes y aplicaciones en sistemas de decisión.
  Anteriormente se mencionó que los problemas de optimización estocástica son problemas de gran escala, por lo cual requieren de algún método de solución. Para este fin se puede consultar los siguientes artículos:
- “Optimización bajo incertidumbre, técnicas de descomposición y aplicación en GRID", [44]; en donde se revisan los conceptos de optimización estocástica y se presentan dos enfoques de solución: Descomposición de Banders y Relajación Lagrangeana, con aplicación a la coordinación hidrotérmica. También se puede consultar el artículo:
- “Stochastic programming approach to optimization under uncertainty", [72]. Aquí se plantea la solución de problemas de optimización estocástica mediante el Método de Montecarlo. Un método similar se encuentra en [42].

Se han desarrollado diversas aplicaciones de optimización estocástica, en las áreas de planeamiento de la producción [14], scheduling [12], localización [43], expansión de la capacidad [2], gestión de control y ambiente [13], telecomunicaciones [40], diseño y optimización de sistemas de procesos químicos [1], y finanzas [21]. Más recientes aplicaciones, destacan en la toma de decisión en emergencia a causa de inundaciones [34]; y en las decisiones de reemplazo en las empresas de manufactura [80].

Por otro lado, una clase importante de problemas de decisión y de optimización es el área de Scheduling, en donde se deben asignar recursos limitados a tareas que deben ser procesadas a lo largo del tiempo y bajo ciertas restricciones. En este caso los parámetros que intervienen en el problema son: tiempo de procesamiento, tiempos de preparación, fecha de iniciación o fecha de vencimiento; los cuales también presentan incertidumbre en algunos casos.

Por lo tanto, dichos parámetros son estudiados desde un enfoque estocástico ya que éstos se asumen como variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conocidas. Mayores detalles se puede consultar en [12, 17]; aquí los autores brindan un panorama general del enfoque estocástico para problemas de scheduling.

2.2. Optimización difusa. Así como la programación estocástica, la programación difusa también trata con problemas de optimización bajo incertidumbre. La principal diferencia entre los enfoques estocásticos y difusos es la forma de modelar la incertidumbre. En el caso de la programación estocástica, la incertidumbre se modela a través de funciones de probabilidad discretas o contínuas, mientras que en la progración difusa los parámetros imprecisos son considerados como números difusos; o la región factible es considerado como un conjunto difuso; consecuentemente se utiliza la teoría de los conjuntos difusos.

La región factible se considera un conjunto difuso, cuando en la formulación clásica mediante desigualdades, el decisor admite soluciones que incumplen con las resctricciones. Naturalmente, los incumplimientos son graduados hasta cierto nivel de tolerancia, mediante funciones de pertenencia, que en este contexto se denomina funciones de grado de incumplimiento, que el decisor establece.

Los distintos desarrollos de este enfoque difuso tienen sus orígenes en los trabajos de Bellman y Zadeh [9], pero este campo fue popularizado en 1991 por Zimmermann con la publicación de su libro Conjuntos Difusos y sus Aplicaciones [83].

En [58], se hace un breve estudio de dos tipos de programación difusa: programación flexible y programación posibilística. La diferencia fundamental entre ambas es que en los modelos de programación flexible, las funciones de pertenencia de los objetivos y las restricciones se basan y determinan por las preferencias subjetivas de los decisores. En contraste, la programación posibilística se basa en distribuciones de posibilidad las cuales se determinan objetivamente a partir de la información histórica [39].

Trabajos referentes a programación posibilística y flexible se pueden encontrar en los siguientes artículos:

- “Programación lineal Posibilística", [5]. Aquí el autor hace un estudio sobre un programa general de programación lineal posibilística en el que todos los parámetros así como las restricciones pueden ser difusos.

- “Possibilistic programming in production planning of assemble-to-order environments", [36]. En este trabajo, se propone un modelo de programación lineal posibilística para gestionar problemas de planificación de la producción. El modelo propuesto realiza ajustes de previsión, gestión de materiales, y de las actividades de producción.
- “The effectiveness of a fuzzy mathematical programming approach for supply chain production planning with fuzzy demand", [56]. Este trabajo usa el enfoque de la programación posibilística, lo cual hace posible modelar la incertidumbre epistémica de la demanda que podría presentarse en la planificación de la producción de la cadena de suministro.
- “Assessing the water requirements in refineries using possibilistic programming", [22]; en donde los autores aplican el enfoque de optimización difusa posibilística en el contexto de la conservación del agua en una industria petrolera.
- “MRP with flexible constraints: A fuzzy mathematical programming approach", [33]. Aquí se presenta el modelado de un sistema MRP utilizando programación flexible para solucionar modelos de programación difusa.
- “Despacho Económico ambiental con variables difusas y posibilísticas", [55]. Este artículo presenta la formulación del problema de despacho económico considerando criterios ambientales. Para considerar la incertidumbre relacionada con el conocimiento de los niveles de emisiones en las unidades de generación se hace uso de la teoría de los conjuntos difusos. El aspecto fundamental que lo diferencia de otros trabajos similares es el uso de una estructura interpretativa de los conjuntos difusos utilizados para representar tanto entidades difusas (flexibles) como entidades posibilísticas (inciertas), presentes en el problema de despacho económico.

Por otro lado Lai Hwang [41] y Verdegay [77] clasificaron los modelos de programación lineal difusa (PLD), en modelos con conjuntos factibles difusos (restricciones difusas), modelos con metas difusas, y modelos con coeficientes de la función objetivo difusos. Asimismo, para cada uno de los modelos mencionados existen métodos de solución que se diferencian en la forma de representación de los parámetros difusos o bien en el procedimiento mismo. Para el primer modelo; existen dos métodos: el propuesto por Tanaka, Okuda y Asai [4] y el segundo propuesto por Verdegay [78]. Para el siguiente modelo existen tres métodos: aproximación de Zimmermann [84], aproximación de Chanas [24] y aproximación de Werners [81]. Finalmente para el tercer modelo, tenemos los métodos de aproximación de Verdegay [76] , aproximación de Tanaka, Ichihashi y Asai [73], aproximación de Rommelfanger, Hanusheck y Wolf [65]. Revisiones de estas aproximaciones y aportes posteriores se encuentran en [18, 19, 26, 31, 48, 66].

Existen muchos trabajos, en donde se hace uso de las herramientas de la optimización difusa, entre las primeras recopilaciones se tiene [31, 66, 83], y el más reciente [48]. Entre los que no están incluidos en las recopilaciones anteriores o son recientes, destacan:

- “Métodos de optimización lineal difusa para la planificación nutricional en granjas avícolas", [79]. En este trabajo se desarrolla un software (SADIGA) (Sistema de Apoyo de Decisión en las Granjas Avícolas), el cual utiliza los modelos y métodos de la programación lineal difusa para resolver el problema de planificación de la nutrición en granjas avícolas en un ambiente impreciso en lo referente a precios de los insumos. Un trabajo similar ha sido desarrollado para una granja de ganado vacuno [61].
- “Un modelo para la Selección de carteras de proyectos con incertidumbre en los costes", [16]. En el cual se desarrolla un modelo de programación entera $0-1$ para seleccionar y planificar, simultáneamente, una cartera de proyectos, de entre un conjunto de propuestas iniciales.
- “Optimization Under Uncertainty: Methods and Applications in Radiation Therapy", [47]. En este trabajo los autores muestran como utilizar los métodos de optimización difusa para resolver problemas de planificación de radioterapia (RTP), a través del modelado de incertidumbres.
- “Application of fuzzy mathematical programming approach to the production allocation and distribution supply chain network problem", [11]. Este estudio propone un modelo de integración de la producción y planes de distribución en una red de cadena de suministros, con múltiples líneas de distribución, múltiples plantas y múltiples centros de distribución. Trabajo similar reciente se encuentra en [3].
- “Application of fuzzy optimization in energy saving", [15]. Este trabajo muestra el uso de herramientas de optimización difusa para solucionar problemas en los sistemas de almacenamiento y distribución de energía. Así mismo en [74] se aplica la optimización difusa en la transformación de residuos en energía .
- “Application of fuzzy optimization problem in fuzzy environment", [70] es la aplicación de tres métodos de optimización difusa en la solución de un problema medio-ambiental.

En el contexto de scheduling, también hay muchos trabajos donde se hace uso de las herramientas de optimización difusa. Para ello se pueden consultar los siguientes artículos: [32, 37, 53, 68, 71, 82].

2.3. Optimización Intervalar. En este enfoque se consideran problemas de optimización lineal en donde cada coeficiente de la función objetivo es un intervalo. Tales intervalos pueden ser obtenidos a través de datos históricos o con la ayuda de un experto. Una característica importante para los modelos con formulación intervalar, es que cualquier variación no muy significativa en los coeficientes de la función objetivo no afecta el conjunto de soluciones encontradas [49].

Trabajos referentes a optimización intervalar se puede encontrar en los siguientes artículos:

- "Interpretation of inequality constraints involving interval coefficients and a solution to interval linear programming", [69]. Este artículo define un problema de programación lineal intervalar como una extensión de problemas de programación lineal clásica en un ambiente con incertidumbre.
- "Multiple objective linear programming models with interval coefficients-an illustrated overview", [60]. Este artículo ofrece una visión ilustrada del estado del arte de la programación intervalar en el contexto de modelos de programación lineal con múltiples objetivos.
- "Optimización Global por intervalos: Aplicación a Problemas con Parámetros inciertos", [20]. Este artículo presenta la aplicación de una plataforma de software, que permite realizar la optimización global de criterios no lineales con restricciones utilizando el análisis por intervalos. El problema ha sido abordado considerando las variables del criterio a optimizar como intervalos, así como también los parámetros con incertidumbre.

Una aplicación interesante se ha realizado en la planificación del transporte urbano, de tal manera que minimice los costos generales y maximice la entropía. En la formulación se considera los costos como intervalos [50].

2.4. Optimización Híbrida. En esta sección se revisa formulaciones de problemas mediante la combinación de enfoques mencionados anteriormente. A continuación se muestran algunos artículos relacionados con la optimización híbrida, agrupadas de acuerdo a las combinaciones de enfoques:

2.4.1. Optimización Difusa-Intervalar. "An interval-parameter fuzzy nonlinear optimization model for stream water quality management under uncertainty", [63]. En este artículo se desarrolla un modelo de programación lineal difusa intervalar para la gestión de la calidad del agua en condiciones de incertidumbre. Los métodos de programación intervalar y difusa se integran dentro de un marco general para hacer frente a las incertidumbres en los lados izquierdos y derechos de las restricciones no lineales.

2.4.2. Optimización Difusa-Estocástica.

- "A Mathematical Model for a Flow Shop Scheduling Problem with Fuzzy Processing Times", [64]. En este artículo se presenta un modelo matemático para un problema de flow shop scheduling, donde el tiempo de procesamiento puede ser estimado con variables aleatorias o números difusos.
- "Optimization under hybrid uncertainty", [51]. Cuyo objetivo es describir un enfoque metodológico unificador para encontrar la solución a un problema matemático con presencia de datos difusos y variables aleatorias.

Para mayor información sobre optimización híbrida también se puede consultar: [38, 46, 59].

3. Conclusiones. Se a recogido diferentes enfoques referente al modelado de la optimización con incertidumbre. Cada uno de ellos abarcan la modelación así como el desarrollo de una variedad de algoritmos, los cuales se han utilizado en muchas áreas como: ingeniería, medicina, economía, entre otras.

En la optimización estocástica, las cantidades inexactas se manejan como variables aleatorias; en la teoría de los conjuntos difusos, como números difusos con funciones de pertenencia y en el análisis intervalar, como intervalos.

En el contexto de la optimización difusa, no se elimina la imprecisión, sino, más bien se plantea un método para su manejo; es decir no se pasa por alto la imprecisión del problema y, por el contrario, se las utiliza para generar soluciones.

Existen varios estudios y retos en el área de la optimización bajo incertidumbre, especialmente en lo que concierne a la teoría de scheduling. En este aspecto, existe buen número de trabajos con aplicaciones de las teorías de la optimización difusa a problemas de scheduling estáticos, pero aún no se conoce trabajos de modelación con incertidumbre en problemas de scheduling dinámicos.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido desarrollado dentro del marco del proyecto No. PIBA-2-P-069-14 financiado por INNOVATE PERÚ.

Referencias

[1] ACEVEDO, J., PISTIKOPOULOS, E. *Stochastic optimization based algorithms for process synthesis under uncertainty.*, Computers and Chemical Engineering, 22(1998), pp. 647-671.
[2] AHMED, S., KING, A., PARIJA, G. *A multi-stage stochastic integer programming approach for capacity expansion under uncertainty.* Mathematical Problems in Engineering, (2014), pp. 1-8.

[3] ARIAFAR, S., AHMED, S., CHOUDHURY I.A., BAKAR, M.A. *Application of Fuzzy to Production-Distribution Planning in Supply Chain Management.*, Journal of Global Optimization, 26 (2003), pp. 3-24.

[4] ASAI, K., ICHIHASHI H., TANAKA, H. *A formulation of fuzzy linear programing problems based on comparison of fuzzy number.* Control and Cybertec, 13 (1984), pp. 185-194.

[5] ARENAS, M., JIMÉNEZ, M., RODRIGUEZ, M. *Programación lineal posibilśtica.*, Revista de Dirección y Administración de Empresas; 1997.

[6] BAZARAA, M., JARVIS, J., SHERALI, H. *Linear Programming and Network Flows.* 4th Edition, Wiley, 2009.

[7] BEALE, E.M.L. *On Minimizing a Convex function Subject to linear inequalities.*, Journal of the Royal Statistical Society, 17B (1955), pp. 173-184.

[8] BELLMAN, R.E. *Dynamic programming.* Princeton University Press, Princeton, 1957.

[9] BELLMAN, R., ZADEH, L.A. *Decision-making in a fuzzy environmet*. Management Science, 17 (1970), pp. 141-161.

[10] BEREANU, B. *On The Generalized Distribution Problem of Stochastic Linear Programming*. Symposia Matematica, Academic Press,1976.

[11] BILGEN, B. *Application of fuzzy mathematical programming approach to the production allocation and distribution supply chain network problem*. Expert Systems with Applications, 37 (2010), pp. 4488-4495.

[12] BIRGE, J., DEMPSTERT, M. *Stochastic programming approaches to stochastic scheduling*. Journal of Global Optimization, 9 (3)(1996), pp. 417-451.

[13] BIRGE, J., ROSA, C. *Incorporating investment uncertainy into greenhouse policy models*. The Energy Journal, 17 (1996), pp. 79-90.

[14] BITRAN,G., HAAS, E., MATSUO, H. *Production planning of style goods with high setup costs and forecast revisions*. Operations Research, 34 (1986), pp. 226-236.

[15] BORGES DA SILVA, L., LAMBERT, G. *Application of fuzzy optimization in energy saving.*, Rev. Cienc. Exatas, Taubat, 1999-2002; vol. 5-8, pp. 21-35.

[16] CABALLERO, R., GOMEZ, T., PÉREZ, F. *Un modelo para la Selección de carteras de proyectos con incertidumbre en los costes.* Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA, 13 (2012), pp.149-153.

[17] CAI, X., WU, X., ZHOU, X. *Dynamically optimal polices for stochastic scheduling subject to preemptive repeat machine breakdowns.* IEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2 (2005), pp. 158-172.

[18] CADENAS, J.M., VERDEGAY, J.L. *Modelos de Optimización con Datos Imprecisos.* Servicios de publicaciones, Universidad de Murcia, 1999.

[19] CADENAS, J.M., VERDEGAY, J.L. *A primer on fuzzy optimization models and methods*. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 3 (1) (2006) pp.1-21.

[20] CAMPOS, P., VALDÉS-GONZÁLEZ, H.M. *Optimización Global por Intervalos: Aplicación a Problemas con Parámetros Inciertos*. Información Tecnológica, Vol. 17, 5 (2006), pp. 67-74.

[21] CARINO, D., ZIEMBA, W. *Formulation of the Russell-Yasuda Kasai financial planning model.* Operations Research, 46 (1998) pp. 433-449.

[22] CAROSI, C., PILIPOVIK, M.V., RIVEROL, C. *Assessing the water requirements in refineries using possibilistic programming.* Chemical Engineering and Processing, 45 (2006), pp. 533-537.

[23] CERDA,E., MORENO,J. *Prgramación Estocástica*. Departamento de Análsis Económico, Universidad de Murcia-España, 2004.

[24] CHANAS S. *The use of parametric programming in fuzzy linear programming*. Fuzzy Sets and System, 11, 1-3 (1983), pp. 243-251.

[25] CHARNES, A., COOPER, W.W. *Chance-constrained programming.* Management Science, 6 (1959), pp. 73-79.

[26] CRUZ, C., SILVA, R., VERDEGAY, J.L., YAMAKAMI, A. *A survey of fuzzy quadratick programming*. Recent Patents on Computer Science, 1 (3) (2008) pp.182-193.

[27] DANTZIG, G., THAPA, M. *Linear Programming 1: Introduction.* Springer Series in Operations Research, Springer, 1997.

[28] DANTZIG, G. *Linear programming under uncertainty.*, Management Science, 1 (1955), pp. 197-206.

[29] DANTZIG, G. *Planning under uncertainty.* Question and answer with George Dantzig. OR/MS Today, 26 (1999), pp.26-30.

[30] ERMOLIEV,Y., WETS, R.J. *Numerical Technique for Stochastic Optimization.* Springer-Verlag, New York; 1988.

[31] FEDRIZZI, M., KACPRZYK, J., ROUBENS, M. *Interactive Fuzzy Optimization.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, 1991.

[32] FORTEMPS, P. *Fuzzy sets in scheduling and planning.* European Journal of Operational Research, 147, 2 (2003), pp.229-230.

[33] GARCIA, J.P., MULA, J., POLER, R. *MRP with flexible constraints: A fuzzy mathematical programming approach.* Fuzzy Sets and Systems, 157 (2006), pp. 74-97.

[34] GARRIDO, R., LAMAS, P., PINO, F. *A stochastic programming approach for floods emergency logistics.* Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 75 (2015), pp. 18-31.

[35] GOBERNA, M.A., JORNET, V., PUENTE, R. *Optimización Lineal: Teoría, Métodos y Modelos*, McGraw Hill, 2004.

[36] HSU, H.M., WANG, W.P. *Possibilistic programming in production planning of assemble-to-order environments.* Fuzzy Sets and Systems, 119 (2001), pp.59-70.

[37] HSIEN-CHUNG WU. *Solving the fuzzy earliness and tardiness in scheduling problems by using genetic algorithms.* Expert Systems with Applications, 37 (2010), pp. 4860-4866.

[38] IMED KACEM, PIERRE BORNE, SLIM HAMMADI. *Pareto-optimality approach for flexible job-shop scheduling problems: hybridization oevolutionary algorithms and fuzzy logic*. Mathematics and Computers in Simulation, 60(2002), pp. 245-276.

[39] JAMISON, D., LODWICK,K., WELDON A. *Theoretical and semantic distinctions of fuzzy, possibilistic, and mixed fuzzy/possibilistic optimizations.* Fuzzy Sets and Systems, 158 (2007), pp. 1861 - 1872.

[40] LAGUNA, M. *Applying robust optimization to capacity expansion of one location in telecommunications with demand uncertainty.* Management Science , 44 (1998), pp. 101-110.

[41] LAI, Y., HWANG, C.L. *Interactive fuzzy linear programming.* Fuzzy Sets and Systems, 45 (1992) pp. 169-183.

[42] LEÖVEY, H., R.°MISCH, W. *Quasi-Monte Carlo methods for linear two-stage stochastic programming problems*. Mathematical Programming, 151, 1 (2015), pp.315-345.

[43] LAPORTE, G., LOUVEAUX, F., MERCURE, H. *A priori optimization of the probabilistic traveling salesman problem.* Operations Research, 42 (1994), pp.543-549.

[44] LATORRE, J.M., RAMOS, A., PALACIOS, R. *Optimización bajo incertidumbre, técnicas de descomposición y aplicación en GRID.* Anales de Mecánica y Electricidad, 2008, pp. 28-36.

[45] LIU, B. *Uncertain Programming: Optimization Theory in Uncertain Environments*. Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing 100084, China, 2004.

[46] LIU, B., KE, H. *Project scheduling problem with mixed uncertainty of randomness and fuzziness*. European Journal of Operational Research, 183 (2007), pp. 135-147.

[47] LOADWICK W., NEWMAN, F. *Optimization Under Uncertainty: Methods and Applications in Radiation Therapy.* University of Colo-

rado Health Sciences Center, 2001.

[48] LOADWICK W., KACPRZYK, J. *Fuzzy Optimization: Recent Advances and Applications*. Springer, Berlin, 2012.

[49] LÓPES H. *Solución de modelos de optimización lineal con coeficientes intervalares en la función objetivo por medio de programación multiobjetivo.* Boletín de Matemáticas Nueva Serie, Vol. XIV No. 1,(2007) pp. 14-29.

[50] LÓPEZ-OSPINA, H. *Modelo de maximización de la entropía y costos generalizados intervalares para la distribución de viajes urbanos*, Ingeniería y Universidad, 17 (2) (2013) pp.391-407.

[51] LUHANDJULA, M.K. *Optimisation under hybrid uncertainty*, Fuzzy Sets and Systems, 146 (2004), 187-203.

[52] MARKOWITZ, H. *On Porfolio Selection: Efficient Diversification of Investment.*, Cowles Commission Monograph, 16, John Wiley and Sons,1959.

[53] MASATOSHI, S., TETSUYA M. *An eficient genetic algorithm for job-shop scheduling problems with fuzzy processing time and fuzzy due date.* Computers and Industrial Engineering, 36 (1999), pp. 325-341.

[54] STANCU-MINASIAN, I.M. *Stochastic Programming with Multiple Objective Functions.*, D. Reidel Publishing Company, 1984.

[55] MUELA, E.R., SECUE, J.R. *Despacho Económico ambiental con variables difusas y posibilistas.*,XIII Feria Académico tercer encuentro regional iberoamericano de Cigré, 24 al 28 de mayo, 2009.

[56] MULA, J., PEIDRO, D., POLER, R. *The effectiveness of a fuzzy mathematical programming approach for supply chain production planning with fuzzy demand.* Int. J.Production Economics; 128 (2010), pp. 136-143.

[57] NEMIROVSKI, A., TODD, M. *Interior-point methods for optimization.*, Acta Numerica, (2008), pp. 191-234.

[58] NICOLAOS, V. *Optimization under uncertainty: state - of -the art and opportunities.* Computers and Chemical Engineering, 28 (2004) pp. 971-983.

[59] NGUYEN VAN HOP. *Solving linear programming problems under fuzziness and randomness environment using attainment values*, Fuzzy Sets and Information Sciences, 177 (2007), pp. 2971-2984.

[60] OLIVEIRA, C., ANTUNES, C.H. *Multiple objective linear programming models with interval coefficients - an illustrated overview.* European Journal of Operational Research, 181 (2007), pp.1434-1463.

[61] PELTA, D.A., VERDEGAY, J.L., CADENAS, J.M. *Introducing SACRA: A Decision support*. Applied Decision Support with Soft Computing 124 (2012) pp.391-401.

[62] PREKOPA, A. *Stochastic Programming.*, Kluwer Academic Publishers,1995.

[63] QIN, X.S., HUANG, G.H., ZENG, G.M. *An interval-parameter fuzzy nonlinear optimization model for stream water quality management under uncertainty*, European Journal of Operational Research, 180 (2007), pp. 1331-1357.

[64] RAZMI,J., SAFFARI,M., TAVAKKOLI, M. *A Mathematical Model for a Flow Shop Scheduling Problem with Fuzzy Processing Times*. Journal of Industrial Engineering, 3 (2009), pp.39-44.

[65] ROMMELFANGER, H., R. HANUSCHECK, J. WOLF. *Linear programming with fuzzy objectives*. Fuzzy Sets and Systems 29 (1989), pp. 31-48.

[66] ROMMELFANGER, H., R. SLOWINSKI. *Fuzzy sets in decision analysis, operations research and statistics*. The Handbook of Fuzzy Sets Series. Kluwer Academic Publishers, London, 1998.

[67] ROOS, C., TERLAKY, T., VIAL, J.P. *Interior Point Methods for Linear Optimization.*, 2nd Edition, Springer, 2005.

[68] SAMIR A. *Handling flexibility in a generalised job shop with a fuzzy approach.* European Journal of Operational Research, 147 (2003), pp. 312-333.

[69] SENGUPTA, A., PAL, T.K., CHAKRABORTY, D. *Interpretation of inequality constraints involving interval coefficients and a solution to interval linear programming.* Fuzzy Sets and Systems, 119, 1 (2001), pp. 129-138.

[70] SHIRIN S., KAMRUNNAHAR. *Application of fuzzy optimization problem in fuzzy environment*. Dhaka University Journal of Science, 62, 2 (2014), pp. 119-125.

[71] SELIM, H., TOPALOGLU, S. *Nurse scheduling using fuzzy modeling approach.* Fuzzy Sets and Systems, 161 (2010), pp. 1543-1563.

[72] SHAPIRO, A. *Stochastic programming approach to optimization under uncertainty.* Mathematical Programming, Serie B, 112 (2008), pp.183-220.

[73] TANAKA, H., H. ICHIHASHI Y K. ASAI. *A formulation of fuzzy linear programing problems basad on comparison of fuzzy numbers.* Control and Cybernetic, 13 (1984), pp. 185-194.

[74] TASKHIRI, M.S., BEHERA, S.K., TAN, R.R., PARK, H.S. *Fuzzy optimization of a waste-to-energy network system in an eco-industrial park*. J. Mater. Cycles Waste Manage. 17 (2015), pp. 476-489.

[75] TINTNER, G. *Stochastic linear programming with aplicattions to agricultural economics.* In H.A. Antosiewicz (Ed.), Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming, National Bureau of Standards. Washington, DC.,1955, pp. 197-228

[76] VERDEGAY, J.L. *A dual approach to solve the fuzzy linear programming problem.*, Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) pp. 131-141.

[77] VERDEGAY J.L. *Fuzzy optimization: models, methods and perspectives.*, 6th IFSA-95 World Congress. Sao Paulo, Brazil, (1995), pp. 39-71.

[78] VERDEGAY, J.L. *Fuzzy Mathematical programming.* En Gupta MM. Sánchez editors. Approximate Reasoning in Decision Analysis. Amsterdam- North-Holland, 1992.

[79] VERGARA, E., RODRÍGUEZ, F., SAAVEDRA, H. *Métodos de optimización lineal difusa para la planificación nutricional en granjas avícolas.* Mosaico Científico, vol. 3, (2006), pp. 16-29.

[80] WANG, K., ZHEN, L. *A stochastic programming model for multi-product oriented multi-chanel component replenishment.*, Computers & Operations Research, 60 (2015), pp.79-90.

[81] WERNERS, B. *An interactive fuzzy programming system.* Fuzzy Sets and System, 23 (1987), pp. 131-147.

[82] WOLFGANG S. *Scheduling as a fuzzy multiple criteria optimization problem.* Fuzzy Sets and Systems 78 (1996), pp. 197-222.

[83] ZIMMERMANN, H.J. *Fuzzy set theory and its application.*, (2nd ed.) Boston: Kluwer Academic Publishers,1991.

[84] ZIMMERMANN H.J. *Description and Optimization of fuzzy system.* International journal of general System, 2 (1976), pp.209-216.