Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 02(02): 115 - 118 (2015)

Minimización de Funciones Supermodulares.

Minimization of Supermodular Functions.

Nelson Aragonés Salazar *

Received, Jul. 20, 2015 *Accepted, Nov. 05, 2015.*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2015.02.05

Resumen

Se presentan tres principios de descarte para solucionar el problema de la minimización de una función supermodular definida en la familia de subconjuntos de un conjunto finito dado.

Palabras clave. Optimización combinatoria, función supermodular.

Abstract

In this paper we consider three principles of discard to find the minimum of a supermodular function which is defined on the family of subsets of a given finite set.

Keywords. Combinatorial optimization, supermodular function.

1. Introducción. Además del desarrollo de esquemas generales de programación discreta es sumamente importante la creación de métodos de solución para clases específicas de problemas. Uno de los avances más interesantes y originales en esta dirección lo conforman los trabajos de V.P. Cherenin y V.R. Jachaturov, en los que se desarrolla el "método de cálculos sucesivos"para encontrar el mínimo de una función supermodular definida en todos los subconjuntos de un conjunto finito dado [1], [2]. Es interesante indicar que el primer trabajo sobre este método y su aplicación en la solucón de un tipo de problema aplicado (formación del plan de formación de trenes) data de 1948.

El presente trabajo tiene por objetivo exponer tres principios de descarte que constituyen el fundamento matemático del método propuesto por Cherenin para resolver problemas de optimización combinatoria para funciones supermodulares.

2. Minimización de funciones supermodulares. Sea el conjunto finito $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ y f una función definida en $\Omega = 2^I$. La función f se denomina *supermodular* si para cualesquiera $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$

$$f(\omega_1) + f(\omega_2) \leq f(\omega_1 \cup \omega_2) + f(\omega_1 \cap \omega_2) \ . \tag{2.1}$$

Para la función supermodular f considérese el siguiente problema: Determinar $\alpha \in \Omega$ tal que

$$f(\alpha) = \min_{\omega \in \Omega} f(\omega).$$

Lema 1. *Sea f supermodular y $\omega_l \subset \omega_c \subset \omega_r$. Entonces existe $\delta \in \Omega$ tal que*

$$f(\delta) - f(\omega_l) + f(\omega_c) - f(\omega_r) \leq 0. \tag{2.2}$$

Prueba

* Nelson Omar Aragonés Salazar, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias F[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{Ã■}intopreamble]sicas y Matem[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{Ãą}intopreamble]ticas, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo s/n., Ciudad Universitaria, Trujillo-Per[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{Ãž}intopreamble] (naragones@unitru.edu.pe).

Definamos $\delta = \omega_l \cup (\omega_r \setminus \omega_c)$ y $\gamma = \omega_c$. Entonces $\delta \cup \gamma = \omega_r$ y $\delta \cap \gamma = \omega_l$. Por la supermodularidad de f se tiene

$$f(\delta) + f(\omega_c) \leq f(\omega_l) + f(\omega_r).$$

Teorema 1 (Primer principio de descarte (Cherenin)). *Sea f supermodular y para $\omega_1 \subset \omega_2$ se tenga que $f(\omega_1) < f(\omega_2)$, entonces $\omega_2 \not\subset \alpha$.*

Prueba

Sean $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \omega$. Por el Lema 1 existe $\delta \in \Omega$ tal que tiene lugar la desigualdad

$$f(\delta) - f(\omega_1) + f(\omega_2) - f(\omega) \leq 0,$$

de donde

$$f(\alpha) \leq f(\delta) < f(\delta) + f(\omega_2) - f(\omega_1) \leq f(\omega).$$

La propiedad de f establecida en este teorema permite descartar grupos enteros de variantes. En efecto, sea que para algunas ω_1 y ω_2 tales que $\omega_1 \subset \omega_2$ se conocen los valores $f(\omega_1)$ y $f(\omega_2)$. Entonces si $f(\omega_1) < f(\omega_2)$ se pueden descartar todas las $2^{m-|\omega_2|}$ variantes ω tales que $\omega_2 \subset \omega$ (el número de elementos que no se encuentran en ω_2 es $m - |\omega_2|$ por lo que el número de conjuntos que contienen a ω_2 es $2^{m-|\omega_2|}$).

Teorema 2 (Segundo principio de descarte (Cherenin)). *Sea f supermodular y para $\omega_1 \subset \omega_2$ se tenga que $f(\omega_1) > f(\omega_2)$, entonces $\alpha \not\subset \omega_1$.*

Prueba

Sean $\omega \subset \omega_1 \subset \omega_2$. Por el Lema 1 existe $\delta \in \Omega$ tal que tiene lugar la desigualdad

$$f(\delta) - f(\omega) + f(\omega_1) - f(\omega_2) \leq 0,$$

de donde

$$f(\alpha) \leq f(\delta) < f(\delta) + f(\omega_1) - f(\omega_2) \leq f(\omega).$$

La propiedad de f establecida en este teorema permite descartar grupos enteros de variantes. En efecto, sea que para algunas ω_1 y ω_2 tales que $\omega_1 \subset \omega_2$ se conocen los valores $f(\omega_1)$ y $f(\omega_2)$. Entonces si $f(\omega_1) > f(\omega_2)$, pueden descartarse todas las $2^{|\omega_1|}$ variantes ω tales que $\omega \subset \omega_1$ (el número de conjuntos contenidos en ω_1 es $2^{|\omega_1|}$).

Lema 2. *Sea f supermodular y $\omega_0 \subset \omega_r$. Para $\omega_l \subset \omega_c \subset \omega_r \setminus \omega_0$ tiene lugar la desigualdad*

$$f(\omega_0 \cup \omega_l) - f(\omega_0) \leq f(\omega_r \setminus (\omega_c \setminus \omega_l)) - f(\omega_r \setminus \omega_c). \tag{2.3}$$

Prueba

Considerando $\delta = \omega_0 \cup \omega_l$ y $\gamma = \omega_r \setminus \omega_c$ se tiene

$$\delta \cup \gamma = (\omega_0 \cup \omega_l) \cup (\omega_r \setminus \omega_c) = \omega_r \setminus (\omega_c \setminus \omega_l), \tag{2.4}$$

$$\delta \cap \gamma = (\omega_0 \cup \omega_l) \cap (\omega_r \setminus \omega_c) = \omega_0. \tag{2.5}$$

De donde

$$f(\omega_0 \cup \omega_l) + f(\omega_r \setminus \omega_c) \leq f(\omega_r \setminus (\omega_c \setminus \omega_l)) + f(\omega_0),$$

ó,

$$-[f(\omega_0) - f(\omega_0 \cup \omega_l)] \leq f(\omega_r \setminus (\omega_c \setminus \omega_l)) - f(\omega_r \setminus \omega_c).$$

Consideremos ahora el caso $\omega_1 \subset \omega \subset \omega_2$. Sea $\omega_1 \subset \alpha' \subset \omega_2$ tal que $f(\alpha') = \min_{\omega_1 \subset \omega \subset \omega_2} f(\omega)$.

Aplicando el lema (2) para $\omega_0 = \omega_1$, $\omega_r = \alpha'$, $\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} = \alpha' \setminus \omega_1$ y tomando consecutivamente los ω_l, ω_c como se indica en la Tabla (2).

$$\begin{gathered}
-(f(\omega_1) - f(\omega_1 \cup \{i_1\})) \leq f(\alpha') - f(\alpha' \setminus \{i_1\}), \\
-(f(\omega_1) - f(\omega_1 \cup \{i_2\})) \leq f(\alpha' \setminus \{i_1\}) - f(\alpha' \setminus \{i_1, i_2\}), \\
-(f(\omega_1) - f(\omega_1 \cup \{i_3\})) \leq f(\alpha' \setminus \{i_1, i_2\}) - f(\alpha' \setminus \{i_1, i_2, i_3\}), \\
\vdots \\
-(f(\omega_1) - f(\omega_1 \cup \{i_{q-1}\})) \leq f(\alpha' \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_{q-2}\}) - f(\omega_1 \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_{q-1}\}), \\
-(f(\omega_1) - f(\omega_1 \setminus \{i_q\})) \leq f(\alpha' \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_{q-1}\}) - f(\alpha' \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_q\}).
\end{gathered}$$

CUADRO 2.1
Valores de ω_l y ω_c

ω_l	ω_c
$\{i_1\}$	$\{i_1\}$
$\{i_2\}$	$\{i_1, i_2\}$
$\{i_3\}$	$\{i_1, i_2, i_3\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{i_q\}$	$\{i_1, i_2, \ldots, i_q\}$

Sumando término a término

$$-\sum_{i_k \in \alpha' \setminus \omega_1} [f(\omega_1) - f(\omega_1 \cup \{i_k\})] \leq f(\alpha') - f(\omega_1),$$

pues $\omega_1 = \alpha' \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_q\}$. Así,

$$f(\omega_1) - \sum_{i_k \in \alpha' \setminus \omega_1} [f(\omega_1) - f(\omega_1 \cup \{i_k\})] \leq f(\alpha').$$

Nótese que

$$f(\omega_1 \cup \{i_k\}) + f(\alpha' \setminus \{i_k\}) \leq f(\alpha') + f(\omega_1), \quad k = 1 \ldots q.$$

Es decir,

$$0 \leq f(\alpha' \setminus \{i_k\}) - f(\alpha') \leq f(\omega_1) - f(\omega_1 \cup \{i_k\}), \quad k = 1 \ldots q.$$

Definamos para $i \in \omega_2 \setminus \omega_1$

$$\Delta_1(i) = \begin{cases} f(\omega_1) - f(\omega_1 \cup \{i\}), & \text{si } f(\omega_1) - f(\omega_1 \cup \{i\}) \geq 0, \\ \qquad 0 \qquad\qquad\quad , & \text{si } f(\omega_1) - f(\omega_1 \cup \{i\}) < 0. \end{cases}$$

Entonces

$$L_1(\omega_1, \omega_2) := f(\omega_1) - \sum_{i \in \omega_2 \setminus \omega_1} \Delta_1(i) \leq f(\alpha').$$

Lema 3. *Sea f supermodular y $\omega_0 \subset \omega_r$. Para $\omega_l \subset \omega_c \subset \omega_r \setminus \omega_0$ tiene lugar la desigualdad*

$$f(\omega_0 \cup \omega_c) - f(\omega_r) \leq f(\omega_0 \cup (\omega_c \setminus \omega_l)) - f(\omega_r \setminus \omega_l). \tag{2.6}$$

Prueba
Considerando $\delta = \omega_0 \cup \omega_c$ y $\gamma = \omega_r \setminus \omega_l$ se tiene

$$\delta \cup \gamma = (\omega_0 \cup \omega_c) \cup (\omega_r \setminus \omega_l) = \omega_r, \tag{2.7}$$

$$\delta \cap \gamma = (\omega_0 \cup \omega_c) \cap (\omega_r \setminus \omega_l) = \omega_0 \cup (\omega_c \setminus \omega_l). \tag{2.8}$$

De donde

$$f(\omega_0 \cup \omega_c) + f(\omega_r \setminus \omega_l) \leq f(\omega_0 \cup (\omega_c \setminus \omega_l)) + f(\omega_r). \tag{2.9}$$

Aplicando el Lema (3) para $\omega_0 = \alpha'$, $\omega_r = \omega_2$, $\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} = \omega_2 \setminus \alpha'$ y tomando consecutivamente los ω_l, ω_c como se indica en la Tabla (2).
se tendrá $(-(f(\omega_r) - f(\omega_r \setminus \omega_l)) \leq f(\alpha' \cup (\omega_c \setminus \omega_l)) - f(\alpha' \cup \omega_c))$

$$\begin{aligned}
-(f(\omega_2) - f(\omega_2 \setminus \{i_1\})) &\leq f(\alpha') - f(\alpha' \cup \{i_1\}), \\
-(f(\omega_2) - f(\omega_2 \setminus \{i_2\})) &\leq f(\alpha' \cup \{i_1\}) - f(\alpha' \cup \{i_1, i_2\}), \\
-(f(\omega_2) - f(\omega_2 \setminus \{i_3\})) &\leq f(\alpha' \cup \{i_1, i_2\}) - f(\alpha' \cup \{i_1, i_2, i_3\}), \\
&\vdots \\
-(f(\omega_2) - f(\omega_2 \setminus \{i_{q-1}\})) &\leq f(\alpha' \cup \{i_1, i_2, \ldots, i_{q-2}\}) - f(\alpha' \cup \{i_1, i_2, \ldots, i_{q-1}\}), \\
-(f(\omega_2) - f(\omega_2 \setminus \{i_q\})) &\leq f(\alpha' \cup \{i_1, i_2, \ldots, i_{q-1}\}) - f(\alpha' \cup \{i_1, i_2, \ldots, i_q\}).
\end{aligned}$$

CUADRO 2.2
Valores de ω_l y ω_c

ω_l	ω_c
$\{i_1\}$	$\{i_1\}$
$\{i_2\}$	$\{i_1, i_2\}$
$\{i_3\}$	$\{i_1, i_2, i_3\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{i_q\}$	$\{i_1, i_2, \ldots, i_q\}$

Sumando término a término

$$-\sum_{i_k \in \omega_2 \setminus \alpha'} [f(\omega_2) - f(\omega_2 \setminus \{i_k\})] \leq f(\alpha') - f(\omega_2),$$

pues $\omega_2 = \alpha' \cup \{i_1, i_2, \ldots, i_q\}$. Así,

$$f(\omega_2) - \sum_{i_k \in \omega_2 \setminus \alpha'} [f(\omega_2) - f(\omega_2 \setminus \{i_k\})] \leq f(\alpha').$$

Nótese que

$$f(\alpha' \cup \{i_k\}) + f(\omega_2 \setminus \{i_k\}) \leq f(\alpha') + f(\omega_2), \quad k = 1 \ldots q.$$

Es decir,

$$0 \leq f(\alpha' \cup \{i_k\}) - f(\alpha') \leq f(\omega_2) - f(\omega_2 \setminus \{i_k\}), \quad k = 1 \ldots q.$$

Definamos para $i \in \omega_2 \setminus \omega_1$

$$\Delta_2(i) = \begin{cases} f(\omega_2) - f(\omega_2 \setminus \{i\}), & \text{si } f(\omega_2) - f(\omega_2 \setminus \{i\}) \geq 0, \\ \qquad 0 \qquad\qquad\quad , & \text{si } f(\omega_2) - f(\omega_2 \setminus \{i\}) < 0. \end{cases}$$

Entonces

$$L_2(\omega_1, \omega_2) := f(\omega_2) - \sum_{i \in \omega_2 \setminus \omega_1} \Delta_2(i) \leq f(\alpha').$$

Teorema 3 (Tercer principio de descarte (Jachatúrov)).
Sea f supermodular y para $\omega_1 \subset \omega_2$ se tenga que $L_1(\omega_1, \omega_2) > f(\widetilde{\alpha})$ ó $L_2(\omega_1, \omega_2) > f(\widetilde{\alpha})$ donde $\widetilde{\alpha}$ es la "mejor"variante conocida hasta un determinado momento, entonces se descartan todas las variantes ω tales que $\omega_1 \subset \omega \subset \omega_2$, pues $f(\omega) > f(\alpha)$.

Prueba
Sea $L_k(\omega_1, \omega_2) > f(\widetilde{\alpha})$, $(k = 1, 2)$ y ω tal que $\omega_1 \subset \omega \subset \omega_2$, entonces

$$f(\omega) \geq f(\alpha') \geq L_k(\omega_1, \omega_2) > f(\widetilde{\alpha}) \geq f(\alpha).$$

Así, se pueden descartar los ω tales que $\omega_1 \subset \omega \subset \omega_2$ es decir $2^{|\omega_2| - |\omega_1|}$.

3. Conclusiones. Si, por ejemplo, se consideran las variantes ω_1 y ω_2, para las cuales $|\omega_1| = 0$, $|\omega_2| = 1$ y $f(\omega_1) < f(\omega_2)$. Entonces pueden descartarse 2^{m-1} variantes, es decir, la mitad del número total de ellas. De la misma manera pueden aplicarse los otros dos métodos de dscarte para reducir de manera importante el espacio de búsqueda.

Por lo general el orden del volumen de selección basado en los principios de descarte expuestos no supera m^3, que es significativamente menor que el volumen de la selección completa 2^m, [2].

En los trabajos de Cherenin y Cherenin y Jachaturov se presentan las formulaciones de una serie de problemas aplicados que pueden ser exitosamente resueltos con el método de cálculos sucesivos basado en los principios de descarte expuestos. El más importante de estos problemas es el modelo de localización de empresas considerando el capital de inversión para su construcción así como los gastos de transporte, [1].

Referencias

[1] V. R. Jachatúrov, *Métodos matemáticos de programación regional*, Nauka, Moscú, Rusia. (1989).
[2] V. R. Jachatúrov, *Métodos Combinatorios y Algoritmos para la solución de problemas de optimización discreta de gran escala*, Nauka, Moscú, Rusia. (2000).