SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM
Vol. 02 (01): 54-67 (2015)
ISSN: 2411-1783 (versión electrónica)

CONSTRUCCIÓN DE UNA FUNCIÓN POLINÓMICA A PARTIR DE LOS PUNTOS FIJOS DADOS PREVIAMENTE

BUILDING A POLYNOMIAL FUNCTION FROM FIXED POINTS GIVEN PREVIOUSLY

FRANCO RUBIO LÓPEZ * and ORLANDO HERNÁNDEZ BRACAMONTE **

Received: *January 12, 2015* *Accepted:* *May 29, 2015*

Resumen

En este trabajo se muestra la construcción de una función polinomial de grado n:

$$f(x) = A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0 \,,$$

dando previamente un conjunto de n puntos $x_0 \,, x_1, \ldots, x_{n-1}$, los cuales serán puntos fijos de dicha función. Este estudio aborda el problema inverso en el caso polinomial; pues en el sentido clásico se tiene a priori una función; y de allí se hace el estudio sobre la existencia de puntos fijos. Además, se estudia el comportamiento de los puntos fijos a través del análisis de la estabilidad, a partir del uso de un parámetro.

Palabras Clave: Polinomios, punto fijo, estabilidad, atractor, repelente

Abstract

In this paper we show the construction of a polynomial function of degree n:

$$f(x) = A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0$$

given previously a set of n points $x_0 \,, x_1, \ldots, x_{n-1}$, which will be fixed points of the function. This study addresses the inverse problem in polynomial case; in the classical sense because it is a priori a function; and hence the study of the existence of fixed points is made. Furthermore the behavior of the fixed points is studied through the analysis of the stability from the use of a parameter.

Keywords: Polynomials, fixed point, stability, attractor, repellent

---

* Franco Rubio López, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n, Ciudad Universitaria, Trujillo-Perú (frubio@unitru.edu.pe)
** Orlando Hernández Bracamonte, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n, Ciudad Universitaria, Trujillo-Perú (ohernandez@unitru.edu.pe)

1. Introducción

El uso del concepto de "punto fijo" de una función tiene múltiples aplicaciones en diversas áreas del conocimiento; tanto en ciencias básicas como en ciencias aplicadas.
Existen en la naturaleza procesos que pueden ser descritos como procesos complejos o caóticos y procesos que son simples u ordenados [1]; para los cuales es necesario utilizar ciertos conceptos matemáticos para poder estudiarlos.
Así por ejemplo, los sistemas dinámicos continuos y discretos son una herramienta matemática, que permite a través de las ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencias, describir el comportamiento de muchos fenómenos que se dan en economía, biología, química, en el estudio de la variación de las poblaciones, etc [2,3].
El determinar los puntos fijos de estos sistemas, es de vital importancia; pues el comportamiento del sistema está en función de lo que ocurre alrededor de estos puntos fijos, en el caso que existan.
Otros fenómenos relacionados con procesos químicos como el intercambio de materia ó fenómenos climatológicos [4]; hacen uso de ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales; en los cuales es necesario en muchos casos conocer el comportamiento alrededor de puntos fijos.
En matemáticas el punto fijo tiene una variedad de aplicaciones, como en la solución de ecuaciones no lineales, optimización, ecuaciones diferenciales, etc. Problemas en el campo de los celulares autómatas [5], también utilizan el concepto de punto fijo.
En este trabajo se aborda el estudio del problema inverso en el caso polinomial; pues se da un conjunto de n puntos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$; y se construye un polinomio de grado n, el cual tendrá a los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ como puntos fijos.
Además, se hace un estudio sobre la naturaleza de dichos puntos fijos; a través del estudio de la estabilidad de dichos puntos fijos.

2. Caso Cuadrático

En esta sección se obtiene una función cuadrática $f: R \to R$ que tiene a los puntos

$x_0,\ x_1 \in R,\ x_0 \neq x_1$, como puntos fijos dados previamente.

Dados $x_0,\ x_1 \in R,\ x_0 \neq x_1$, hallar:

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C, \text{ tal que:}$$

$$f(x_0) = x_0\ ,$$

$$f(x_1) = x_1 \tag{1}$$

Así:

$$f(x) = Ax_0{}^2 + Bx_0 + C = x_0$$

$$f(x) = Ax_1{}^2 + Bx_1 + C = x_1 \tag{2}$$

Se observa en (2) que se necesita un punto adicional $(x_m\ ,\ y_m)$, tal que los puntos:

$(x_0\ ,\ x_0),\ (x_1\ ,\ x_1),\ (x_m\ ,\ y_m)$ sean no colineales; lo cual permitirá determinar $f(x)$.

Por tanto:

$$\begin{cases} A{x_0}^2 + Bx_0 + C = x_0 \\ A{x_1}^2 + Bx_1 + C = x_1 \\ A{x_m}^2 + Bx_m + C = y_m \end{cases} \tag{3}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_m^2 & x_m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_m \end{pmatrix}$$

donde la matriz

$$M = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_m^2 & x_m & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de Vandermonde.

Como los puntos x_0 , x_1 , x_m, son diferentes dos a dos, entonces la matriz de Vandermonde M es no singular; por tanto el sistema (3) tiene una única solución.

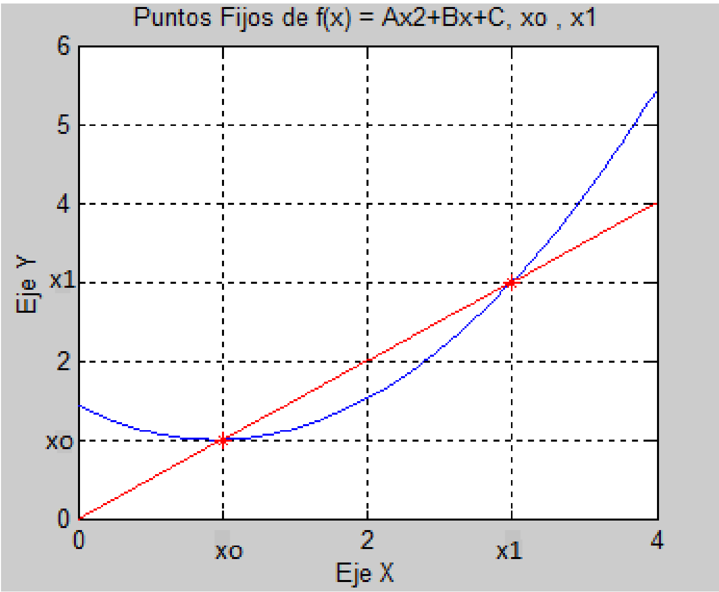

Fig. Nro. 1. Función cuadrática: puntos fijos xo y x1.

Teorema 2.1. Sean x_0 , $x_1 \in R$, $x_0 \neq x_1$. La función cuadrática $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, que tiene a x_0 , x_1 como puntos fijos, verifica:

$$A = \frac{y_m - x_m}{(x_m - x_1)(x_m - x_0)} \ , \tag{4}$$

$$B = \frac{y_m(x_0 + x_1) - x_0x_1 - x_m^2}{(x_1 - x_m)(x_m - x_0)} \ , \tag{5}$$

$$C = \frac{x_0x_1(y_m - x_m)}{(x_m - x_1)(x_m - x_0)} \ , \tag{6}$$

donde $(x_0\ ,\ x_0)$, $(x_1\ ,\ x_1)$, $(x_m\ ,\ y_m)$ son no colineales.

Prueba

De (3):

$$\begin{cases} Ax_0{}^2 + Bx_0 + C = x_0 \\ Ax_1{}^2 + Bx_1 + C = x_1 \\ Ax_m{}^2 + Bx_m + C = y_m \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_m^2 & x_m & 1 \end{pmatrix}$$

Como M es la matriz de Vandermonde, y como x_0 , x_1 , x_m , son diferentes dos a dos, se tiene:

$$\det(M) = (x_1 - x_m)(x_m - x_0)(x_1 - x_0). \tag{7}$$

Por tanto, usando la regla de Cramer:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & x_0 & 1 \\ x_1 & x_1 & 1 \\ y_m & x_m & 1 \end{vmatrix}}{\det(M)} = \frac{y_m - x_m}{(x_m - x_1)(x_m - x_0)}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_m^2 & y_m & 1 \end{vmatrix}}{\det(M)} = \frac{y_m(x_0 + x_1) - x_0x_1 - x_m^2}{(x_1 - x_m)(x_m - x_0)}$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & x_0 \\ x_1^2 & x_1 & x_1 \\ x_m^2 & x_m & y_m \end{vmatrix}}{\det(M)} = \frac{x_0x_1(y_m - x_m)}{(x_m - x_1)(x_m - x_0)}$$

□

3. Caso Cúbico.

Ahora, se obtendrá la función polinómica cúbica que tiene a los puntos $x_0, x_1, x_2 \in R$, $x_0 < x_1 < x_2$ como puntos fijos dados previamente.

Dados $x_0, x_1, x_2 \in R$, $x_0 < x_1 < x_2$, hallar: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, tal que:

$$\begin{cases} f(x_0) = x_0 \\ f(x_1) = x_1 \\ f(x_2) = x_2 \end{cases} \tag{8}$$

Luego:

$$\begin{cases} f(x_0) = Ax_0^3 + Bx_0^2 + Cx_0 + D = x_0 \\ f(x_1) = Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 + D = x_1 \\ f(x_2) = Ax_2^3 + Bx_2^2 + Cx_2 + D = x_2 \end{cases} \tag{9}$$

Análogo al caso cuadrático, se observa de (9), que se necesita un punto adicional

(x_m, y_m), tal que los puntos: (x_0, x_0), (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_m, y_m) sean no colineales.

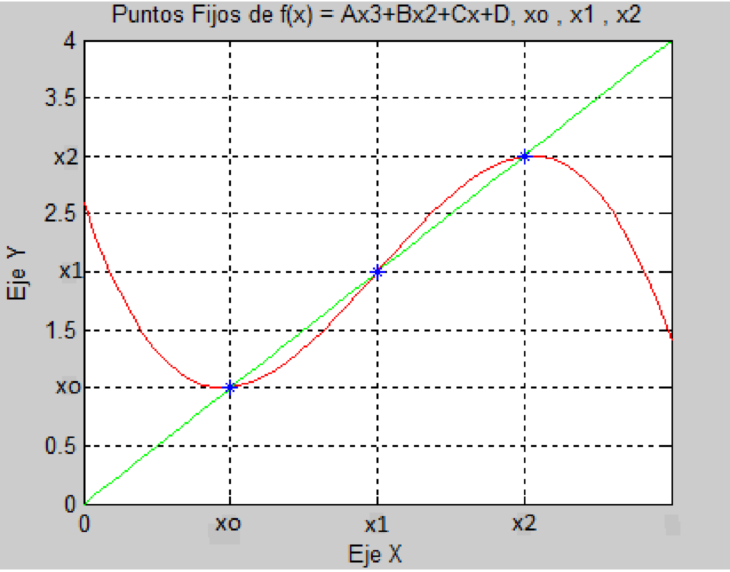

Fig. Nro. 2. Función Cúbica: puntos fijos xo , x1 y x2.

Por tanto, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} Ax_0^3 + Bx_0^2 + Cx_0 + D = x_0 \\ Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 + D = x_1 \\ Ax_2^3 + Bx_2^2 + Cx_2 + D = x_2 \\ Ax_m^3 + Bx_m^2 + Cx_m + D = y_m \end{cases} \tag{10}$$

donde:

$$M = \begin{pmatrix} x_0^3 & x_0^2 x_0 & 1 \\ x_1^3 & x_1^2\, x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 x_2 & 1 \\ x_m^3 x_m^2 x_m & 1 & \end{pmatrix}$$ es la matriz de Vandermonde.

Teorema 3.1. Sean $x_0\,,\, x_1\,,\, x_2\,,\;\; x_m\;\in\; R,\;\; x_i\;\neq\; x_j\,, \forall\, i,j = 0{,}1{,}2{,}m$. Entonces existe una función polinomial cúbica $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, tal que:

$$f(x_i) = \; x_i\,, \forall\, i,j = 0,1,2.$$

donde:

$$A = \;\frac{-(y_m - x_m)}{(x_0 - x_m)(x_1 - x_m)(x_2 - x_m)}$$

$$B = \;\frac{-(x_m - y_m)(x_0 + x_1 + \;x_2)}{(x_0 - x_m)(x_m - x_1)(x_m - x_2)}$$

$$C = \frac{-x_0\, x_1 x_2 + \;x_0\, x_1 y_m + x_0\, x_2 y_m - x_0 x_m^2 + \;x_1\, x_2 y_m - x_1 x_m^2 - x_2 x_m^2 + x_m^3}{(x_0 - x_m)(x_m - x_1)(x_m - x_2)}$$

$$D = \;\frac{-x_0\, x_1 x_2 (x_m - y_m)}{(x_0 - x_m)(x_m - x_1)(x_m - x_2)}$$

Prueba

De (10) se tiene:

$$\begin{cases} Ax_0^3 + Bx_0^2 + Cx_0 + D = \; x_0 \\ Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 + D = \; x_1 \\ Ax_2^3 + Bx_2^2 + Cx_2 + D = \; x_2 \\ Ax_m^3 + Bx_m^2 + Cx_m + D = \; y_m \end{cases}$$

Además:

$$\det(M) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_2) \qquad (11)$$

Como $x_i\;\neq\; x_j\,, \forall\, i,j = 0{,}1{,}2{,}m$, de (11) se tiene que $\det(M)\;\neq 0$; por tanto, el sistema (10) tiene una única solución.

Para resolver el sistema (10), usamos la regla de Cramer; para ello considerar las matrices:

$$MA = \begin{pmatrix} x_0 & x_0^2 x_0 & 1 \\ x_1 & x_1^2 x_1 & 1 \\ x_2 & x_2^2 x_2 & 1 \\ y_m x_m^2 x_m & 1 & \end{pmatrix}\;,\qquad MB = \begin{pmatrix} x_0^3 & x_0 x_0 & 1 \\ x_1^3 & x_1 x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2 x_2 & 1 \\ x_m^3 y_m x_m & 1 & \end{pmatrix}\;,$$

$$MC = \begin{pmatrix} x_0^3 & x_0^2 x_0 & 1 \\ x_1^3 & x_1^2 x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 x_2 & 1 \\ x_m^3 x_m^2 y_m & 1 & \end{pmatrix}\;,\qquad MD = \begin{pmatrix} x_0^3 & x_0^2 x_0 & x_0 \\ x_1^3 & x_1^2 x_1 & x_1 \\ x_2^3 & x_2^2 x_2 & x_2 \\ x_m^3 x_m^2 x_m y_m & & \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A = \frac{\det(MA)}{\det(M)} = \frac{-(y_m - x_m)}{(x_0 - x_m)(x_1 - x_m)(x_2 - x_m)}$$

$$B = \frac{\det(MB)}{\det(M)} = \frac{-(x_m - y_m)(x_0 + x_1 + x_2)}{(x_0 - x_m)(x_m - x_1)(x_m - x_2)}$$

$$C = \frac{\det(MC)}{\det(M)} = = \frac{-x_0\, x_1 x_2 + x_0\, x_1 y_m + x_0\, x_2 y_m - x_0 x_m^2 + x_1\, x_2 y_m - x_1 x_m^2 - x_2 x_m^2 + x_m^3}{(x_0 - x_m)(x_m - x_1)(x_m - x_2)}$$

$$D = \frac{\det(MD)}{\det(M)} = \frac{-x_0\, x_1 x_2 (x_m - y_m)}{(x_0 - x_m)(x_m - x_1)(x_m - x_2)}$$

□

4. Caso General

En general, dados $x_i \in R, \forall\, i = 0,1, \dots, n-1$, $x_i \neq x_j$, hallar una función polinómica$f: R \to R$, tal que tenga a x_i ,$\forall\, i = 0,1, \dots, n-1$, como puntos fijos dados previamente.

Dados $x_i \in R, \forall\, i = 0,1, \dots, n-1$, $x_i \neq x_j$, hallar:

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 \quad \text{, tal que}$$

$$f(x_i) = x_i\,, \quad \forall\, i = 0, 1, .., n-1.$$

Así:

$$\begin{cases} f(x_0) = A_n x_0^n + A_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + A_1 x_0 + A_0 = x_0 \\ f(x_1) = A_n x_1^n + A_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + A_1 x_1 + A_0 = x_1 \\ \dots \dots \qquad \dots \dots \qquad \dots \dots \qquad \dots \\ f(x_{n-1}) = A_n x_{n-1}^n + A_{n-1} x_{n-1}^{n-1} + \ldots + A_1 x_{n-1} + A_0 = x_{n-1} \end{cases} \tag{12}$$

De (12) se observa que se necesita un punto adicional $(x_m\,,\ y_m)$, tal que los puntos: $(x_0\,,\ x_0)$, $(x_1\,,\ x_1)$, $(x_2\,,\ x_2), \dots ,(x_{n-1}\,,\ y_{n-1}), (x_m\,,\ y_m)$ sean no colineales.

Por tanto, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} A_n x_0^n + A_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + A_1 x_0 + A_0 = x_0 \\ A_n x_1^n + A_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + A_1 x_1 + A_0 = x_1 \\ \dots \qquad \dots \dots \qquad \dots \dots \dots \qquad \dots \qquad .. \\ A_n x_{n-1}^n + A_{n-1} x_{n-1}^{n-1} + \ldots + A_1 x_{n-1} + A_0 = x_{n-1} \\ A_n x_m^n + A_{n-1} x_m^{n-1} + \ldots + A_1 x_m + A_0 = y_m \end{cases} \tag{13}$$

$$M = \begin{pmatrix} x_0^n\ x_0^{n-1} \dots & x_0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^n x_m^{n-1} \dots & x_m & 1 \end{pmatrix}$$

donde M es la matriz de Vandermonde. Además, se tiene:

$$\det(M) = \prod\nolimits_{0 \le i \le j \le n-1, m} (x_j - x_i) \tag{14}$$

Teorema 4.1. Sean x_i , x_m $\in$ R, $x_i \neq x_j$,$\forall$ $i, j = 0,1,2, \dots, n-1, m$. Entonces existe una función polinomial $f(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0$, tal que:

$$f(x_i) = x_i , \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Prueba

De (14) se tiene:

$$\det(M) = \prod_{0 \le i \le j \le n-1, m} (x_j - x_i)$$

Como $x_i \neq x_j$,$\forall$ $i, j = 0,1,2, \dots, n-1, m$, se tiene que $\det(M) \neq 0$; por tanto el sistema (13):

$$\begin{cases} A_n x_0^n + A_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + A_1 x_0 + A_0 = x_0 \\ A_n x_1^n + A_{n-1}x_1^{n-1} + \ldots + A_1 x_1 + A_0 = x_1 \\ \dots \qquad \dots\dots \qquad \dots\dots\dots \qquad \dots \qquad .. \\ A_n x_{n-1}^n + A_{n-1}x_{n-1}^{n-1} + \ldots + A_1 x_{n-1} + A_0 = x_{n-1} \\ A_n x_m^n + A_{n-1}x_m^{n-1} + \ldots + A_1 x_m + A_0 = y_m \end{cases}$$

tiene una única solución.

Ahora considerar las matrices:

$$M_i = \begin{pmatrix} x_0^n \dots x_0 & \dots & x_0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_m^n \dots y_m & \dots & x_m & 1 \end{pmatrix}, \forall\, i = 0,1, \dots, n-1,$$

donde la i-ésima columna esta formada por los términos independientes. Usando la regla de Cramer, los coeficientes están dados por:

$$A_i = \frac{\det(M_i)}{\det(M)} \quad , \ \forall\, i = 0,1, \dots, n-1 \tag{15}$$

$\square$

5. Estabilidad

En esta sección se estudiará criterios para la Estabilidad de los puntos fijos en el caso de un polinomio de segundo grado.

Teorema 5.1. Sean $x_0, x_1 \in R,\ x_0 \neq x_1, x_0 < x_1,\ f(x) = Ax^2 + Bx + C$, la función tal que $f(x_i) = x_i$, $\forall\, i = 0{,}1$. Si $x_m = x_0 - \in,\ y_m = x_0,\ \in > 0$ pequeño, entonces:

a) x_0 es un punto fijo Atractor.

b) x_1 es un punto fijo Repelente.

Además:

$$0 < f'(x_0) = 2Ax_0 + B < 1.$$

Prueba

Se tiene la función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Completando cuadrados:

$$f(x) = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) = A(x + \frac{B}{2A})^2 + C - \frac{B^2}{4A} \qquad (16)$$

Como $f(x)$ es una parábola, entonces de (16), el vértice $V = (x_v, y_v)$, esta dado por:

$$V = (x_v, y_v) = (\frac{-B}{2A}, C - \frac{B^2}{4A}) \qquad (17)$$

Usando (4), (5) y (6), se obtiene:

$$A = \frac{-1}{x_0 - x_1 - \in} \qquad (18)$$

$$B = \frac{-2x_0 + \in}{x_1 - x_0 + \in} \qquad (19)$$

De (18) y (19):

$$x_v = x_0 - \frac{\in}{2} \qquad (20)$$

$$y_v = x_0 - \frac{\in^2}{4(x_1 - x_0 + \in)} \qquad (21)$$

Por tanto:

$$f'(x_v) = 0 \text{ , y } \quad f'(x_0) > 0 \quad y\ f'(x_0) < 1.$$

Como $A = \frac{-1}{x_0 - x_1 - \in} = \frac{1}{x_1 - x_0 + \in}$, y además $x_0 < x_1$, se concluye que A > 0.

Entonces $0 < f'(x_0) = 2A\, x_0 + B < 1$.

Por tanto, x_0 es un punto fijo Atractor.

Se sigue que $f'(x_1) > 1$; lo cual implica quex_1 es un punto fijo Repelente.

□

Teorema 5.2. Sean $x_0, x_1 \in R$, $x_0 \neq x_1, x_0 < x_1$, $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, la función tal que $f(x_i) = x_i$, $\forall\, i = 0{,}1$. Si $x_m = x_0 + \in$, $y_m = x_0$, $\in > 0$ pequeño, entonces:

a) x_0 es un punto fijo Atractor.

b) x_1 es un punto fijo Repelente.

Además: $-1 < f'(x_0) = 2Ax_0 + B < 0$.

Prueba

Usando (17), el vértice de la parábola $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, es:

$$V = (x_v, y_v) = (\frac{-B}{2A}, C - \frac{B^2}{4A}).$$

Como $x_m = x_0 + \in$, $y_m = x_0$, $\in > 0$, procediendo en forma análoga al teorema (5.1), se tiene:

$$A = \frac{1}{x_1 - x_0 - \in} > 0\ , \tag{22}$$

$$B = \frac{-2x_0 - \in}{x_1 - x_0 - \in} \tag{23}$$

De (22) y (23):

$$x_v = x_0 + \frac{\in}{2}\ , \qquad y_v = x_0 - \frac{\in^2}{4(x_1 - x_0 - \in)}$$

Como $f'(x_v) = 0$, se tiene que $f'(x_0) < 0$. Para $\in > 0$ suficientemente pequeño:

$-1 < f'(x_0) < 0$. Por tanto, x_0 es un punto fijo Atractor.

Se sigue que $f'(x_1) > 1$; lo cual implica que x_1 es un punto fijo Repelente.

□

Teorema 5.3. Sean $x_0, x_1 \in R$, $x_0 \neq x_1, x_0 < x_1$, $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, la función tal que $f(x_i) = x_i$, $\forall\, i = 0{,}1$. Si $x_m = x_1 - \in$, $y_m = x_1$, $\in > 0$ pequeño, entonces:

a) x_0 es un punto fijo Repelente.

b) x_1 es un punto fijo Atractor.

Además: $-1 < f'(x_1) = 2Ax_1 + B < 0$.

Prueba

De (17) $x_v = \frac{-B}{2A}$, luego:

$$A = \frac{-1}{x_1 - x_0 - \in} \tag{24}$$

Como $x_0 < x_1$, entonces $x_1 - x_0 - \in > 0\ , para\ \in$ pequeño; así A < 0.

Además:

$$B = \frac{-2x_1 - \in}{x_1 - x_0 - \in} \tag{25}$$

De (24) y (25):

$$x_v = x_1 - \frac{\epsilon}{2} \tag{26}$$

$$y_v = x_1 + \frac{\epsilon^2}{4(x_1 - x_0 - \epsilon)} \tag{27}$$

Como $f'(x_v) = 0$, y por (26) y (27) se tiene $f'(x_1) < 0$. Por tanto, x_1 es un punto fijo Atractor, y x_0 es un punto fijo Repelente. □

Teorema 5.4. Sean $x_0, x_1 \in R$, $x_0 \neq x_1, x_0 < x_1$, $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, la función tal que $f(x_i) = x_i$, $\forall\, i = 0{,}1$. Si $x_m = x_1 + \epsilon$, $y_m = x_1$, $\epsilon > 0$ pequeño, entonces:

a) x_0 es un punto fijo Repelente.

b)x_1 es un punto fijo Atractor.

Además: $0 < f'(x_1) = 2Ax_1 + B < 1$.

Prueba

De (17) se tiene: $x_v = x_1 + \frac{\epsilon}{2}$, $y_v = x_1 + \frac{\epsilon^2}{4(x_1 - x_0 + \epsilon)}$

Como $f'(x_v) = 0$, entonces $0 < f'(x_1) = 2Ax_1 + B < 1$.

Por tanto, x_1 es un punto fijo Atractor, y x_0 es un punto fijo Repelente. □

6. Ejemplos

6.1. Dados $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ y $\epsilon = 0.1$, hallar $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, tal que

$f(1) = 1$, $f(3) = 3$, y que $x_0 = 1$ sea un punto fijo Atractor.

a) Usando el teorema 5.1, se obtuvieron los siguientes resultados.

COEFICIENTES		
A	**B**	**C**
0.4762	-0.9048	1.4286

	x_i	$f'(x_i)$	**Punto Fijo**
x_0	1	0.0476	Atractor
x_1	3	1.9524	Repelente

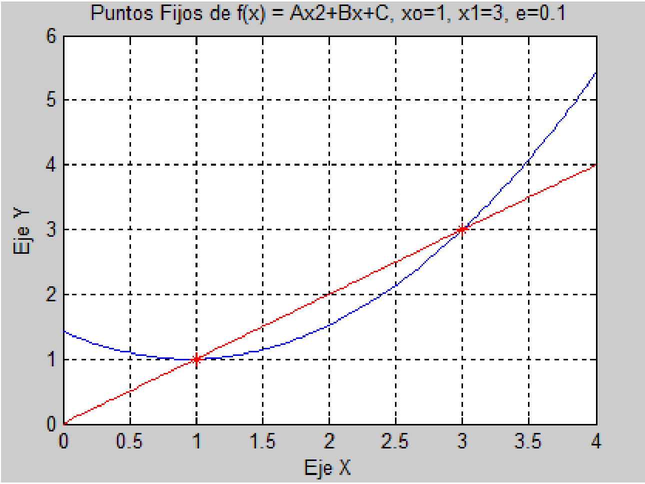

Fig. Nro 3. El vértice se ubica a la izquierda de x0=1.

b) Usando el teorema 5.2, se obtuvieron los siguientes resultados.

COEFICIENTES		
A	**B**	**C**
0.5263	-1.1053	1.5789

	x_i	$f'(x_i)$	**Punto Fijo**
x_0	1	-0.0526	Atractor
x_1	3	2.0526	Repelente

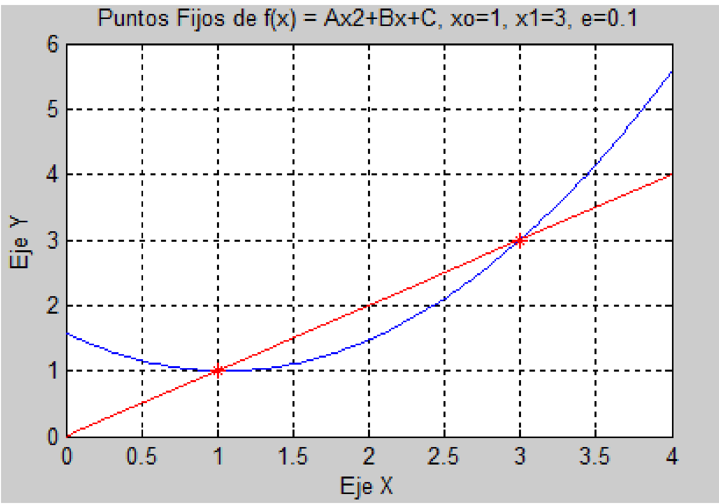

Fig. Nro 4. El vértice se ubica a la derecha de x0=1.

6.2. Dados $x_0 = 1,\ x_1 = 3\ y\ \ \in =\ 0.1$, hallar $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, tal que $f(1) =\ 1\ ,\ f(3) =\ 3$, y que $x_1 = 3$ sea un punto fijo Atractor.

a) Usando el teorema 5.3, se obtuvieron los siguientes resultados.

COEFICIENTES		
A	**B**	**C**
-0.5263	3.1053	-1.5789

	x_i	$f'(x_i)$	**Punto Fijo**
x_0	1	2.0526	Repelente
x_1	3	-0.0526	Atractor

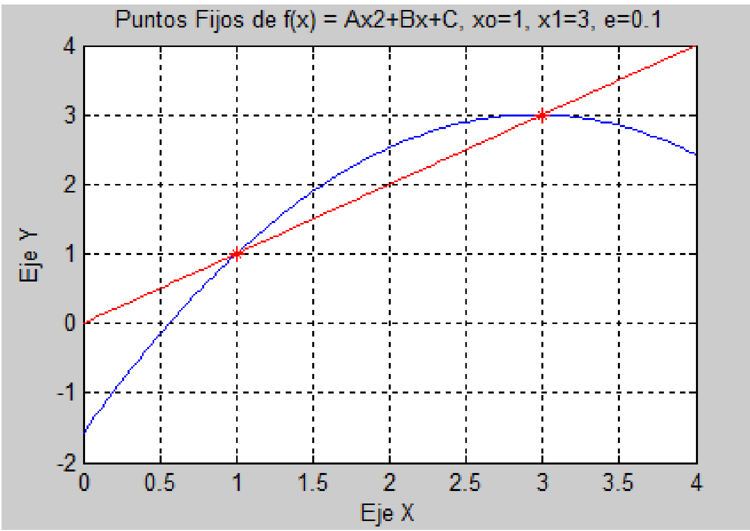

Fig. Nro 5. El vértice se ubica a la izquierda de x1=3.

b) Usando el teorema 5.4, se obtuvieron los siguientes resultados.

COEFICIENTES		
A	**B**	**C**
-0.4762	2.9048	-1.4286

	x_i	$f'(x_i)$	**Punto Fijo**
x_0	1	1.9524	Repelente
x_1	3	0.0476	Atractor

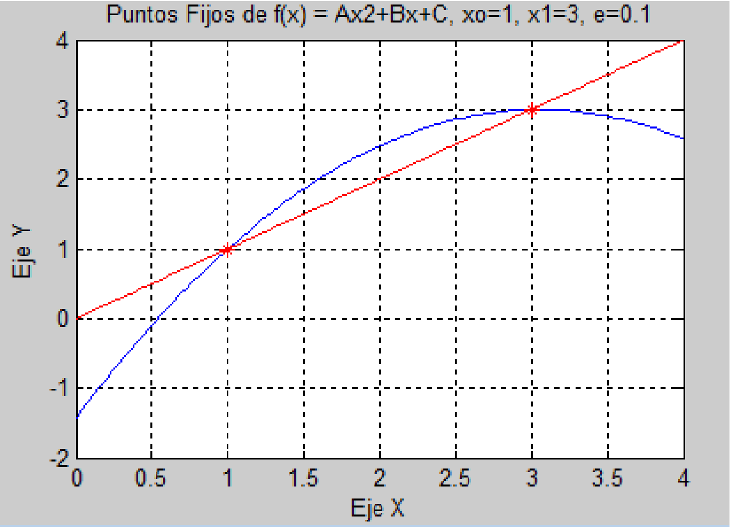

Fig. Nro 6. El vértice se ubica a la derecha de x1=3.

6. Referencias

[1] Feirgenbaum, Mitchel J. *Universal Behavior in Nonlinear Systems*. The Alamos Science, summer 1980.
[2] R. M. May, *Biological populations with non-overlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos*. *Science*, vol. 186, no. 4164, pp. 645–647, 1974.
[3] R.M.May, *Simple mathematical model swith very complicated dynamics*. *Nature*, vol. 261, Nro. 5560, pp. 459–467.1976.
[4] Edward Lorenz. *The problem of deducing the climate from the governing equations*. En: Tellus 16 (1964), pp. 1-11.
[5] Joel L. Schi. *Cellular Automata: A Discrete View of the World*. Wiley & Sons, 2008.