



SELECCIONES MATEMÁTICAS

Universidad Nacional de Trujillo

ISSN: 2411-1783 (Online)

Vol. 02(01): 32 - 45 (2015)



Sobre la Existencia de soluciones para un modelo de precipitaciones atmosféricas.

On the Existence of solutions for a model of atmospheric precipitations.

Obidio Rubio ^{*}, Juana Zavaleta[†], and Alexis Carranza[‡]

Received, Mar. 15, 2015

Accepted, Jun. 15, 2015.

DOI: <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2015.01.04>

Resumen

En este artículo se hizo el estudio sobre la existencia de soluciones del modelo matemático de precipitaciones atmosféricas, conformado por un sistema de ecuaciones generadas por las leyes de conservación de movimiento y del transporte de masa. Las precipitaciones en estado sólido y/o líquido son interpretadas por la ecuación de transporte. Finalmente se presenta algunas simulaciones de precipitaciones para la región del norte del Perú, utilizando la aplicación Brazilian Regional Atmospheric Modeling System-BRAMS.

Palabras clave. Climatología atmosférica, precipitaciones pluviales, formulación variacional, espacios de Sobolev, simulación numérica, BRAMS.

Abstract

In this paper it was studied on the existence of solutions of mathematical model of atmospheric rainfall, which is a system of equations from conservation of quantity of motion and mass transport. The precipitations at solid/liquid are described for the transport equation. Finally, we present some simulations of atmospheric rainfall for region of North of Perú with the Brazilian Regional Atmospheric System-BRAMS.

Keywords. Atmospheric weather, rainfall, variational formulation, Sobolev spaces, numerical simulations, BRAMS.

1. Introducción. En la climatología y la predicción del tiempo atmosférico es importante describir los procesos atmosférico de la superficie terrestre y oceánica, se usa las la variable de precipitación pluviales juega un papel destacado. (Pielke, [10]; White, [16]; Chorin, [3]).

Para describir el fenómeno de las precipitaciones se consideran las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, conservación de masa y ecuación de conservación de agua, para fluidos incompresibles.

Asumiendo que el fluido ocupa una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con frontera $\partial\Omega$ del tipo Lipschitz y $t > 0$. Además sea $u(x, t)$ es la velocidad del viento, $p(x, t)$ es la presión atmosférica y $q_n(x, t)$ la precipitación, se tiene:

^{*}Obidio Rubio, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo-Perú (orubio@unitru.edu.pe).

[†]Universidad Nacional del Altiplano (juana@hotmail.com).

[‡] Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo-Perú.

$$(P) \begin{cases} \text{Hallar: } u(x, t), p(x, t) \text{ y } q_n(x, t) \text{ tal que :} \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \nabla p + 2\vec{w} \times \vec{u} = f, & \forall x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0, & \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial q_n}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla q_n - c_{q_n} \Delta q_n = S_{q_n}, & \forall x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ q_n(x, 0) = q_0(x) & x \in \Omega \\ u(x, t) = q_n(x, t) = 0 & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \end{cases}$$

El problema consta de las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas con la ecuación para la precipitación con variable $q_n(x, t)$; donde $n = 1, 2$ representa el estado líquido $n = 1$ o el estado sólido $n = 2$.

Para el estudio teórico se considera una condición inicial suficientemente buena y condiciones de Dirichlet homogéneas (Zdunkowski, Kshudiram, [8, 17]).

El objetivo central, es demostrar la existencia de soluciones generalizadas en espacios funcionales tomando como base los estudios realizados para las ecuaciones de Navier-Stokes, por Temam, Rubio [12, 14, 15] y otros.

2. Formulación Variacional del Problema. Sean las notaciones formales, $g = (u, q) := (\vec{u}, q_n)$

$$(2.1) \quad F = (f, S_q), \quad Lg = (j \times u, 0) = \begin{pmatrix} u_3 \\ 0 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2.2) \quad B(g, g) = (B(u, u), B(u, q)) = ((u \cdot \nabla)u, (u \cdot \nabla)q),$$

$$K = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & c_q \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad KAg = K(-\Delta u, -\Delta q)$$

El problema (P) se pueden escribir en forma compacta de la siguiente manera:

$$(2.3) \quad \frac{\partial g}{\partial t} + B(g, g) + KAg + 2wLg + (\nabla p, 0) = F$$

2.1. Espacios funcionales. Sean los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} \xi_0(\Omega) &= \{v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) / \nabla \cdot v = 0\}, & \text{campos vectoriales con divergencia nula} \\ \zeta_0(\Omega) &= \{\alpha \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})\}, & \text{campos escalares de soporte compacto en } \Omega \\ J_0(\Omega) &= \xi_0(\Omega) \times \zeta_0(\Omega), & \text{espacio de funciones de prueba.} \end{aligned}$$

Se define:

$$\begin{aligned} H_0 &= \overline{J_0(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}, & \text{clausura de } J_0(\Omega) \text{ con norma en } (L^2(\Omega))^4, \\ V_0 &= \overline{J_0(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}}, & \text{clausura de } J_0(\Omega) \text{ con norma en } (H_0^1(\Omega))^4 \end{aligned}$$

Se cumple que

$$V_0 \subset H_0 = H_0' \subset V_0'$$

inclusiones continuas y compactas. Y de ello se tienen la identificación entre el producto interno en H_0 y la dualidad V_0' y V_0 , es decir:

$$(2.4) \quad \langle f, g \rangle_{V_0' V_0} = (f, g)_{H_0} \quad \forall f \in H_0, \quad \forall g \in V_0$$

Además, para cada $h \in V_0$ fijo se define la siguiente funcional:

$$(h, \cdot) : V_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{por } g \longrightarrow (h, g)_{V_0}$$

es lineal y continua sobre V_0 , por tanto, existe un operador $A : V_0 \longrightarrow V_0'$ tal que:

$$(2.5) \quad (h, z)_{V_0} = \langle Ah, z \rangle_{V_0' V_0} = \int_{\Omega} Ag \cdot z dx \quad \forall z \in V_0$$

y usando la identidad de Green, se obtiene (2.5)

$$\begin{aligned} \langle Ag, z \rangle_{V_0' V_0} &= \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx + \int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla \alpha dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} dS}_0 - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \alpha \frac{\partial q}{\partial n} dS}_0 \\ &= (g, z)_{V_0}, \quad \forall z \in V_0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $g = (g_1, g_2, g_3, g_4) = (u, \alpha)$, $h = (h_1, h_2, h_3, h_4) = (v, \beta)$, $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) = (w, \gamma)$, usando (2.2) se define el operador bilineal

$$(2.6) \quad B : V_0 \times V_0 \longrightarrow V_0', \quad \text{por} \quad \langle B(g, h), z \rangle_{V_0' V_0} = (B(g, h), z)_{H_0}$$

de donde se tiene un operador trilineal $b : H_0 \times H_0 \times H_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $b(g, h, z) = (B(g, h), z)_{H_0}$, que cumple

$$b(g, h, z) = \int_{\Omega} u \cdot \nabla v \cdot w dx + \int_{\Omega} u \cdot \nabla q \cdot \gamma dx = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega} (g_j \frac{\partial}{\partial x_j}) h_i \cdot z_i dx.$$

Finalmente, se define el operador

$$(2.7) \quad L : V_0 \longrightarrow V_0', \quad \text{por} \quad \langle Lg, h \rangle_{V_0' V_0} = ((j \times u, 0), h)_{H_0}.$$

Con estas notaciones y (2.6) y (2.7) se obtiene la siguiente funcional:

$$B(g, g) - Ag + Lg + F \in V_0', \quad \text{de donde se concluye} \quad \frac{\partial g}{\partial t} \in V_0'.$$

De esta forma, la ecuación (2.3), se interpreta en el espacio dual

$$(2.8) \quad \frac{\partial g}{\partial t} + B(g, g) - KAg + 2wLg = F \quad \text{en} \quad V_0'$$

Por tanto, para $z = (v, \alpha) \in V_0$ se tiene la siguiente expresión:

$$(2.9) \quad \left\langle \frac{\partial g}{\partial t}, z \right\rangle_{V_0' V_0} + \langle B(g, g), z \rangle_{V_0' V_0} - K \langle Ag, z \rangle_{V_0' V_0} + 2w \langle Lg, z \rangle_{V_0' V_0} \langle F, z \rangle_{V_0' V_0}$$

La cual, en base a los resultados anteriores se puede escribir de la siguiente forma:

$$(2.10) \quad \left(\frac{\partial g}{\partial t}, z \right)_{H_0} + (B(g, g), z)_{H_0} - (Kg, z)_{V_0} + 2w(Lg, z)_{H_0} = (F, z)_{H_0}$$

Se observa que el término $((\nabla p, 0), z)$ desaparece porque se cumple la ortogonalidad $(\nabla p, 0) \perp H_0$ (Temam, 1977: [15])

Por tanto la formulación variacional del problema (PV) es:

$$(PV) \begin{cases} \text{Dado } F \in H_0, g_0 \in V_0. \text{ Hallar } g \in L^\infty(0, T; H_0) \cap L^2(0, T; V_0) \text{ tal que} \\ \frac{\partial}{\partial t} (g, z)_{H_0} + b(g, g, z) + (Kg, z)_{V_0} + 2w(Lg, z)_{H_0} = (F, z)_{H_0}, \forall z \in V_0(\Omega) \\ g(0) = g_0, \end{cases}$$

2.1.1. Propiedades de los operadores . Presentamos algunas propiedades sobre los operadores

Proposición 1. *El operador trilineal $b(g, h, z)$ es ortogonal en las dos últimas componentes, esto es, para todo $g, h \in V_0$ entonces $b(g, h, h) = 0$*

Proof. Dados $g = (g_1, g_2, g_3, g_4)$, $h = (h_1, h_2, h_3, h_4) \in V_0$, las tres primeras componentes de g satisfacen: $\sum_{j=1}^3 \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = 0$ entonces:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} b(g, h, h) &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega} g_j \frac{\partial h_i}{\partial x_j} h_i dx = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} |h_i|^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial g_j}{\partial x_j} \right) \|h\|^2 dx = 0 \end{aligned}$$

□

Proposición 2. *El término trilineal posee la propiedad de antisimétrica en las dos últimas componentes, es decir, $b(g, z, w) = -b(g, w, z)$*

Proof. En la Proposición 1 se cumple $b(g, h + z, h + z) = 0$, luego:

$$\begin{aligned} 0 &= b(g, h + z, h + z) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} g_j \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right] (h_i + z_i) dx \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} \left(g_j \frac{\partial h_i}{\partial x_j} h_i + g_j \frac{\partial h_i}{\partial x_j} z_i + g_j \frac{\partial z_i}{\partial x_j} h_i + g_j \frac{\partial z_i}{\partial x_j} z_i \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} g_j \frac{\partial h_i}{\partial x_j} z_i + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} g_j \frac{\partial z_i}{\partial x_j} h_i dx \\ &= b(g, h, z) + b(g, z, h) \end{aligned}$$

□

Proposición 3. *La forma trilineal es continua en $V_0 \times V_0 \times V_0$*

Proof. para $g, h, s \in V_0$, se tiene

$$(2.12) \quad |b(g, h, s)| = \left| \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega} g_j \frac{\partial h_i}{\partial x_j} s_i dx \right| \leq \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega} |g_j s_i| \left| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right| dx$$

Usando la desigualdad de Hölder, para $i = 1, 2, 3, 4$ y $j = 1, 2, 3$ y $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g_j s_i| \left| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right| dx &\leq \left(\int_{\Omega} |g_j s_i|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |g_j|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |s_i|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|g_j\|_{L^4(\Omega)} \|s_i\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ (2.13) \quad &\leq C \|g_j\|_{H_0^1(\Omega)} \|s_i\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Ahora reemplazando (2.13) en (2.12) se obtiene

$$\begin{aligned} |b(g, h, s)| &\leq \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^4 C \|g_j\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|s_i\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^3 \|g_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^3 \left\| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \|s_i\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C \sum_{i=1}^4 \|g\|_{V_0} \|\nabla h_i\|_{L^2(\Omega)} \|s_i\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C \|g\|_{V_0} \sum_{i=1}^4 \|h_i\|_{H_0^1(\Omega)} \|s_i\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$\begin{aligned} |b(g, h, s)| &\leq C \sum_{i=1}^4 \|g\|_{V_0} \left(\sum_{i=1}^4 \|h_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^4 \|s_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \|g\|_{V_0} \|h\|_{V_0} \|s\|_{V_0} \end{aligned}$$

□

Proposición 4. La ortogonalidad del operador Lg , esto es: $(Lg, g) = 0$

Proof.

$$\begin{aligned}(Lg, g)_{H_0} &= \int_{\Omega} Lg \cdot g dx = \int_{\Omega} (j \times u, 0) \cdot g dx \\ &= \int_{\Omega} (j \times u) \cdot u dx + \int_{\Omega} 0 \cdot g dx = 0,\end{aligned}$$

pues u es ortogonal a $(j \times u)$ □

3. Problema aproximado. Como H_0 es separable, entonces es posible encontrar una base ortonormal completa $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ en H_0 formada por elementos de $J_0(\Omega)$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, se define el subespacio vectorial finito dimensional de V_0

$$J_0^m(\Omega) = \text{Span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\},$$

Se define la solución aproximada: $g^m : [0, T] \rightarrow J_0^m(\Omega)$, por:

$$g^m(t) = \sum_{k=1}^m \beta_k^m(t) w_k,$$

Escribimos la formulación variacional en el subespacio finito dimensional.

$$(PA) \begin{cases} \frac{d}{dt}(g^m(t), z)_{H_0} + (Kg^m(t), z)_{V_0} + b(g^m(t), g^m(t), z) + \\ \quad 2w(Lg^m(t), z)_{H_0} = (F, z)_{H_0}, & \forall z \in J_0^m(\Omega) \\ g^m(0) = g_0^m & t = 0 \end{cases}$$

donde g_0^m es la proyección de $g_0 \in V_0$ sobre $J_0^m(\Omega)$, es decir, se tiene

$$g_0^m = \sum_{j=1}^m \delta_j^m w_j, ; \quad \delta_j^m = (g_0, w_j), \text{ el coeficiente de Fourier}$$

Se hacen las siguientes notaciones,

$$[g, z] = (Kg, z)_{V_0} = \nu(u, v)_{\mathbf{H}_0^1} + c_q(q, \alpha)_{H_0^1}$$

$$[g]^2 = (Kg, g)_{V_0} = \nu \|u\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 + c_q \|q\|_{H_0^1}^2$$

Definiendo $k = \min\{\nu, c_q\}$, $k_m = \max\{\nu, c_q\}$ se obtiene,

$$(3.1) \quad k(g, g)_{V_0} = k \|g\|_{V_0}^2 \leq [g]^2 \leq k_m \|g\|_{V_0}^2$$

Resolver el problema (PA), consiste en encontrar los coeficientes de $g^m(t)$, esto es, $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_m(t))$.

Por Faedo-Galerkin, se sustituye en (PA) z por w_j , $j = 1, 2, \dots, m$, obteniendo el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^m (w_k, w_j)_{L^2} (\beta_k^m(t))' &= (F^m, w_j)_{H_0} - \sum_{k=1}^m [w_k, w_j] \beta_k^m(t) \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b(w_k, w_l, w_j) \beta_k^m(t) \beta_l^m(t) + 2w \sum_{k=1}^m (Lw_k, w_j) \beta_k^m(t) \\ \sum_{k=1}^m \beta_k^m(0) w_k &= \sum_{k=1}^m \delta_j w_k \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Las funciones w_1, w_2, \dots, w_m son linealmente independientes, la matriz de coeficiente (w_k, w_j) es no singular, entonces se obtiene el problema de Cauchy en \mathbb{R}^m :

$$(PO) \begin{cases} \beta'(t) = F(\beta(t)) \\ \beta(0) = \delta \end{cases}$$

Como F es continua, por el teorema de Cauchy-Peano, existe una solución local de (PO), es decir, para cada m , existe $T_m = T(m, g_0^m)$ tal que $\beta(t)$ existe $\forall t \in [0, T_m]$, por tanto existe la solución local $g^m(t)$ de (PA) y $g^m \in C^1([0, T_m]; J_0^m(\Omega))$.

A continuación se presentan estimativas a priori para las soluciones aproximadas, a fin de garantizar la convergencia de esta sucesión de soluciones.

3.1. Estimativas a priori en $L^2(0, T; H_0)$. En la ecuación aproximada, se toma $z = g^m(t)$, y se obtiene:

$$(3.3) \quad \left(\frac{d}{dt} g^m(t), g^m(t) \right)_{H_0} + [g^m(t), g^m(t)] + b(g^m(t), g^m(t), g^m(t)) + 2w(Lg^m(t), g^m(t))_{H_0} = (F, g^m(t))_{H_0}$$

Puesto que $b(g^m(t), g^m(t), g^m(t)) = 0$ y $(Lg^m(t), g^m(t)) = 0$ y $\left(\frac{d}{dt} g^m(t), g^m(t) \right)_{H_0} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|g^m(t)\|_{H_0}^2$ la ecuación (3.3) toma la forma de una ecuación de energía

$$(3.4) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|g^m(t)\|_{H_0}^2 + [g^m(t), g^m(t)] = (F, g^m(t))_{H_0},$$

Las desigualdades de Cauchy Schwarz, Young al lado derecho de la ecuación (3.4)

$$(3.5) \quad (F, g^m(t))_{H_0} \leq \|F\|_{H_0} \|g^m(t)\|_{H_0} \leq \frac{\|F\|_{H_0}^2}{2\lambda k} + \frac{\lambda k \|g^m(t)\|_{H_0}^2}{2}$$

Por la desigualdad de Poincaré se cumple:

$$(3.6) \quad \|g^m(t)\|_{H_0}^2 \leq \frac{1}{\lambda} \|g^m(t)\|_{V_0}^2 \leq \frac{1}{\lambda} \frac{1}{k} [g^m(t)]^2$$

Reemplazando estos resultados en la ecuación (3.4) se obtiene.

$$\left| \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|g^m(t)\|_{H_0}^2 + [g^m(t)]^2 \leq \frac{\|F\|_{H_0}^2}{2\lambda k} + \lambda k \frac{\|g^m(t)\|_{H_0}^2}{2} \right.$$

Ahora de la desigualdad (3.6) se obtiene la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|g^m(t)\|_{H_0}^2 + k\lambda \|g^m(t)\|_{H_0}^2 - k\lambda \frac{\|g^m(t)\|_{H_0}^2}{2} \leq \frac{\|F\|_{H_0}^2}{2\lambda k},$$

de donde

$$(3.7) \quad \frac{d}{dt} \|g^m(t)\|_{H_0}^2 + k\lambda \|g^m(t)\|_{H_0}^2 \leq \frac{1}{\lambda k} \|F\|_{H_0}^2$$

Sea $\varphi(t) = \|g^m(t)\|_{H_0}^2$, $\alpha = k\lambda$, $\beta = \frac{1}{\lambda k} \|F\|_{H_0}^2$, en la desigualdad anterior, se tiene:

$$\varphi'(t) + \alpha\varphi(t) \leq \beta,$$

aplicando la desigualdad de Gronwall, de la desigualdad (3.7) se tiene

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \|g^m(t)\|_{H_0}^2 &\leq \|g^m(0)\|_{H_0}^2 e^{-\lambda k t} + \frac{\|F\|_{H_0}^2}{\lambda^2 k^2} (1 - e^{-\lambda k t}) \\ &\leq \|g^m(0)\|_{H_0}^2 e^{-\lambda k t} + \frac{\|F\|_{H_0}^2}{\lambda^2 k^2} \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

Se tiene la primera acotación para el problema (PA), de (3.8):

$$\sup_{t>0} \|g^m(t)\|_{H_0} \leq C_0, \text{ es decir } \{g^m(t)\}, \text{ es acotada en } L^\infty(0, T; H_0).$$

3.2. Estimativas a priori en el espacio $L^2(0, T; V_0)$. En la ecuación (3.4) y usando (3.6) se tiene:

$$(3.9) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|g^m(t)\|_{H_0}^2 + k \|g^m(t)\|_{V_0}^2 \leq (F, g^m(t))_{H_0},$$

Por Cauchy-Schwarz, Poincaré en el lado derecho de (3.9) se obtiene:

$$(3.10) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|g^m(t)\|_{H_0}^2 + k \|g^m(t)\|_{V_0}^2 \leq \|F\|_{H_0} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|g^m(t)\|_{V_0}$$

La desigualdad de Young en el lado derecho de la desigualdad (3.10)

$$\left(\frac{\|F\|_{H_0}}{\sqrt{\lambda k}} \right) \left(\frac{\sqrt{\lambda k}}{\sqrt{\lambda}} \|g^m(t)\|_{V_0} \right) \leq \frac{\|F\|_{H_0}^2}{2\lambda k} + \frac{\lambda k}{2\lambda} \|g^m(t)\|_{V_0}^2$$

Reemplazando este resultado en (3.10) se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|g^m(t)\|_{H_0}^2 + k \|g^m(t)\|_{V_0}^2 \leq \frac{\|F\|_{H_0}^2}{2\lambda k} + \frac{k}{2} \|g^m(t)\|_{V_0}^2$$

Realizando operaciones algebraicas se genera la desigualdad siguiente

$$(3.11) \quad \frac{d}{dt} \|g^m(t)\|_{H_0}^2 + k \|g^m(t)\|_{V_0}^2 \leq \frac{\|F\|_{H_0}^2}{\lambda k}$$

En la desigualdad (3.11), integrando en el tiempo de 0 a T

$$\|g^m(t)\|_{H_0}^2 + k \int_0^T \|g^m(t)\|_{V_0}^2 dt \leq \|g^m(0)\|_{H_0}^2 + \frac{T}{\lambda k} \|F\|_{H_0}^2 \leq C_1,$$

pues g_0^m es acotado en H_0 y para un T fijo. De lo anterior se tiene que:

$$(3.12) \quad k \int_0^T \|g^m(t)\|_{V_0}^2 dt \leq C_1$$

3.3. Compacidad en $L^2(0, T; H_0)$. En el problema (PA) integrando en el tiempo de t a $t+h$ y tomando valor absoluto, se obtiene

$$(3.13) \quad \begin{aligned} |(g^m(t+h), z)_{H_0} - (g^m(t), z)_{H_0}| &\leq \left| \int_t^{t+h} (F, z)_{H_0} dt \right| + \left| \int_t^{t+h} [g^m(t), z] dt \right| + \\ &\left| \int_t^{t+h} b(g^m(t), g^m(t), z) dt \right| + 2w \left| \int_t^{t+h} (Lg^m(t), z)_{H_0} dt \right| \end{aligned}$$

Trabajando con cada término del lado derecho de la desigualdad (3.13).

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \left| \int_t^{t+h} (F, z)_{H_0} dt \right| &\leq \int_t^{t+h} \|F\|_{H_0} \|z\|_{H_0} dt \leq \left(\int_t^{t+h} \lambda^{-1/2} \|F\|_{H_0} dt \right) \|z\|_{V_0} \\ &\leq (\lambda^{-1/2} \|F\|_{H_0}) h \|z\|_{V_0} \leq C_0 h \|z\|_{V_0} \end{aligned}$$

Por (3.1), Cauchy-Schwarz, Hölder y dado que $g^m(y)$ es acotada en V_0

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \left| \int_t^{t+h} [g^m(t), z] dt \right| &\leq \int_t^{t+h} |[g^m(t), z]| dt \leq k_m \left(\int_t^{t+h} 1 \cdot \|g^m(t)\|_{V_0} dt \right) \|z\|_{V_0} \\ &\leq k_m \left(\int_t^{t+h} 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_t^{t+h} \|g^m(t)\|_{V_0}^2 dt \right)^{1/2} \|z\|_{V_0} \\ &\leq k_m h^{1/2} C^{1/2} \|z\|_{V_0} \leq C_1 h^{1/2} \|z\|_{V_0} \end{aligned}$$

Para el operador trilineal se usa la propiedad de antisimétrica, de la que se obtiene

$$(3.16) \quad |b(g^m, g^m, z)| = |b(g^m, z, g^m)| = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \left| g_j^m \frac{\partial z_i}{\partial x_j} g_i^m \right| dt,$$

Luego para cada $i = 1, 2, 3, 4$ y $j = 1, 2, 3$

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \left| g_j^m \frac{\partial z_i}{\partial x_j} g_i^m \right| dt &\leq \left(\int_{\Omega} |g_j^m|^4 dt \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |g_i^m|^4 dt \right)^{1/4} \\ &\leq \|g_j^m\|_{L^4} \left\| \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2} \|g_i^m\|_{L^4} \end{aligned}$$

Reemplazando (3.17) en (3.16) y aplicando la desigualdad de Hölder se obtiene

$$(3.18) \quad |b(g^m, g^m, z)| \leq \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \|g_j^m\|_{L^4} \left\| \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2} \|g_i^m\|_{L^4} \leq \|g^m\|_{L^4}^2 \|z\|_{V_0}$$

De (3.18) y la desigualdad de Ladyzhenskaya se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \int_t^{t+h} b(g^m(t), g^m(t), z) dt \right| &\leq C \int_t^{t+h} (\|g^m(t)\|_{H_0}^{1/4} \|g^m(t)\|_{V_0}^{3/4})^2 \|z\|_{V_0} dt \\ &\leq C \int_t^{t+h} \|g^m(t)\|_{H_0}^{1/2} \|g^m(t)\|_{V_0}^{3/2} \|z\|_{V_0} dt \end{aligned}$$

Como $g^m(t)$ es acotada en H_0 y aplicando la desigualdad de Hölder

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \left| \int_t^{t+h} b(g^m(t), g^m(t), z) dt \right| &\leq C \int_t^{t+h} \|1 \cdot g^m(t)\|_{V_0}^{3/2} \|z\|_{V_0} dt \\ &\leq C \left(\int_t^{t+h} 1^4 dt \right)^{1/4} \left(\int_t^{t+h} \|g^m(t)\|_{V_0}^2 dt \right)^{3/4} \|z\|_{V_0} \\ &\leq C_2 h^{1/4} \|z\|_{V_0} \end{aligned}$$

El último término se estima usando Poincaré y Cauchy-Schwarz:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \left| \int_t^{t+h} (Lg^m(t), z)_{H_0} dt \right| &\leq \int_t^{t+h} \|Lg^m(t)\|_{H_0} \|z\|_{H_0} dt \leq \int_t^{t+h} 1 \cdot \|g^m(t)\|_{H_0} \lambda^{-1/2} \|z\|_{V_0} dt \\ &\leq \lambda^{-1/2} \left(\int_t^{t+h} 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_t^{t+h} \|g^m(t)\|_{H_0}^2 dt \right)^{1/2} \|z\|_{V_0} \\ &\leq \lambda^{-1/2} h^{1/2} C \|z\|_{V_0} \leq C_3 h^{1/2} \|z\|_{V_0} \end{aligned}$$

Reemplazando (3.14), (3.15), (3.19) y (3.20) en (3.13)

$$(3.21) \quad \begin{aligned} |(g^m(t+h) - g^m(t), z)_{H_0}| &\leq \{C_0 h + C_1 h^{1/2} + C_2 h^{1/4} + C_3 h^{1/2}\} \|z\|_{V_0} \\ |(g^m(t+h) - g^m(t), z)_{H_0}| &\leq \tilde{C} h^{1/4} \|z\|_{V_0} \end{aligned}$$

Tomando $z = g^m(t+h) - g^m(t)$ e integrando de 0 a $T-h$ se obtiene

$$\int_0^{T-h} \|g^m(t+h) - g^m(t)\|_{H_0}^2 dt \leq \tilde{C} h^{1/4} \int_0^{T-h} \|g^m(t+h) - g^m(t)\|_{V_0} dt$$

Finalmente con la desigualdad de Hölder y dado que $g^m(t)$ es acotada en V_0 , la integral en el lado derecho resulta una constante que conduce a:

$$(3.22) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sup_m \int_0^{T-h} \|g^m(t+h) - g^m(t)\|_{H_0}^2 dt = 0$$

Teniendo en cuenta que por (3.12) $\{g^m(t)\}$ es acotada en $L^2(0, T; V_0)$, por (3.8) acotada en H_0 y por (3.22) utilizando el teorema de Temam se concluye que $\{g^m(t)\}$ es acotada en $L^2(0, T; H_0)$.

4. Existencia de soluciones. En esta sección se demuestra la existencia de una solución débil del problema en un dominio acotado de frontera regular.

Teorema 1. Dado $F \in H_0$, $g_0 \in V_0$, entonces existe $g \in L^\infty(0, T; H_0) \cap L^2(0, T; V_0)$ que satisface el problema variacional (PV)

Prueba

La estimativa (3.8) y (Teorema 15, Brezis, [2], p. 69), garantiza la existencia de una subsucesión $\{g^{mk}(t)\}$, tal que

$$\{g^{mk}(t)\} \overset{*}{\rightharpoonup} g_1 \text{ en } L^\infty(0, T; H_0)$$

Teniendo en cuenta que $L^2(0, T; V_0)$ es un espacio de Banach reflexivo, la estimativa (3.12), (Teorema 16, Brezis [2] p. 70) garantiza la existencia de una subsucesión de la subsucesión anterior $\{g^{mk}(t)\}$ tal que

$$\{g^{mk}(t)\} \rightharpoonup g_2 \text{ en } L^2(0, T; V_0)$$

Para esta subsucesión, la estimativa (3.22) juntamente con el teorema de Temam ([?], p. 98) garantizan la existencia de una subsucesión $\{g^{mk}(t)\} \subset L^2(0, T; H_0)$ que converge fuertemente, es decir

$$\{g^{mk}(t)\} \longrightarrow g_3 \text{ en } L^2(0, T; H_0)$$

De estas tres convergencias se debe probar que $g_1 = g_2 = g_3$

En la segunda convergencia, dado $g \in [L^2(0, T; V_0)]' = L^2(0, T; V_0')$ se tiene

$$(4.1) \quad \int_0^T (g(t), g^m(t)) dt \longrightarrow \int_0^T (g(t), g_2(t)) dt \quad \forall g \in L^2(0, T; V_0')$$

La convergencia fuerte en $L^2(0, T; H_0)$ implica convergencia débil, es decir

$$(4.2) \quad \int_0^T (g(t), g^m(t)) dt \longrightarrow \int_0^T (g(t), g_3(t)) dt \quad \forall g \in L^2(0, T; H_0)$$

Como $V_0 \subset H_0 = H_0' \subset V_0'$ de (4.1) y (4.2) se tiene

$$\int_0^T (g(t), g_2(t)) dt = \int_0^T (g(t), g_3(t)) dt \quad \forall g \in L^2(0, T; H_0)$$

En particular $g_2 \in L^2(0, T; H_0)$, así tomando $g(t) = g_2(t) - g_3(t)$ se tiene que $\int_0^T |g_2(t) - g_3(t)|^2 dt = 0$, por tanto

$$(4.3) \quad g_2 = g_3$$

De la convergencia débil-* dado $g \in L^1(0, T; H_0)$, se tiene que

$$\langle g, g^m \rangle \longrightarrow \langle g, g_1 \rangle$$

de (4.1) se obtiene.

$$(4.4) \quad \int_0^T (g(t), g_m(t)) dt \longrightarrow \int_0^T (g(t), g_1(t)) dt \quad \forall g \in L^1(0, T; H_0)$$

De (4.1) y (4.4) se sigue

$$\int_0^T (g(t), g_2(t)) dt \longrightarrow \int_0^T (g(t), g_1(t)) dt \quad \forall g \in L^2(0, T; H_0)$$

Como $L^2(0, T; H_0) \subset L^2(0, T; V'_0)$ y $L^2(0, T; H_0) \subset L^1(0, T; H_0)$, de (4.3) se tiene que $g_2 = g_1$, entonces $g_1 = g_2 = g_3$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} g^m &\overset{*}{\rightharpoonup} g \in L^\infty(0, T; H_0) \\ g^m &\rightharpoonup g \in L^2(0, T; V_0) \\ g^m &\longrightarrow g \in L^2(0, T; H_0) \end{aligned}$$

Ahora se demostrará que g es solución de la formulación variacional del (PV), para lo cual se considera una función $\psi \in C^1_0[0, T]$ tal que $\psi(T) = 0$. Multiplicando el problema (PV) por $\psi(t)$ e integrando de 0 a T se obtiene:

$$(4.5) \quad \int_0^T \frac{d}{dt} (g^m(t), \psi(t)w_j) dt + k \int_0^T (g^m(t), \psi(t)w_j) dt + \int_0^T b(g^m(t), g^m(t), \psi(t)w_j) dt + 2w \int_0^T (Lg^m(t), \psi(t)w_j) dt = \int_0^T (F, \psi(t)w_j) dt$$

Integrando por partes la primera integral de la ecuación (4.5), puesto que $\psi(T) = 0$ la ecuación (4.5) puede ser escrita como

$$(4.6) \quad - \int_0^T (g^m(t), \psi'(t)w_j) dt + k \int_0^T (g^m(t), \psi(t)w_j) dt + \int_0^T b(g^m(t), g^m(t), \psi(t)w_j) dt + 2w \int_0^T (Lg^m(t), \psi(t)w_j) dt = \int_0^T (F, \psi(t)w_j) dt + (g^m_0, \psi(0)w_j)$$

Tomando $m \longrightarrow \infty$, en cada uno de los términos de la ecuación (4.6) se obtiene:

$$i) \quad \int_0^T (g^m(t), \psi'(t)w_j) dt \longrightarrow \int_0^T (g(t), \psi'(t)w_j) dt, \quad \forall \psi \in C^1_0([0, T])$$

En efecto

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (g^m, \psi' w_j) dt - \int_0^T (g, \psi' w_j) dt \right| &\leq \int_0^T |g^m - g|_{H_0} |\psi' w_j|_{H_0} dt \\ &\leq \left(\int_0^T |g^m - g|_{H_0}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |\psi' w_j|_{H_0}^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Como $\psi \in C^1[0, T]$, $\left(\int_0^T |\psi' w_j|_{H_0}^2 dt \right)^{1/2} = K$ y la convergencia fuerte de $\{g^m\} \in L^2(0, T; H_0)$, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $\forall n > n_0$ se tiene

$$\left| \int_0^T (g^m, \psi' w_j) dt - \int_0^T (g, \psi' w_j) dt \right| < \varepsilon.$$

$$\text{ii) } \int_0^T (g^m(t), \psi(t)w_j)_{V_0} dt \longrightarrow \int_0^T (g(t), \psi(t)w_j)_{V_0} dt$$

Se sabe que $\psi w_j \in L^2(0, T, V_0)$, como $V_0 \subset V_0'$ se tiene que

$$\psi w_j \in [L^2(0, T, V_0)]' = L^2(0, T, V_0')$$

Por la convergencia débil de $\{g^m(t)\}$ en $L^2(0, T, V_0)$ se tiene que

$$\langle \psi w_j, g^m \rangle \longrightarrow \langle \psi w_j, g \rangle \text{ en } L^2(0, T, V_0)$$

Por el teorema de la representación de Riesz, se tiene

$$\int_0^T (g^m(t), \psi(t)w_j)_{V_0} dt \longrightarrow \int_0^T (g(t), \psi(t)w_j)_{V_0} dt.$$

$$\text{iii) } \int_0^T b(g^m(t), g^m(t), \psi(t)w_j) dt \longrightarrow \int_0^T b(g(t), g(t), \psi(t)w_j) dt$$

Para demostrar esta convergencia se usa el siguiente lema:

Lemma 4.1. *Sea una sucesión $\{g^m(t)\}$ que converge a g en $L^2(0, T, H_0)$ fuertemente entonces para cada vector w en $C^1(\bar{Q})$, se tiene*

$$\int_0^T b(g^m(t), g^m(t), w(t)) dt \longrightarrow \int_0^T b(g(t), g(t), w(t)) dt$$

donde \bar{Q} es la clausura de $[0, T] \times \Omega$.

Proof.

Usando la propiedad de antisimétrica, se puede escribir

$$\int_0^T b(g^m(t), g^m(t), w(t)) dt = - \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} g_j^m \frac{\partial w_i}{\partial x_j} g_i^m dx dt$$

Se observa que:

$$\left| \int_{\Omega} g_j^m \frac{\partial w_i}{\partial x_j} g_i^m dx - \int_{\Omega} g_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} g_i dx \right| \leq \underbrace{\int_{\Omega} |g_j^m \frac{\partial w_i}{\partial x_j} g_i^m - g_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} g_i^m| dx}_a + \underbrace{\int_{\Omega} |g_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} g_i^m - g_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} g_i| dx}_b$$

Por la desigualdad de Hölder en el término (a) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g_j^m \frac{\partial w_i}{\partial x_j} g_i^m - g_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} g_i^m| dx &\leq \int_{\Omega} |g_j^m - g_j| \left| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} g_i^m \right| dx \\ &\leq \max_{1 \leq i, j \leq m} \left| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right| |g_j^m - g_j|_{H_0} |g_i^m|_{H_0} \end{aligned}$$

Integrando en t y por Hölder se tiene

$$(4.7) \quad \left| \int_0^T \int_{\Omega} (g_j^m \frac{\partial w_i}{\partial x_j} g_i^m - g_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} g_i^m) dx dt \right| \leq C \int_0^T |g_j^m - g_j|_{H_0} |g_i^m|_{H_0} dt$$

En forma análoga el término (b), y usando el hecho de pues $\{g^m\}$ converge a g en $L^2(0, T, H_0)$ y es acotada en ese espacio.

□

$$\text{iv)} \quad \int_0^T (Lg^m(t), \psi(t)w_j)dt \longrightarrow \int_0^T (Lg(t), \psi(t)w_j)dt$$

Como $\psi w_j \in L^2(0, T, V_0)$, el teorema de la representación de Riesz y la convergencia de $\{g^m\}$ en $L^2(0, T, H_0)$, implican la convergencia en iv)

$$\text{v)} \quad (g_0^m, w_j)\psi(0) \longrightarrow (g_0, w_j)\psi(0)$$

aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |(g_0^m, w_j)\psi(0) - (g_0, w_j)\psi(0)| &= |\psi(0)| |(g_0^m - g_0, w_j)| \\ &\leq |\psi(0)| |g_0^m - g_0| |w_j| \end{aligned}$$

el resultado se sigue pues $\{g_0^m\}$ converge fuertemente para g_0 en H_0 .

Por tanto, dado $m, j \in \mathbb{N}$ con $j \leq m$ y haciendo $m \longrightarrow \infty$ se tiene

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (g(t), \psi'(t)w_j)dt + k \int_0^T (\nabla g(t), \psi(t)\nabla w_j)dt + \int_0^T b(g(t), g(t), \psi(t)w_j)dt + \\ (4.8) \quad & 2w \int_0^T (Lg(t), \psi(t)w_j)dt = \int_0^T (F(t), \psi(t)w_j)dt + (g_0, w_j)\psi(0) \end{aligned}$$

Como w_1, \dots, w_j funciones de V_0 forman un conjunto denso, se concluye que $\forall h \in V_0$ existe $\{w^{nk}\}$ subsucesión de $\{w_1, w_2, \dots\}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} w^{nk} = h$ en V_0 de donde se puede escribir

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (g(t), \psi'(t)h)dt + k \int_0^T (\nabla g(t), \psi(t)\nabla h)dt + \int_0^T b(g(t), g(t), \psi(t)h)dt + \\ & 2w \int_0^T (Lg(t), \psi(t)h)dt = \int_0^T (F(t), \psi(t)h)dt + (g_0, h)\psi(0), \quad \forall h \in V_0 \end{aligned}$$

Considerando $\psi \in D((0, T))$, multiplicando a la formulación variacional (PV) por $\psi(t)$ e integrando de 0 a T se obtiene (4.9), esto es, g satisface la formulación variacional en el sentido de las distribuciones.

Finalmente se prueba que $g(0) = g_0$. Con lo que queda demostrado la existencia la solución de la formulación variacional del problema.

5. Simulaciones Numéricas de Precipitaciones atmosféricas. El BRAMS (Brazilian Regional Atmospheric Modeling System) es un sistema numérico meteorológico desarrollado en su primera Versión como RAMS (Regional Atmospheric Modeling System) en la Universidad del Colorado, teniendo como uno de los promotores a Pielke [10], luego los investigadores brasileros, desarrollaron una nueva versión del RAMS adaptado a los trópicos e incorporando la paralelización y rutinas de cocontaminación atmosférica.

Los resultados obtenidos de la simulación numérica con el BRAMS en el monitoramiento climático de la región del Perú, La precipitación generada por el modelo, están dispuestos en seis gráficos, incluye la precipitación acumulada diaria en milímetros para tres resoluciones espaciales diferentes, 5, 10 e $20Km$.

En el mes de junio de 2007 se observó un total de precipitación de 46, 2mm y el modelo generó 260, 57 y 287, 87 y 225, 86mm para las mallas de 5, 10, 20km respectivamente. En este mes la lluvia ocurrió en 6 días, en los cuales el modelo también generó lluvia para las tres mallas, sin embargo para los otros dos días en que no llovió, el modelo generó lluvia.

En el mes de julio de 2007 el total de precipitación observada fue de 234, 7mm y el modelo generó 230, 13mm, 241, 66mm y 202, 63mm para las mallas de 5, 10 y 20km respectivamente.

6. Resultados Computacionales. Los resultados obtenidos a partir de las simulaciones numéricas usando el modelo computacional BRAMS (Brazilian Regional Atmospheric Modelling system), corriendo en un cluster del Departamento de Matemática compuesto por 4 nodos de procesamiento SPARC T5120 de 4 cores cada uno, sobre el sistema SOLARIS 10, orientado al monitoramiento climático de la región del Perú, para el periodo de agosto a noviembre de los años 1986 y 1987,

El modelo BRAMS se inicializó usando los resultados del modelo global del Centro de Predicción de Tiempo y Clima del Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (CPTEC/INPE), con una resolución 160000 metros en la horizontal. El modelo se ejecutó usando tres mallas anidadas, con espaciamiento horizontal 160, 80 y 20 Km para las mallas 1, 2 y 3 respectivamente. El número de puntos utilizados en las tres mallas x y y fue 30 y 28 puntos en la primera malla, 38 y 40 puntos en la segunda y 86 y 122 puntos en la tercera.

Los ajustes de datos para correr el modelo se realizan en el archivo RAMSIN del control del modelo, las tres mallas están centradas en las coordenadas (Latitud, Longitud) con los siguientes valores (-08.5, -73.5), (-09.5, -75.5) y (-09.5, -76.0) respectivamente.

Los datos que presentamos, son parte de un proyecto STIC AMSUD, orientado a generar una climatología a nivel de meso escala para la región del Perú, por un periodo de 10 años, que en este caso, se eligió el periodo del 1991-2000. Por tanto los datos que presentamos son obtenidas en corridas se ejecutaron en un tiempo de 121 días o sea 4 meses para cada año, con una frecuencia de data de cada tres horas. Los resultados fueron visualizados con el software GrADS.

La precipitación generada por el modelo, están dispuestos en las figuras (6.1) y (6.2). En estos gráficos están indicados la precipitación acumulada diaria promediada por mes en milímetros para la última malla, generadas por el modelo BRAMS.

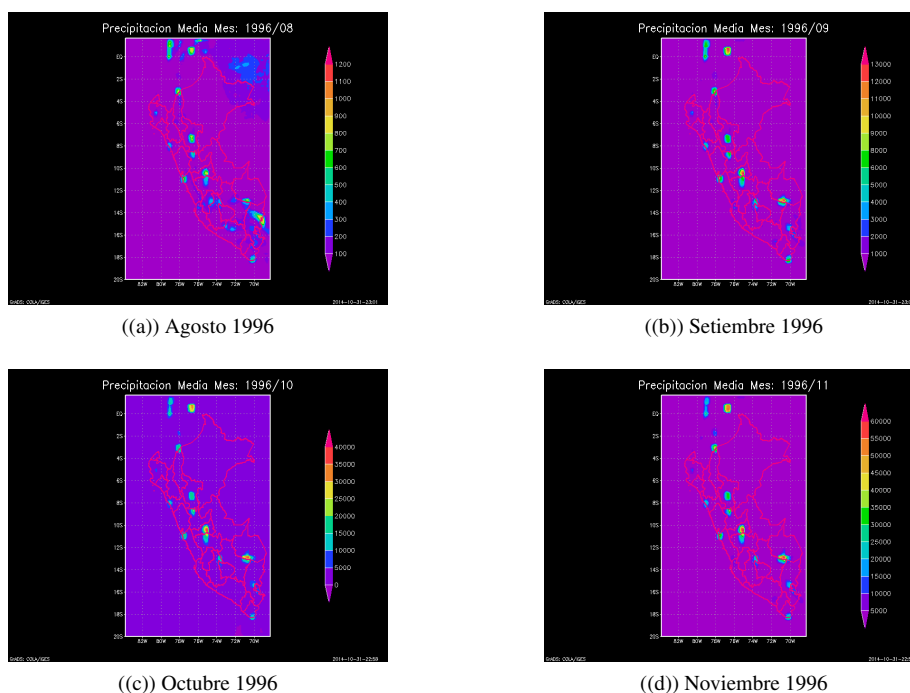


Figura 6.1: Precipitación media mensual 1996

Podemos observar los gráficos la media mensual de la precipitación para cuatro meses del año de 1996 presentados en la figura (6.1), la precipitación máxima ocurre en los meses de Octubre y Noviembre, en cambio una precipitación mas baja ocurre en el mes de Agosto.

En la figura (6.2), se presenta las medias mensuales de las precipitaciones para los meses de agosto a noviembre del año de 1997, con una configuración similar a los del año 1996.

Finalmente podemos concluir que estos patrones de comportamiento de la variable precipitación atmosférica para la región del Perú, sirven para generar climatologías por 10 o 20 años, y luego en un futuro poder hacer predicciones climatológicas a nivel de meso escala que serán necesarias para contribuir a estudio del cambio climático para esta región del Perú.

Referencias

- [1] Adams, R. (1975). Sobolev Spaces, Printed Academic Press, New York San Francisco London.
- [2] Brezis, H. (2010). Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Ed. Springer.
- [3] Chorin, A. and Marsden, J. (2000). A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Third Edition, Printed Springer, USA.

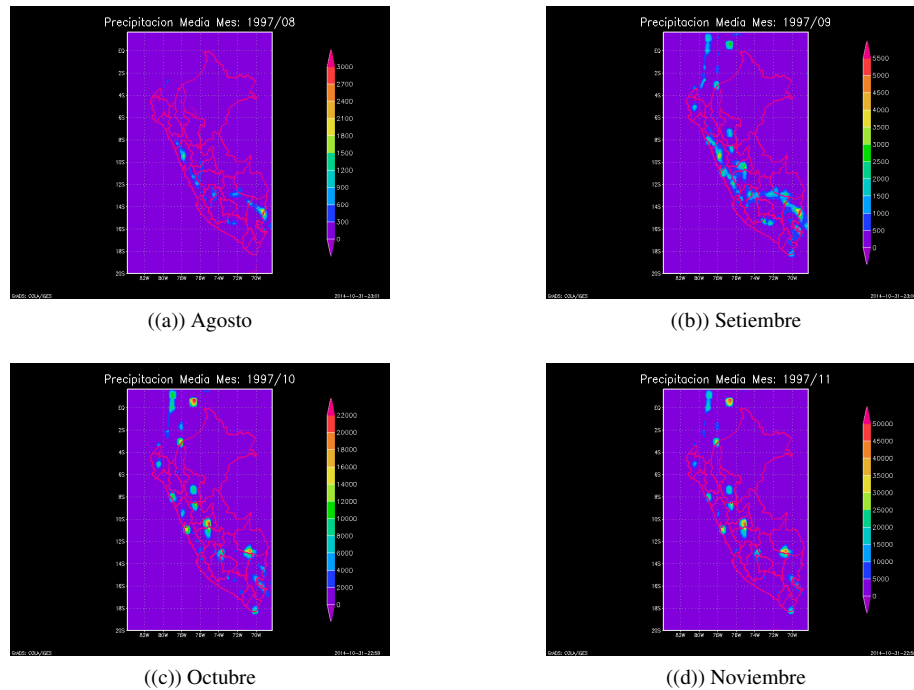


Figura 6.2: Precipitación media mensual 1997

- [4] Dolif Neto, G. and Ambrizi, T. (2002). Simulación Numérica de Evento Extremo de precipitación no Estado de Sao Paulo Aplicando os Esquemas de Parametrización de c^Âmulos de Anthes-Kuo e Grell no Modelo MM5, XII Congresso Brasileiro de Meteorologia, Foz de Iguaçu-PR, S^Âo Paulo - Brasil.
- [5] Didier, B. and Benolt, D. (2007). On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids, *Journal Mathematiques*, Num. 87, pp. 57-90.
- [6] Foias C., Manley O., Rosa R., Teman R. (2001). *Navier-Stokes Equations and Turbulence*, Cambridge University Press.
- [7] Holton, J. (2004). *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Elsevier- Academic Press.
- [8] Kshudiran, S. (2008). *The Earth's Atmosphere Its Physics and Dynamics*, Printed Springer, USA. Kangweon-Kyungki Math. Jour. 4 (1996), No. 2, pp. 179-193.
- [9] Morton, E., Gurtin, M.; Eliot, F. and Aanand, L. (2009). *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*, Cambridge University Press, New York.
- [10] Pielke, A. R. (2002). *Mesoscale Meteorological Modeling*, Second Edition, Ed. Academic Prest, Colorado USA.
- [11] Robinson, J. C. (2010). *An introduction to the classical theory of the Navier- Stokes equations*. Mathematics Institute University of Warwick, Coventry.
- [12] Rubio, O. (1998). Hausdorff Dimension of Functionally Set for Internally Viscoelastic Flow in Rotation, *J. Non Linear Analysis: Theory and Methods*, Vol. 20, pp. 20 - 30.
- [13] Rubio, O.; Bravo, Elva; Claeysen, Julio; (2002). Thermally Driven Cavity Flow with Neumann Condition for the Pressure, *Applied Numerical Mathematic*, Vol. 40, 237-336.
- [14] Teman, R. (1995). *Navier Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, Second Edition Philadelphia, Pennsylvania.
- [15] Teman, R. (1977). *Navier Stokes Equations Theory and Numerical Analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York.
- [16] WhiteE, F. (1991). *Viscous Fluid Flow*, Second Edition, McGraw Hill, New York.
- [17] Zdunkowski, W. and Bott, A. (2003). *Dynamics of the Atmosphere: A Course in Theoretical Meteorology*, Cambridge University Press, New York.