



## Elemento finito adaptativo en la solución de la ecuación de Poisson con coeficientes discontinuos.

### Adaptive finite element in the solution of the Poisson equation with discontinuous coefficients.

Maria Cotrina <sup>\*</sup>, Luis Lara <sup>†</sup>, and Obidio Rubio <sup>‡</sup>

Received, Jan. 15, 2015

Accepted, Jun. 15, 2015.

DOI: <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2015.01.01>

#### Resumen

En este trabajo se ha investigado el comportamiento numérico de la solución de la ecuación de Poisson

$$-\operatorname{div}(a(x)\operatorname{grad} u) = f(x), x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

con condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera  $u = 0, x \in \partial \Omega$  y coeficiente  $a(x)$  discontinuo y acotada,  $f(x)$  discontinua, utilizando elementos finitos adaptativos sobre una malla de elementos triangular. Para determinar la solución del problema de contorno se ha generado un programa numérico que implementa el método de los elementos finitos adaptativo sobre una región rectangular llegando a determinar que la solución  $u(x)$  es afectada por la discontinuidad del coeficiente  $a(x)$  y no por la discontinuidad de la función  $f(x)$  para lo cual se ha tenido que refinar la malla sobre los elementos en los cuales se ha detectado el mayor error de aproximación. Para disminuir el error de aproximación de la solución  $u(x)$  se ha tenido de generar un refinamiento estratégico en las zonas del dominio donde la función  $a(x)$  presenta discontinuidades logrando disminuir el error de aproximación.

**Palabras clave.** Elemento finito, refinamiento, malla adaptativa.

#### Abstract

This paper has investigated the numerical behavior of the solution of the Poisson equation

$$-\operatorname{div}(a(x)\operatorname{grad} u) = f(x), x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

with homogeneous Dirichlet conditions at the boundary  $u = 0, x$  in  $\partial \Omega$  and coefficient  $a(x)$  discontinuous and bounded,  $f(x)$  discontinuous, using finite element mesh adaptive on triangular elements. To determine the solution of the boundary value problem has generated a numerical program that implements the method of adaptive finite element on a rectangular region coming to determine that the solution  $u(x)$  is affected by the discontinuity of the coefficient  $a(x)$  and not by the discontinuity of the function  $f(x)$  for which it has had to refine the mesh on the elements which has detected the greatest approximation error. To reduce the approximation error of the solution  $u(x)$  has been to generate a strategic refinement in the domain areas where  $a(x)$  decreasing function discontinuities making the approximation error.

**Keywords.** Finite element, refinement, adaptive mesh.

<sup>\*</sup> Maria Cotrina, Facultad de Ingeniería, Universidad César Vallejo, Trujillo-Perú(mcotrina@ucv.edu.pe).

<sup>†</sup> Luis Lara Romero, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo-Perú(llara@unitru.edu.pe),

<sup>‡</sup> Obidio Rubio, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo-Perú(orubio@unitru.edu.pe).

**1. Introducción.** Los problemas en física e ingeniería muchas veces consisten en resolver ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de contorno y quizás también con condiciones iniciales. Uno de tales problemas es el llamado problema de contorno de Poisson

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x)\operatorname{gradu}) &= f(x), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

donde  $a(x)$  y  $f(x)$  funciones discontinuas.

Tradicionalmente estos problemas han sido resueltos con el método de diferencias finitas (MDF). El método de diferencias finitas imagina el dominio como una malla de puntos, proporcionando una aproximación discreta de la solución. Si bien éste método es muy fácil de aprender y aplicar para obtener la solución de problemas con geometrías simples, cuando la geometría es irregular o cuando presenta una especificación inusual en las condiciones de frontera, la aplicación de diferencias finitas resulta engorrosa. Lara [9], utiliza diferencias finitas para simular el flujo de un fluido en una cavidad rectangular. Rubio [15] utiliza diferencias finitas para el flujo de un fluido en una cavidad con condiciones de Neumann para la presión. A diferencia de método diferencias finitas, el método de elementos finitos (MEF) supone que el dominio está constituido por muchas regiones pequeñas o elementos interconectados. Puesto que estos elementos pueden ser colocados de diversas maneras, pueden ser usados para representar formas excesivamente complejas. Lara [8], utiliza elementos finitos triangular con tres nodos y un grado de libertad por nodo para hallar las cargas hidráulicas del acuífero del Valle de Moche, Trujillo, genera un programa propio que implementa mallas tipo Delaunay. Leonid [10] introduce elementos finitos para la resolución de problemas de la membrana (ecuación de Poisson desde el punto de vista de la mecánica). El procedimiento es adecuado en la práctica, dado que las fuerzas aplicadas son a menudo continuas a trozos. Cotrina [11] utiliza elementos finitos para el cálculo del flujo en medios porosos (suelo) debajo de una represa y por encima de una capa impermeable. Cascón [13] utiliza elementos finitos adaptativos (MEFA) como un algoritmo para resolver una ecuación diferenciales basado en la iteración, en un bucle del tipo: resolver, estimar, marcar, refinar.

Para estudiar el comportamiento numérico de la solución del problema de contorno de Poisson se ha utilizado el método de los elementos finitos con mallas tipo triángulo con tres nodos y un grado de libertad por nodo. Se ha utilizado mallas tipo adaptativa sobre las regiones donde la función  $a(x)$  es discontinua y se ha generado un programa en computadora que implementa el método de los elementos finitos. De las simulaciones numéricas se ha podido observar que la solución  $u(x)$  presenta valores muy grandes sobre la región donde la función  $a(x)$  es discontinua, llegando determinar que el comportamiento de la solución es afectada por la discontinuidad del  $a(x)$  y no de la función externa  $f(x)$ . Para disminuir el error de aproximación de la solución  $u(x)$  se ha generado un refinamiento estratégico en las zonas del dominio donde la función  $a(x)$  presenta discontinuidades para lo cual construido un código numérico en Matlab que genera una malla de elementos triangulares sobre el dominio rectangular. Se ha ejecutado el programa para varias mallas de elementos adaptativos logrando ajustar los parámetros para disminuir el error de aproximación. Estos resultados numéricos han sido contrastados con los resultados analíticos sobre los elementos donde se presenta las discontinuidades llegando a determinarse los mismos valores. De las simulaciones se ha podido observar que los problemas de aproximación de la solución es independiente de las condiciones de contorno. Para verificar este hecho se ha corrido el código numérico para varias condiciones de contorno.

## 2. Material y Métodos.

**2.1. Objeto de estudio.** Para la investigación se ha tomado como referencia los problemas de la física e ingeniería en la cual aparecen ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno y quizás también con condiciones iniciales. Uno de tales problemas es el llamado problema de contorno de Poisson

$$(2.1) \quad -\operatorname{div}(a(x)\operatorname{gradu}) = f(x), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(2.2) \quad u = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

donde  $a(x)$  y  $f(x)$  funciones discontinuas y acotadas.

Se ha realizado un estudio analítico y numérico del comportamiento de la solución  $u(x)$  cuando la función  $a(x)$  es discontinua sobre regiones de un dominio rectangular.

**2.2. Métodos y técnicas.** Para estudiar el comportamiento numérico del problema de contorno de Poisson (2.1)-(2.2) cuando el coeficiente  $a(x)$  es discontinuo sobre subregiones de un dominio rectangular se ha considerado el método de los elementos finitos adaptativo con elementos triángulo con tres nodos y un grado de libertad por nodo.

**2.3. El Método de Galerkin.** En aplicaciones concretas, es importante calcular soluciones aproximadas con un grado de precisión donde el principal obstáculo es la dimension infinita del espacio de Hilbert  $V$ . Muchas veces, sin embargo,  $V$  puede ser escrito como la unión de subespacios finito dimensionales, así que, en principio, esto puede ser razonable para obtener soluciones aproximadas por la ecuación de proyección  $a(u, v) = l(v)$  sobre los espacios  $V_N \subset V$ .

En principio, cuanto mayor sea la dimension del subespacio, mejor debería ser el grado de aproximación. La idea es construir una sucesión de subespacios  $\{V_N\}$  de  $V$  con las siguientes propiedades:

1. Cada  $V_N$  es finito dimensional:  $\dim V_N = N$
2.  $V_N \subset V_{N+1}$
3.  $\bigcup V_N = V$

El método de Galerkin proporciona una forma sistemática de obtener aproximaciones finito dimensionales convergente de problemas variacionales. Para ello consideremos una familia  $\{V_N\}$  de subespacios de dimension finita de  $V$ . Supongamos que para todo  $v \in V$  existe una sucesión  $v_N \in V_N$  tal que:

$$v_N \rightarrow v \text{ en } V, \text{ cuando } N \rightarrow \infty$$

Para probar que  $u_N \rightarrow u$  cuando  $N \rightarrow \infty$ , es decir, la convergencia del método, y dar un control al error de aproximación utilizamos el Lema de Céa.

### 3. Resultados y Discusión.

**3.1. Método de los elementos finitos adaptativos .** Sean  $G$  un conjunto abierto, incluido en  $\mathbb{R}^n$ ,  $H^1(G)$  Espacio de Sobolev (Espacio de funciones en  $L^2(G)$ , con primera derivada también en  $L^2(G)$ ) y  $a(x)$  constante(continua) por partes y positivo.

Así la seminorma  $\|\cdot\|_G$  definida por:  $\|v\|_G^2 = (a\nabla v, \nabla v)_G$  es equivalente a la norma  $H_0^1(\Omega)$  cuando  $G = \Omega$ .

$(\cdot, \cdot)_G$  : representa el producto interno en  $L^2(G)$  y se escribirá  $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_\Omega$ .

Para algún  $f \in L^2(\Omega)$ , la formulación variacional del problema (2.1)-(2.2), es:

$$(3.1) \quad u \in H_0^1(\Omega) : (a\nabla u, \nabla v) = (f, v), \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Para cada nodo  $x$ , sea  $W_x$  la union de todos los elementos  $K$  que tienen el nodo común  $x$ , y sea  $G_x$  todos los elementos  $K \subset W_x$  donde los coeficientes  $a_k$  logran el máximo en  $W_x$ . La distribución de coeficientes  $a_k$ ,  $k \subset W_x$ , será llamada cuasi-monótona con respecto a  $x$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

Para cada elemento  $K \subset W_x$  existe un conjunto Lipschitz  $K_{x,qm}$  con  $K \cup C_x \subset K_{x,qm} \subset W_x$  tal que  $a_k \leq a_{k'}, \forall k' \subset K_{x,qm}, k' \in M_H$

Si  $x$  es un nodo que está en el contorno, se requiere adicionalmente que  $meas_{d-1}(\partial K_{x,qm} \cap \partial\Omega) > 0$ .

Los nodos en los cuales la condición cuasi-monótona no se cumple son llamados nodos singulares.

Para algún  $K \in M_H$ ,  $H_K$  representa su diámetro.

Para algún  $e \in B_H$ ,  $H_e$  representa su diámetro.

$\Omega_e$  : Colección de dos elementos que comparten el lado  $e$

Para algún  $K \in M_H$  y  $e \in B_H$ , sea:

$$W_K = \bigcup \{K' \in M_H : \bar{K}' \cap \bar{K} \neq \emptyset\}$$

$$W_e = \bigcup \{K' \in M_H : \bar{K}' \cap \bar{e} \neq \emptyset\}$$

El siguiente parámetro jugará un rol importante en el análisis

$$\wedge_k := \begin{cases} \max_{k' \in W_k} \frac{a_k}{a_{k'}}, & \text{si } k \text{ tiene un nodo singular;} \\ 1, & \text{otro lugar.} \end{cases}$$

Sea  $\eta_e$  el indicador del error local asociado con  $e \in B_H$  definido como:

$$\eta_e^2 = \sum_{K \in \Omega_e} \wedge_k \|H_k a_k^{-1/2} f\|_{L^2(k)}^2 + \wedge_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2$$

donde:  $\wedge_e = \max_{k \in \Omega_e} \wedge_k$ .

**Teorema 1.** Existe una constante  $c_1 > 0$  que depende sólo del mínimo ángulo de  $M_H$  tal que:

$$\|u - u_H\|_\Omega^2 \leq c_1 \sum_{e \in B_H} \eta_e^2$$

**Prueba:**

Consideremos  $r_H : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_0^H$  que satisfice:

$$a_k^{1/2} \|\phi - r_H \phi\|_{L^2(k)} \leq C \wedge_k^{1/2} H_K \|\phi\|_{W_k},$$

$$\forall \phi \in H_0^1(\Omega), \quad \forall k \in M_H$$

$$a_e^{1/2} \|\phi - r_H \phi\|_{L^2(e)} \leq C \wedge_e^{1/2} H_e \|\phi\|_{W_e},$$

$$\forall \phi \in H_0^1(\Omega), \quad \forall e \in B_H$$

Restando:

$$(a \nabla u, \nabla v) = (f, v)$$

$$(a \nabla u_H, \nabla v_H) = (f, v_H)$$

$$(a \nabla (u - u_H), \nabla (v - v_H)) = (f, v - v_H)$$

□

**Teorema 2.** *Existen dos constantes  $c_2, c_3 > 0$  que dependen sólo del mínimo ángulo de  $M_H$  tal que, para algún  $e \in B_H$ ,*

$$\eta_e^2 \leq c_2 \wedge_e \sum_{k \in \Omega_e} \|u - u_H\|_k^2$$

$$+ c_3 \wedge_e \sum_{k \in \Omega_e} H_k a_k^{-1/2} (f - f_k) \|_{L^2(k)}^2$$

donde  $f_k = \frac{1}{|k|} \int_k f dx$ ,  $\wedge_e = \max_{k \in \Omega_e} \wedge_k$  La prueba lo pueden encontrar en [14]. □

**Observación 1.** *La aparición del factor  $\wedge_e$  es algo molesto, pero sugiere fuertemente que en general no puede ser eliminado.*

**Observación 2.** *En aplicaciones prácticas podríamos encontrar un gran número de diferentes singularidades. En esta situación, podría ser difícil distinguir todos los nodos singulares en el programa en cada iteración adaptativa. Entonces la siguiente estimación ampliada de un error a posteriori podría ser útil.*

$$\eta_e^2 = \sum_{K \in \Omega_e} \bar{\wedge}_k \|H_k a_k^{-1/2} f\|_{L^2(k)}^2$$

$$+ \bar{\wedge}_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2$$

**3.2. El algoritmo adaptativo y su convergencia.** En esta sección mostramos la convergencia de la secuencia adaptativa, basada en la estimación del error a posteriori y el refinamiento estratégico Morin-Nochetto-Siebert. El análisis depende en gran parte de los métodos, y nos centraremos sólo en las diferencias. El principal objetivo aquí es localizar la dependencia de la tasa de reducción del error sobre la variación de los coeficientes, el cual es crucial al examinar la eficiencia del método adaptativo.

**Refinamiento estratégico Morin–Nochetto–Siebert (MNS)**

Dados dos parámetros  $0 < \theta, \hat{\theta} < 1$

1. Seleccionar un subconjunto  $\hat{B}_H$  de lados en  $B_H$  tal que:

$$\left( \sum_{e \in \hat{B}_H} \eta_e^2 \right)^{1/2} \geq \theta \left( \sum_{e \in B_H} \eta_e^2 \right)^{1/2}$$

2. Sea  $\hat{M}_H$  el conjunto de elementos con un lado en  $\hat{B}_H$ . Extienda  $\hat{M}_H$  tal que:

$$\text{OSC}(f, \hat{M}_H) \geq \hat{\theta} \text{OSC}(f, M_H)$$

3. Refinar cada elemento en  $M_H$  de tal manera que un nodo es creado en el interior del elemento.

El análisis de convergencia empieza del resultado de ortogonalidad el cual puede ser fácilmente probado por la ortogonalidad de Galerkin.

**Lema 1.** Si  $M_H$  es un refinamiento local de  $M_H$  tal que  $V^H \subset V^h$ , se tiene la siguiente relación:

$$\|u - u_h\|_{\Omega}^2 = \|u - u_H\|_{\Omega}^2 - \|u_h - u_H\|_{\Omega}^2$$

□

Este lema juega un rol importante en la disminución del error en el análisis de convergencia detalles de la prueba la puede encontrar en [12]. □

**Lema 2.** Sea  $M_h$  un refinamiento de  $M_H$  de acuerdo a la estrategia de refinamiento MNS. Entonces existen constantes  $c_4, c_5 \geq 1$  que sólo dependen del mínimo ángulo de la malla  $M_H$  tal que  $\forall e \in \hat{B}_H$  tenemos:

$$(3.2) \quad \eta_e^2 \leq c_4 \wedge_e \sum_{k \in \Omega_e} \|u_h - u_H\|_k^2 + c_5 \wedge_e \sum_{k \in \Omega_e} \|H_k a_k^{-1/2} (f - f_k)\|_{L^2(k)}^2$$

$$\wedge_e = \max_{k \in \Omega_e} \wedge_k$$

**Prueba:** La presencia del factor  $\wedge_e$  en la medida del error local decrece in (3.2) esto afecta la tasa de reducción del error y por lo tanto el comportamiento global del método adaptativo.

Ahora sea  $\wedge = \max_{k \in M_H} \wedge_k$ , y sumando en  $e \in \hat{B}_H$  en (3.2) obtenemos:

$$(3.3) \quad \sum_{e \in \hat{B}_H} \eta_e^2 \leq 2c_4 \wedge \|u_h - u_H\|_{\Omega}^2 + 2c_5 \wedge \text{OSC}(f, M_H)^2$$

Sabemos que:

$$\left( \sum_{e \in \hat{B}_H} \eta_e^2 \right)^{1/2} \geq \theta \left( \sum_{e \in B_H} \eta_e^2 \right)^{1/2}$$

Luego

$$\sum_{e \in \hat{B}_H} \eta_e^2 \geq \theta^2 \sum_{e \in B_H} \eta_e^2$$

Así

$$(3.4) \quad \sum_{e \in B_H} \eta_e^2 \leq \theta^{-2} \sum_{e \in \hat{B}_H} \eta_e^2$$

Por Teorema 2 y la ecuación (3.4):

$$\|u - u_H\|_{\Omega}^2 \leq c_1 \sum_{e \in B_H} \eta_e^2 \leq c_1 \theta^{-2} \sum_{e \in \hat{B}_H} \eta_e^2$$

Por la ecuación (3.3):

$$\|u - u_H\|_{\Omega}^2 \leq c_1 \theta^{-2} (2c_4 \wedge \|u_h - u_H\|_{\Omega}^2 + 2c_5 \wedge \text{OSC}(f, M_H)^2)$$

Luego obtenemos:

$$(3.5) \quad \|u_h - u_H\|_{\Omega}^2 \geq \frac{\theta^2}{2c_1 c_4 \wedge} \|u - u_H\|_{\Omega}^2 - \frac{c_5}{c_4} \text{OSC}(f, M_H)^2$$

Por Lema 1:

$$\|u_h - u_H\|_{\Omega}^2 = \|u - u_H\|_{\Omega}^2 - \|u - u_h\|_{\Omega}^2$$

Reemplazando en (3.5):

$$\|u - u_H\|_{\Omega}^2 - \|u - u_h\|_{\Omega}^2 \geq \frac{\theta^2}{2c_1 c_4 \wedge} \|u - u_H\|_{\Omega}^2 - \frac{c_5}{c_4} \text{OSC}(f, M_H)^2$$

$$\|u - u_h\|_{\Omega}^2 \leq \left(1 - \frac{\theta^2}{2c_1 c_4 \wedge}\right) \|u - u_H\|_{\Omega}^2 + \frac{c_5}{c_4} \text{OSC}(f, M_H)^2$$

Sea  $\alpha = \left(1 - \frac{\theta^2}{2c_1 c_4 \wedge}\right)^{1/2}$

$$(3.6) \quad \|u - u_h\|_{\Omega}^2 \leq \alpha^2 \|u - u_H\|_{\Omega}^2 + \frac{c_5}{c_4} \text{OSC}(f, M_H)^2$$

□

**Lema 3.** Sea  $\gamma \in (0, 1)$  el factor de reducción del tamaño de elemento asociado con un paso de refinamiento. Dado  $\hat{\theta} \in (0, 1)$ , sea  $\hat{\alpha} = (1 - (1 - \gamma^2)\hat{\theta}^2)^{1/2}$ . Sea  $M_h$  un refinamiento de  $M_H$  de acuerdo a la estrategia de refinamiento MNS entonces tenemos:

$$(3.7) \quad \text{OSC}(f, M_h) \leq \hat{\alpha} \text{OSC}(f, M_H)$$

Detalles de la prueba puede encontrarse en [12]. □

**Teorema 3.** Sea  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\max(\alpha, \hat{\alpha}) < \beta < 1$ , y sea

$$c_0 = \left( \|u - u_0\|_{\Omega}^2 + \frac{c_5}{c_4(\beta^2 - \min(\alpha, \hat{\alpha})^2)} \text{OSC}(f, M_0)^2 \right)^{1/2}$$

Entonces el algoritmo adaptativo basado en la estrategia de refinamiento MNS usando el indicador del error local a posteriori

$$\eta_e^2 = \sum_{K \in \Omega_e} \bar{\lambda}_k \|H_k a_k^{-1/2} f\|_{L^2(k)}^2 + \bar{\lambda}_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2$$

produce una secuencia convergente  $\|u - u_k\|_{\Omega} \leq c_0 \beta^k$

**Prueba:**

Sea  $a_k = \|u - u_k\|_{\Omega}^2$  y  $b_k = \frac{c_5}{c_4} \text{OSC}(f, M_H)^2$

De (3.6):  $a_{k+1} \leq \alpha^2 a_k + b_k$ .

Usando repetidas veces este resultado:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leq \alpha^2 a_k + b_k \\ &\leq \alpha^2 (\alpha^2 a_{k-1} + b_{k-1}) + b_k \\ &\leq \alpha^{2(2)} a_{k-1} + \alpha^2 b_{k-1} + b_k \\ &\leq \alpha^{2(2)} (\alpha^2 a_{k-2} + b_{k-2}) + \alpha^2 b_{k-1} + b_k \\ &\leq \alpha^{2(3)} a_{k-2} + \alpha^{2(2)} b_{k-2} + \alpha^{2(1)} b_{k-1} + b_k \\ &\vdots \\ a_{k+1} &\leq \alpha^{2(k+1)} a_{k-k} + \sum_{j=0}^k \alpha^{2j} b_{k-j} \end{aligned}$$

De (3.7):  $b_k \leq \hat{\alpha}^2 b_{k-1}$

$$b_k \leq \hat{\alpha}^{2(2)} b_{k-2} \leq \hat{\alpha}^{2(3)} b_{k-3} \leq \hat{\alpha}^{2k} b_0$$

Entonces:

$$b_{k-j} \leq \hat{\alpha}^{2(k-j)} b_0.$$

$$a_{k+1} \leq \alpha^{2(k+1)} a_0 + \sum_{j=0}^k \alpha^{2j} \cdot \hat{\alpha}^{2(k-j)} b_0$$

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &\leq a^{2(k+1)}a_0 + \sum_{j=0}^k \alpha^{2j} \hat{\alpha}^{2k} \hat{\alpha}^{-2j} b_0 = a^{2(k+1)}a_0 + \hat{\alpha}^{2k} b_0 \sum_{j=0}^k \left(\frac{\alpha}{\hat{\alpha}}\right)^{2j} \\
&\leq a^{2(k+1)}a_0 + \hat{\alpha}^{2k} b_0 \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{\hat{\alpha}^2}} = a^{2(k+1)}a_0 + \hat{\alpha}^{2k} b_0 \frac{\hat{\alpha}^2}{\hat{\alpha}^2 - \alpha^2} \\
&= a^{2(k+1)}a_0 + \frac{a^{2(k+1)}b_0}{\hat{\alpha}^2 - \alpha^2}
\end{aligned}$$

Sea  $\max(\alpha, \hat{\alpha}) < \beta < 1$ ,  $\rho = \min(\alpha, \hat{\alpha})$

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &\leq \beta^{2(k+1)}a_0 + \frac{\beta^{2(k+1)}b_0}{\beta^2 - \rho^2} = \beta^{2(k+1)} \left[ a_0 + \frac{b_0}{\beta^2 - \rho^2} \right] \\
a_{k+1} &\leq \beta^{2(k+1)} \left[ a_0 + \frac{b_0}{\beta^2 - \rho^2} \right] \\
\sqrt{a_{k+1}} &\leq \beta^{(k+1)} \left[ a_0 + \frac{b_0}{\beta^2 - \rho^2} \right]^{1/2} \\
\|u - u_{k+1}\|_{\Omega} &\leq \beta^{k+1} c_0.
\end{aligned}$$

□

### Observación 3.

1. La tasa de reducción  $\beta$  depende de dos constantes  $\alpha, \hat{\alpha}$ . Usualmente  $\gamma \leq 1/2$ ; del Lema 3 sabemos que  $\hat{\alpha} \leq 0,8$  si  $\hat{\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0,6928$ . Esto es bastante satisfactorio en la mayoría de problemas prácticos envolviendo singularidades fuertes.
2. La dependencia de la reducción del error  $\beta$  sobre el producto del límite superior y límite inferior de las constantes  $c_1, c_4$  es poco revelado. Esto indica que la información precisa del límite superior de la constante  $c_1$  no es importante en el proceso adaptativo basado en la estimación del error a posteriori. Es la estructura inherente de los indicadores de error a posteriori que determina la representación del algoritmo adaptativo.
3. Para el estimador del error

$$\eta_e^2 := \sum_{K \in \Omega_e} \|H_k a_k^{-1/2} f\|_{L^2(k)}^2 + \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2$$

se tiene el siguiente resultado

$$\eta_e^2 \leq \hat{c}_4 \sum_{k \in \Omega_e} \|u_h - u_H\|_k^2 + \hat{c}_5 \sum_{k \in \Omega_e} \|H_k a_k^{-1/2} (f - f_k)\|_{L^2(k)}^2$$

donde  $\hat{\eta}_e^2 = \eta_e^2$  y  $\hat{c}_4, \hat{c}_5$  son constantes positivas que dependen sólo del mínimo ángulo de la malla  $M_H$  es similar a (3.2)

$$\eta_e^2 \leq c_4 \wedge_e \sum_{k \in \Omega_e} \|u_h - u_H\|_k^2 + c_5 \wedge_e \sum_{k \in \Omega_e} \|H_k a_k^{-1/2} (f - f_k)\|_{L^2(k)}^2$$

Si la malla  $M_H$  tiene nodos singulares

$$\|u - u_H\|_{\Omega}^2 \leq C \sum_{e \in B_H} \eta_e^2$$

llega a ser:

$$\|u - u_H\|_{\Omega}^2 \leq \hat{C}_1 \wedge \sum_{e \in B_H} \hat{\eta}_e^2$$

donde la constante  $\hat{C}_1$  depende sólo del mínimo ángulo de la malla  $M_H$ .

Sea  $\{\hat{u}_k\}_{k \geq 1}$  la sucesión generada por el algoritmo adaptativo basado en la estrategia de refinamiento MNS usando el indicador del error local a posteriori

$$\eta_e^2 = \sum_{K \in \Omega_e} \|H_k a_k^{-1/2} f\|_{L^2(k)}^2 + \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2$$

4. Del Teorema 3 esperamos que la tasa de convergencia de  $\|\hat{u}_k - u\|_{\Omega}$  sea similar a  $\|u_k - u\|_{\Omega}$ . Esto es realmente observado de nuestros experimentos numéricos. Sin embargo, desde que nuestro estimador de error enfatiza la contribución de los estimadores de error local de nodos singulares, esto tiene ventajas resolviendo singularidades como pueden ser visto en nuestros resultados numéricos.

La aparición de la cantidad  $\wedge$  en la definición de  $\alpha$  indica que la tasa de reducción del error  $\beta$  será uno cuando el salto de coeficientes es grande. Este hecho también es observado en el experimento numérico. Este punto interesante refleja la esencia o limitación del método adaptativo. Los métodos adaptativos bajo investigación proveen un camino eficiente para encontrar la solución discreta con control de error. Sin embargo, la naturaleza singular de los problemas originales permanecen inalterados y realmente es reflejado en la representación del algoritmo.

#### 4. El problema de contorno de Poisson. Sea el problema de valor de contorno

$$(4.1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x) \cdot \operatorname{grad}(u))=f, & \text{en } \Omega = (0, 2) \times (0, 2); \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde

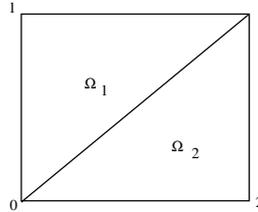


FIGURA 4.1. Dominio del problema de Poisson

$$a(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_1 \\ R, & x \in \Omega_2. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_1 \\ 1, & x \in \Omega_2. \end{cases}$$

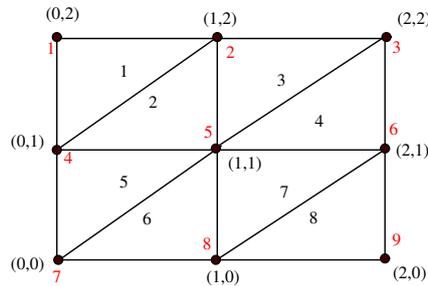


FIGURA 4.2. Discretización del dominio

##### 1. Discretización del dominio

Construimos la matriz de conectividad de nodos locales y globales en la 4.1. De la malla vemos que sólo hay un nodo interior (nodo 5) así que tenemos

CUADRO 4.1  
Matriz de conectividad de nodos

$e$	$\eta(1, e)$	$\eta(2, e)$	$\eta(3, e)$
1	4	2	1
2	4	5	2
3	5	3	2
4	5	6	3
5	7	5	4
6	7	8	5
7	8	6	5
8	8	9	6

$$K_{55} = K_{22}^2 + K_{11}^3 + K_{11}^4 + K_{22}^5 + K_{33}^5 + K_{33}^7$$

$$K_{22}^2 = \frac{1}{4\Delta^2}(\alpha_x^2 b_2^2 b_2^2 + \alpha_y^2 c_2^2 c_2^2) = \frac{1}{2}(2) = 1$$

$$K_{11}^3 = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$K_{11}^4 = \frac{1}{2}(R) = \frac{R}{2}$$

$$K_{22}^5 = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

$$K_{33}^6 = \frac{1}{2}(R) = \frac{R}{2}$$

$$K_{33}^7 = \frac{1}{2}(R + R) = R$$

$$K_{55} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{R}{2} + R = 2 + 2R$$

$$b_5 = b_2^2 + b_1^3 + b_1^4 + b_2^5 + b_3^6 + b_3^7 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Entonces:

$$(2 + 2R)u_5^4 = \frac{1}{2} \Rightarrow u_5^H = \frac{1}{(4 + 4R)}$$

La solución aproximada en la primera malla, es:  $u_H = u_5^H \psi_5^H(x)$

## 2. Estimación del error:

Ahora calculamos el indicador del error local  $\eta_e$ , considerando los elementos 5 y 6.

$$H_5 = H_6 = H_e = \sqrt{2}$$

$$\wedge_5 = 1, \wedge_6 = R$$

$$\wedge_e = R$$

$$J_e = [a(x) \cdot \nabla u_H \cdot \gamma]_e$$

$$[a_e \nabla u_H \cdot \gamma]_e = (a_e \nabla u_H)_6 \cdot \gamma + (a_e \nabla u_H)_5 \cdot \gamma$$

$$u_H = u_5^H \psi_5^H(x) \Rightarrow \nabla u_H = u_5^H \nabla \psi_5^H(x)$$

Pero:

$$(\nabla u_H)_5 = (u_5^H \nabla \psi_5^H)_5 = u_5^H \nabla N_2^5 = u_5^H \left( \frac{1}{2\Delta^5} \begin{pmatrix} b_2^5 \\ c_2^5 \end{pmatrix} \right) = u_5^H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_5^H \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\nabla u_H)_6 = (u_5^H \nabla \psi_5^H)_6 = u_5^H \nabla N_3^6 = u_5^H \frac{1}{2\Delta^6} \begin{pmatrix} b_3^6 \\ c_3^6 \end{pmatrix} = u_5^H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_5^H \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$(a_e \nabla u_H)_6 \gamma = a_6 u_5^H \nabla N_3^6 \cdot \gamma = R \begin{pmatrix} 0 \\ u_5^H \end{pmatrix} \cdot \gamma = R u_5^H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{R u_5^H}{\sqrt{2}}$$

$$(a_e \nabla u_H)_6 \gamma = u_5^H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{u_5^H}{\sqrt{2}}.$$

Entonces

$$J_e = (R+1) \frac{u_5^H}{\sqrt{2}} = \frac{(R+1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4+4R} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \eta_e^2 &= \sum_{K \in \Omega_e} \wedge_k \|H_k a_k^{-1/2} f\|_{L^2(k)}^2 + \wedge_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2 \\ &= \wedge_{k_1} \|H_{k_1} a_{k_1}^{-1/2} f\|_{L^2(k_1)}^2 + \wedge_{k_2} \|H_{k_2} a_{k_2}^{-1/2} f\|_{L^2(k_2)}^2 + \wedge_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2 \\ &= 1 \cdot \|\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 0\|_{L^2(k_1)}^2 + R \|\sqrt{2} \cdot \frac{1}{R} \cdot 1\|_{L^2(k_2)}^2 + R \|\sqrt{4} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}}\|_{L^2(e)}^2 \\ &= R \cdot \int_{k_2} \frac{2}{R} dk_2 + R \cdot \int_e \sqrt{2} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{16(2)} de \\ &= 2 \int_{k_2} dk_2 + \frac{\sqrt{2}}{16(2)} \int_e de = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{16(2)} \sqrt{2} \\ \eta_e^2 &= \frac{17}{16}. \end{aligned}$$

- Indicador del error local  $\eta_e$ , en los elementos 1 y 2.

$$H_1 = H_2 = H_e = \sqrt{2}, \quad \wedge_1 = \wedge_2 = \wedge_e = 1$$

$$\begin{aligned} J_e &= [a \nabla u_H \cdot \gamma]_e = (a \nabla u_H)_1 \cdot \gamma + (a \nabla u_H)_2 \cdot \gamma \\ &= (\nabla u_H)_1 \cdot \gamma + (\nabla u_H)_2 \cdot \gamma = (u_5^H \nabla N_2^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1) \\ &= u_5^H \begin{pmatrix} b_2^2 \\ c_2^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{u_5^H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{u_5^H}{\sqrt{2}} (-2) = \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4(1+R)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}(1+R)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_e^2 &= \wedge_1 \|H_1 a_1^{-1/2} f_1\|_{L^2(1)}^2 + \wedge_2 \|H_2 a_2^{-1/2} f_2\|_{L^2(2)}^2 + \wedge_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2 \\ &= 1 \cdot \|\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 0\|_{L^2(1)}^2 + 1 \cdot \|\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 0\|_{L^2(2)}^2 + 1 \cdot \|\sqrt{2}^{1/2} \cdot 1 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}(1+R)}\|_{L^2(e)}^2 \\ &= \int_e \sqrt{2} \cdot \frac{1}{8(1+R)^2} de \\ \eta_e^2 &= \frac{1}{4(1+R)^2} \end{aligned}$$

- Indicador del error local  $\eta_e$ , en los elementos 3 y 4.

$$H_3 = H_4 = H_e = \sqrt{2}, \quad \wedge_3 = 1, \quad \wedge_4 = R, \quad \wedge_e = R$$

$$\begin{aligned} J_e &= [a\nabla u_H \cdot \gamma] \Big|_e = (a\nabla u_H)_3 \cdot \gamma + (a\nabla u_H)_4 \cdot \gamma \\ &= (\nabla u_H)_3 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (R\nabla u_H)_4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= (u_5^H \nabla N_1^3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (Ru_5^H \nabla N_1^4) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{u_5^H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b_1^3 \\ c_1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{Ru_5^H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b_1^4 \\ c_1^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{u_5^H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{Ru_5^H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{u_5^H}{\sqrt{2}} - \frac{Ru_5^H}{\sqrt{2}} = -\frac{u_5^H}{\sqrt{2}}(1+R) \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_e^2 &= \wedge_3 \|H_3 a_3^{-1/2} f_3\|_{L^2(3)}^2 + \wedge_4 \|H_4 a_4^{-1/2} f_4\|_{L^2(4)}^2 + \wedge_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2 \\ &= 1 \cdot \|\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 0\|_{L^2(3)}^2 + R \|\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot 1\|_{L^2(4)}^2 + R \|\sqrt{2}^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \frac{-1}{4\sqrt{2}(1+R)}\|_{L^2(e)}^2 \\ &= \frac{17}{16} \end{aligned}$$

- Indicador del error local  $\eta_e$ , en los elementos 7 y 8.

$$H_7 = H_8 = H_e = \sqrt{2}, \quad \wedge_7 = R, \quad \wedge_8 = 1, \quad \wedge_e = R$$

$$\begin{aligned} J_e &= [a\nabla u_H \cdot \gamma] \Big|_e = (a\nabla u_H)_7 \cdot \gamma + (a\nabla u_H)_8 \cdot \gamma \\ &= Ru_5^H \nabla N_3^7 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + Ru_5^H \nabla N \\ &= Ru_5^H \begin{pmatrix} b_3^7 \\ c_3^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = Ru_5^H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_e^2 &= \wedge_7 \|H_7 a_7^{-1/2} f_7\|_{L^2(7)}^2 + \wedge_8 \|H_8 a_8^{-1/2} f_8\|_{L^2(8)}^2 + \wedge_e \|H_e^{1/2} a_e^{-1/2} J_e\|_{L^2(e)}^2 \\ &= R \cdot \|\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot 1\|_{L^2(7)}^2 + 1 \cdot \|\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot 1\|_{L^2(8)}^2 + R \|\sqrt{2}^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot 0\|_{L^2(e)}^2 \\ &= R \frac{2}{R} \int_7 d7 + 1 \cdot \frac{2}{R} \int_8 d8 \\ \eta_e^2 &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{2}{R} = 1 + \frac{1}{R} \end{aligned}$$

### 3. Refinamiento de la malla:

Refinamos la malla  $M_H$  en la esquina inferior derecha, porque tiene el mayor error.

Elementos de la matriz global

$$\begin{bmatrix} K_{55} & K_{59} & K_{511} \\ K_{95} & K_{99} & K_{911} \\ K_{115} & K_{119} & K_{1111} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_{55} &= K_{22}^2 + K_{11}^3 + K_{11}^4 + K_{22}^5 + K_{33}^6 \\ &\quad + K_{33}^7 + K_{33}^8 \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{R}{2} + \frac{1}{2} + \frac{R}{2} \\ &\quad + 1 \cdot \left(\frac{R}{4} \frac{R}{4}\right) + 1 \cdot \left(\frac{R}{4} + \frac{R}{4}\right) \\ &= 2 + 2R \end{aligned}$$

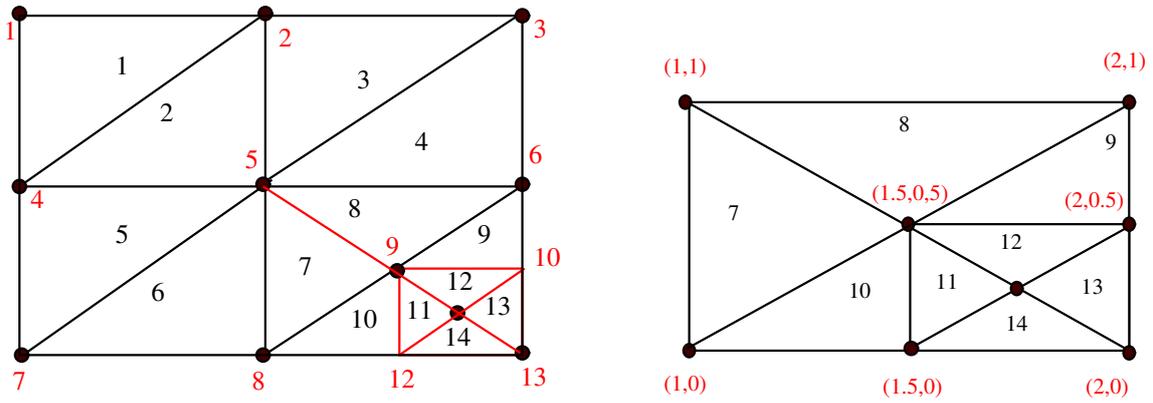


FIGURA 4.3. Refinamiento del dominio

$$K_{59} = K_{31}^8 + K_{32}^7$$

$$= \left[ R \cdot 0 + R \left( -\frac{1}{2} \right) \right] + \left[ -\frac{R}{2} \right]$$

$$K_{511} = 0$$

$$K_{95} = K_{23}^7 + K_{13}^8 = -R$$

$$K_{99} = K_{22}^7 + K_{11}^8 + K_{11}^9 + K_{33}^{10} + K_{33}^{11} + K_{33}^{12}$$

$$= R + R + 2\left(\frac{R}{4}\right) + 2 \cdot \left(\frac{R}{4}\right) + 4 \cdot \left(\frac{R}{16} + \frac{R}{16}\right) + 4 \cdot \left(\frac{2R}{16}\right)$$

$$= R + R + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = 4R$$

$$K_{911} = K_{32}^{11} + K_{13}^{12}$$

$$= 4\left(-\frac{R}{8}\right) + 4\left(-\frac{R}{16} - \frac{R}{16}\right) = -R$$

$$K_{115} = 0$$

$$K_{119} = K_{23}^{11} + K_{13}^{12} = -R$$

$$K_{1111} = K_{22}^{11} + K_{11}^{12} + K_{33}^{13} + K_{33}^{14} = 4R$$

$$b_5 = b_2^2 + b_1^3 + b_1^4 + b_2^5 + b_3^6 + b_3^7 + b_3^8 = \frac{1}{2}$$

$$b_9 = b_2^7 + b_1^8 + b_1^9 + b_3^{10} + b_3^{11} + b_3^{12}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{48} = \frac{7}{24}$$

$$b_{11} = b_2^{11} + b_1^{12} + b_3^{13} + b_3^{14}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{12}$$

Luego el sistema de ecuaciones queda en la forma:

$$\begin{pmatrix} 2+2R & -R & 0 \\ -R & 4R & -R \\ 0 & -R & 4R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_5^H \\ u_9^H \\ u_{11}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{24} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$(30 + 26R)u_{11}^h = \frac{20R + 15}{12R}$$

$$u_{11}^h = \frac{20R + 15}{24R(15 + 13R)}$$

$$u_5^h - 15u_{11}^h = -\frac{5}{8R}$$

$$u_5^h = -\frac{5}{8R} + \frac{5(20R + 15)}{8R(15 + 13R)} = \frac{35}{8(15 + 13R)}$$

$$u_9^h = -\frac{1}{12R} + 4\frac{(20R + 15)}{24R(15 + 13R)} = \frac{9R + 5}{4R(15 + 13R)}$$

La solución aproximada es:

$$u_H = u_5^h \psi_5^h(x) + u_9^h \psi_9^h(x) + u_{11}^h \psi_{11}^h(x)$$

**5. Constrastación.** En la Figura (5.1) se tiene una malla de 14 elementos y 13 nodos,  $a(x)$  con  $R = 0.01$ .

Calculamos en los nodos 5, 9 y 11

$$u_5^h = \frac{35}{8(15 + 13R)} = \frac{35}{8 \times (15 + 13 \times 0.01)} = \frac{875}{3026} \approx 0.2891606081$$

$$u_9^h = \frac{9R + 5}{4R(15 + 13R)} = \frac{9 \times 0.01 + 5}{4 \times 0.01(15 + 13 \times 0.01)} = \frac{12725}{1513} \approx 8.410442828$$

$$u_{11}^h = \frac{20R + 15}{24R(15 + 13R)} = \frac{20 \times 0.01 + 15}{24 \times 0.01(15 + 13 \times 0.01)} = \frac{19000}{4539} \approx 4.185944040$$

Utilizando un programa en computadora se ha obtenido los valores nodales en 5, 9 y 11:  $u_5 = 0.2892$ ,  $u_9 = 8.4104$ ,  $u_{11} = 4.1859$

CUADRO 6.1  
Valores del coeficiente  $a(x)$  con  $R \geq 1$

Nodo	R=1.0	R=5.0	R=10.0
5	0.1549	0.0548	0.0302
9	0.1257	0.0314	0.0165
11	0.0546	0.0126	0.0065
14	0.0197	0.0044	0.0023
17	0.0075	0.0014	0.0007

**6. Ejemplo de aplicación.** Consideremos el problema de contorno de Poisson definida sobre un dominio cuadrado de longitud dos unidades con 22 elementos triangulares y 19 nodos como la que se muestra en la Figura (5.2) y una función externa  $f = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ .

En la Figura (7.1) se muestra que el máximo valor que toma la solución es 0.0811 con  $R = 1$ , para  $R = 5$  es 0.0548 y para  $R = 10$  es 0.0302 en el nodo 9. En la Figura (7.2) se muestra que el máximo valor que toma la solución es 0.9261 con  $R = 0.1$ , para  $R = 0.01$  es 8.4104 y para  $R = 0.001$  es 83.7695 en el

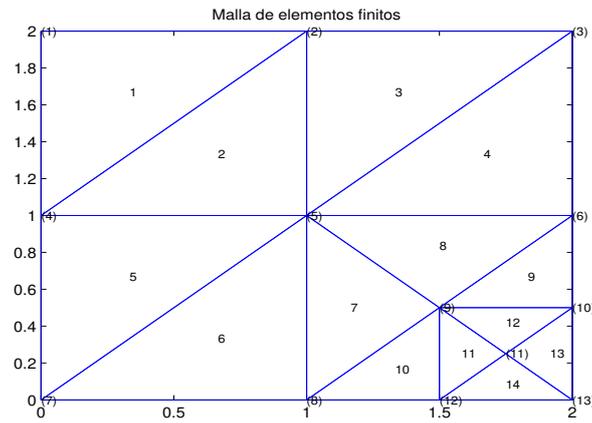


FIGURA 5.1. Malla de elementos finitos adaptativa, 14 elementos, 13 nodos

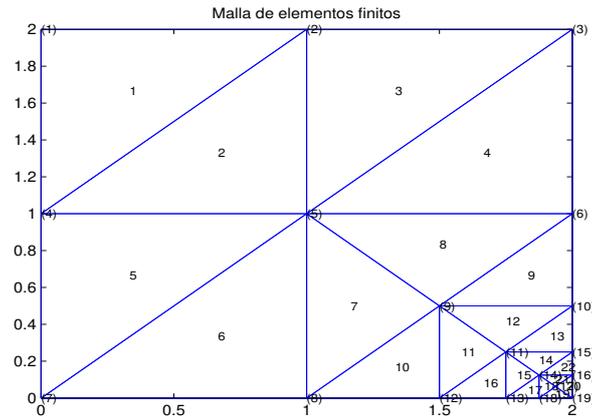


FIGURA 5.2. Malla de elementos finitos adaptativa, 22 elementos y 19 nodos

CUADRO 6.2  
Valores del coeficiente  $a(x)$  con  $R < 1$

Nodo	R=0.1	R=0.01	R=0.001
5	0.2695	0.2892	0.2916
9	0.9261	8.4104	83.7695
11	0.4794	4.2776	43.2128
14	0.1588	1.1810	10.9438
17	0.0562	0.3339	2.8341

CUADRO 6.3  
Valores del coeficiente  $a(x)$  con  $R \geq 1$  y función carga  $f = 100$

Nodo	R=1	R=5	R=10
5	29.0391	10.1663	5.6093
9	16.1565	4.3991	2.3406
11	6.4203	1.5969	0.8362
14	2.2329	0.5300	0.2751
17	0.6884	0.1585	0.0818

nodo 9. En la Figura (7.3) se muestra que el máximo valor que toma la solución es 29.0391 con  $R = 1$ , para  $R = 5$  es 10.1663 y para  $R = 10$  es 5.6043 en el nodo 5. En la Figura (7.4) se muestra que el máximo valor que toma la solución es 97.11 con  $R = 0.1$ , para  $R = 0.01$  es 851.96 y para  $R = 0.001$  es 8390.24 en el nodo 9. En las Figuras (7.5)-(7.6) se muestra las soluciones del problema de contorno con condiciones de Dirichlet no homogéneas sobre todo el contorno. Para la condición de contorno  $u = 100$  en  $\Omega$  se ha

CUADRO 6.4  
Valores del coeficiente  $a(x)$  con  $R \geq 1$  y función carga  $f = 100$

Nodo	R=0.1	R=0.01	R=0.001
5	49.8690	53.7226	541.0000
9	97.1190	851.9643	8390.200
11	46.9404	437.4681	4340.0000
14	17.7258	168.7415	1678.2000
17	5.7335	55.2062	559.8000

CUADRO 6.5  
Valores del coeficiente  $a(x)$  con  $R \geq 1$  y condiciones de contorno no homogéneas

Nodo	R=1	R=5	R=10
5	100.1550	100.0548	100.0302
9	100.1257	100.0314	100.0165
11	100.0546	100.0126	100.0065
14	100.0197	100.0044	100.023
17	100.0077	100.0014	100.0007

CUADRO 6.6  
Valores de  $a(x)$  con  $R < 1$  y condiciones de contorno no homogéneas

Nodo	R=0.1	R=0.01	R=0.001
5	100.2703	100.2905	100.2925
9	100.9410	108.6830	185.5800
11	100.4579	104.8016	146.5957
14	100.1675	101.2004	111.0567
17	100.0231	100.3082	102.6121

obteniendo el mismo comportamiento que para el caso de condiciones nulas en el contorno.

En el cuadro 6.1 se muestra los resultados para valores del coeficiente de difusión  $a(x)$  con  $R$  igual a 1, 5 y 10. El programa muestra que los valores de la solución se comportan en forma regular en estos nodos. En el cuadro 6.2 se dan los resultados para valores del coeficiente de difusión  $a(x)$  con  $R$  de 0.1, 0.01 y 0.001. Se muestra que los valores de la solución crecen demasiado en estos nodos. Esto precisamente se debe a que el coeficiente de difusión es discontinuo para valores de  $R < 1$ .

En los cuadros 6.3 y 6.4 se muestra los resultados numéricos de la solución para una función externa de  $f = 100$  en  $\Omega$ . Se observa que la solución tiene comportamiento similar para otras funciones. En los cuadros 6.5 y 6.6 se muestra los valores de la solución del problema cuando se han cambiando las condiciones de contorno. Se ha considerado una condición no homogénea sobre todo el contorno  $u = 100$  en  $\Omega$ .

**7. Conclusiones.** De los resultados obtenidos se puede concluir que las soluciones numéricas obtenidas con el método de los elementos finitos adaptativo para el problema de contorno de Poisson implementada en un programa en computadora: (1) la discontinuidad del coeficiente  $a(x)$  sobre ciertas regiones del dominio afectan el comportamiento de la solución numérica produciendo valores muy grandes, (2) para valores de  $R$  mayores que 1 se observa que la solución numérica es acotada en toda el dominio, mientras que para valores de  $R$  entre 0 y 1 la solución presenta discontinuidades en la esquina inferior derecha, (3) las discontinuidades que pudiera tener la función externa  $f(x)$  no afecta el comportamiento de la solución numérica, (4) las soluciones siguen siendo estables aún cuando las condiciones de contorno no sean nulas.

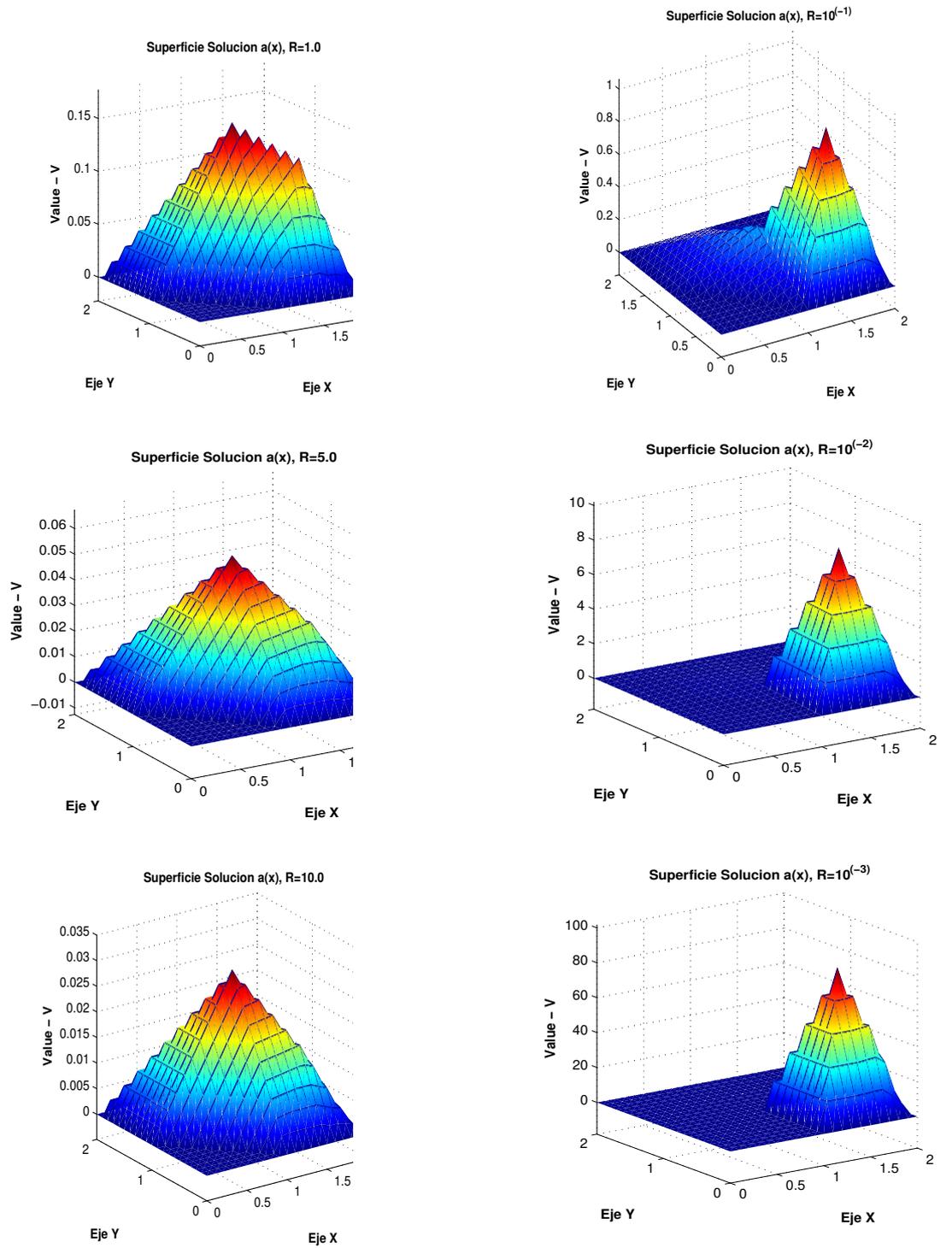


FIGURA 7.1. Superficie solución para  $a(x)$  con  $R \geq 1$

FIGURA 7.2. Superficie solución para  $a(x)$  con  $R < 1$

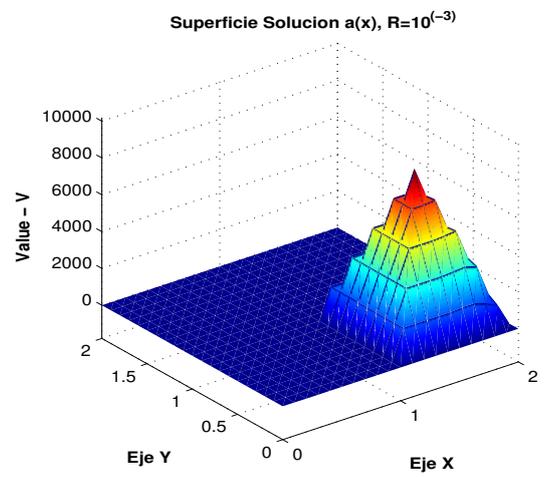
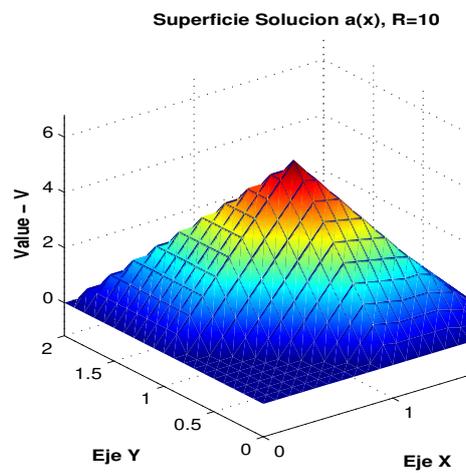
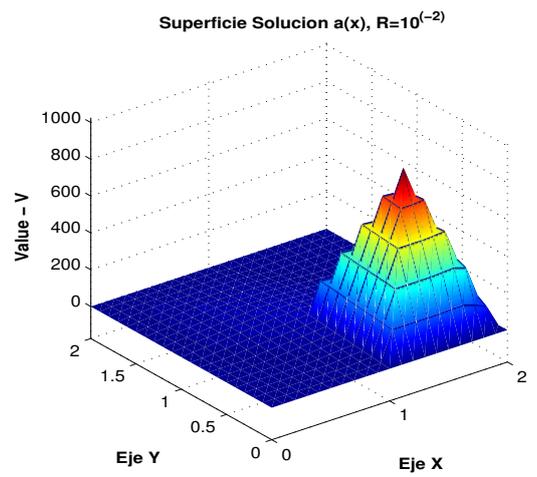
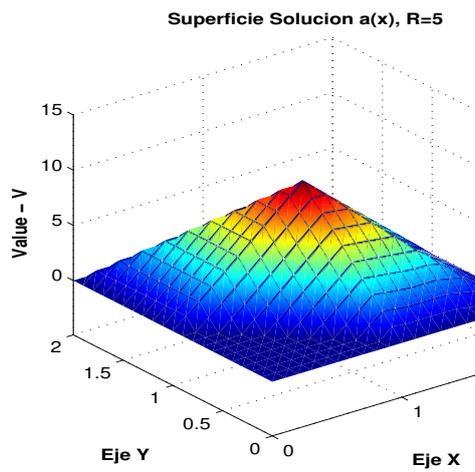
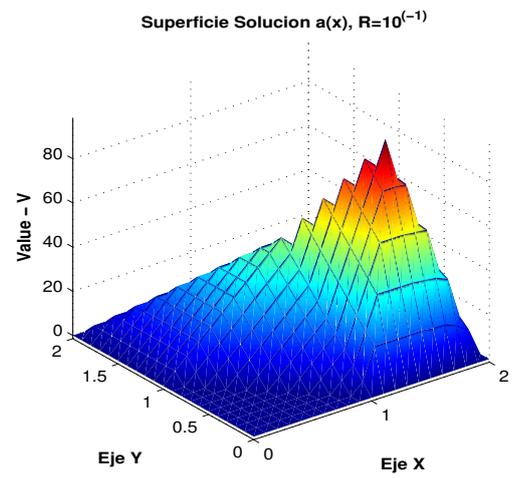
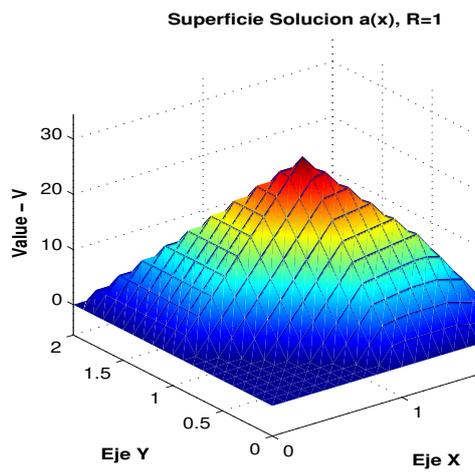


FIGURA 7.3. Superficie solución para el coeficiente  $a(x)$  con  $R \geq 1$  y  $f = 100$

FIGURA 7.4. Superficie solución para el coeficiente  $a(x)$  con  $R < 1$  y  $f = 100$

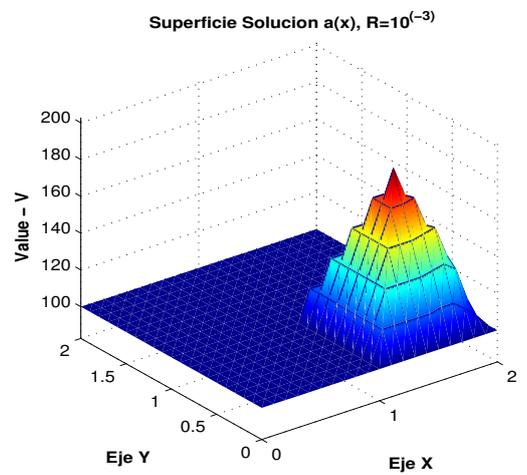
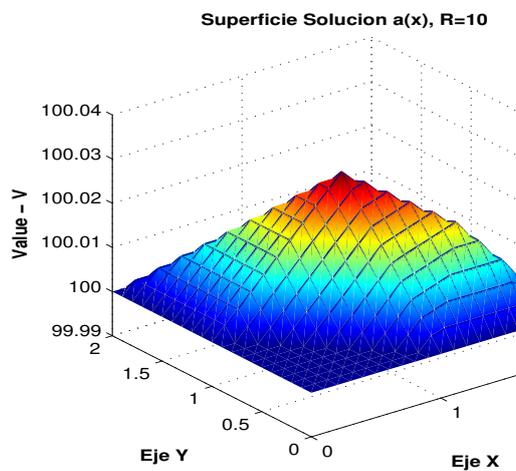
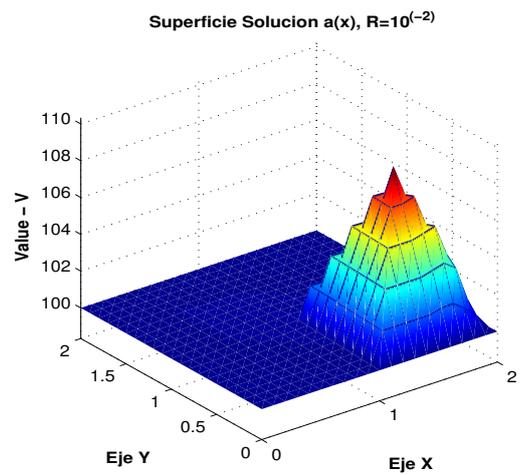
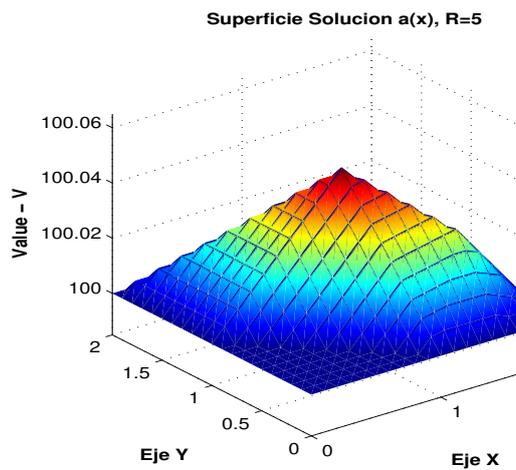
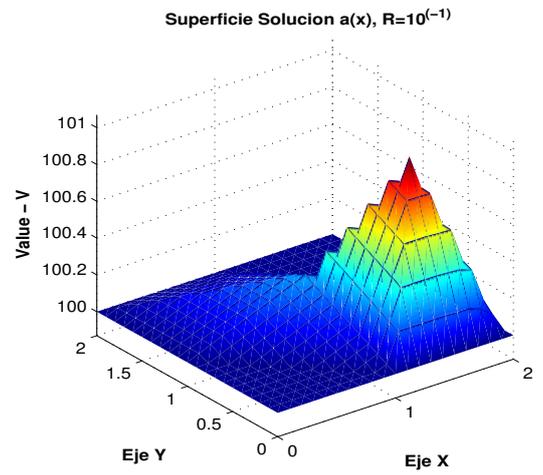
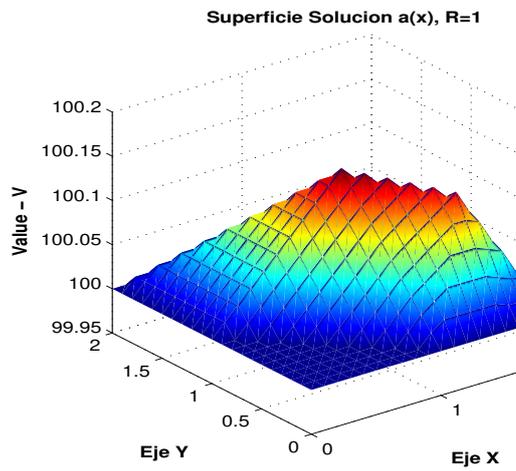


FIGURA 7.5. Superficie solución para el coeficiente  $a(x)$  con  $R \geq 1$  y condiciones de contorno no homogéneas

FIGURA 7.6. Superficie solución para el coeficiente  $a(x)$  con  $R < 1$  y condiciones de contorno no homogéneas

Referencias

[1] J. AKIN. *Finite Element Analysis for Undergraduate*, Academic Press, London, 1986.  
 [2] J. JIN. *The Finite Element Method in Electromagnetics*, Jhon Wiley Sons. Inc., 1993  
 [3] D. MICHAEL AND R. ARLEN. *Modflow Packages Reference Manual*, Printing Office Washington.1988  
 [4] H. SCHWARZ. *Finite Elements Methods*, Academics Press Limited.  
 [5] P. NITHIARASU AND O. ZIENKIEWICZ. Adaptive mesh generation for fluid mechanics problems, *Int.J. Numer. Meth. Engng.*, **19**: 629-662, 2000.  
 [6] M. JONES AND P. PLASSMANN. Adaptive refinement of unstructured finite-element meshes, *Finite Elements in Analysis and Design*, **25**: 41-60, 1997.

- [7] S. BRENNER AND L. SCOTT. *The Mathematical Theory of Finite Elements Methods*, Third Edition, Springer Science+Business Media, LLC, New York, USA, 2008.
- [8] L. LARA. *Método del elemento finito para un acuífero confinado*, Tesis de Doctorado, Biblioteca de Posgrado UNT, 2009.
- [9] LARA L., RUBIO O. Y CARVALHO A., *Flujo de un fluido en una cavidad generada por convección mixta*, Revista Ciencia y Tecnología, ISSN 1810-6781, Escuela de Postgrado, UNT, Vol. 9: 157-171, 2008.
- [10] P. LEONID AND R. O. GROSSI. *La Ecuación de Poisson desde el punto de vista de la mecánica*, Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing., **19,3**: 383-394, 2003.
- [11] M. COTRINA. *El Método de elementos finitos en el calculo de flujo en medios porosos*, Tesis de Pregrado, Biblioteca de Pregrado UNT, 2003.
- [12] M. COTRINA. *El Método de elemento finito adaptativo para la solución de la ecuación de Poisson con coeficientes discontinuos*, Tesis de Maestría, Biblioteca de Postgrado, UNT, 2016.
- [13] J. M. CASCÓN, C. KREUZER, K. SIEBERT AND R. NOCHETO. *Método de Elementos Finitos Adaptativo: Convergencia y Optimalidad*, Univ. de Salamanca, Univ. Augsburg, Univ. Maryland, 2009.
- [14] Z. CHEN AND S. DAI. *On the Efficiency of Adaptive Finite Element Methods for Elliptic Problems with discontinuous Coefficients*, SIAM J.SCI. Comput, Vol 24, 2 ,pp 443-462.
- [15] O. RUBIO, E. BRAVO AND J.R. CLAEYSSSEN. *Thermally Driven Cavity Flow with Neumann Condition for the Pressure*, Applied Numerical Mathematics, 40, pp. 327-336, 2002.