Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 02(01): 20 - 24 (2015)

Aproximación de Funciones Continuas con Rango Pre-compacto.

Approximation of continuous functions Pre- Compact Range.

Esptiben Rojas Bernilla *

Received, Feb. 15, 2015 *Accepted, Jun. 15, 2015.*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2015.01.02

Resumen

Es fundamental en teoría de aproximación, establecer condiciones para pasar de la convergencia puntual a la convergencia uniforme de funciones en ese sentido Hernández [23] estableció algunos resultados relativos al problema de aproximar uniformemente funciones continuas con rango pre-compacto. En este trabajo daremos algunos nuevos resultados al respecto, estableciendo el concepto de $\mathcal{A}-$ separación debil a F, donde $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ y $F \in C(X,E)$.

Palabras clave. Análisis, Topología, Aproximación.

Abstract

It is essential in theory approach, establish conditions to move from the convergence point of convergence uniform duties in this regard Hernández [23] established some results relating to the problem of approximate uniformly continuous functions with pre-compact range. In this paper we will give some new results in this regard, establishing the concept of $\mathcal{A}-$ separation weak to F, where $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ and $F \in C(X,E)$.

Keywords. Analysis, Topology, Approximation.

1. Introducción. En esta sección daremos algunas definiciones y terminología básicas que se usara en el resto del trabajo. En todo el trabajo se considerará X un espacio de Hausdorff completamente regular no vació y E un espacio de Banach real.

Denotaremos por,

$$C(X,E) = \{f : X \to F / f \text{ es continua}\}$$

$$C^*(X,E) = \{f : X \to E / f \text{ es continua y } X \text{ es pre-compacto}\}$$

Si $x \in E$ y $A \subseteq E$ definimos la distancia de x al conjunto A por

$$d(x,A) = \text{ínf}\{\|x-a\| : a \in A\}$$

donde $\|.\|$ denota la norma en E y además

$$B_\epsilon(A) = \{x : x \in E, d(x,A) < \epsilon\}.$$

Si A es un subconjunto de un espacio topológico denotamos por $\overline{A}$ la clausura uniforme de A en este espacio topológico.

*Facultad de Ciencias, Universidad de Magallanes, Avda. Bulnes 01855 Casilla 113 $-$ D, Punta Arenas, Chile (esptiben.rojas@umag.cl).

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoComercial-ShareAlike 4.0.

Dotamos a $C(X,E)$ con la topología de la convergencia uniforme, así para cada $F \in C(X,E)$ y $\forall \epsilon > 0$ un entorno básico para F está definido por el conjunto de la forma

$$N_\epsilon(F) = \{G : G \in \mathbb{C}(X,E), \|F(x) - G(x)\| < \epsilon \text{ para todo } x \in X\}$$

Si $F \in C(X,E),\ \mathcal{G} \subseteq C(X,E)$ y $S \subseteq X$ definimos

$$d_S(F,\mathcal{G}) = \text{ínf}\{\sup\{\|F(x) - G(x)\| : x \in S\} : G \in \mathcal{G}\}$$

(nótese que $d(F,\mathcal{G})$ puede ser $+\infty$)

Escribiremos $C(X)$ por $C(X,\mathbb{R})$.

Si $S \subset X$ y F es una función sobre X escribimos $F|_S$ para la restricción de F sobre S.

Si $\mathcal{G} \subseteq C(X,E)$ entonces $\mathcal{G}|S = \{G|S : G \in \mathcal{G}\}$.

Definición 1. *Si $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ $\mathcal{G} \subseteq C(X,E)$, y α es un número cardinal definimos*

$$\langle \mathcal{G}, \mathcal{A}\rangle_\alpha = \{\sum_{i\in I} h_i G_i / \ |I| < \alpha,\ h_i \in \mathcal{A},\ G_i \in \mathcal{G}\ \}$$

Es claro que si $\mathcal{G}$ es un módulo sobre $\mathcal{A}$, con respecto a la multiplicación puntual de funciones entonces $\langle \mathcal{G}, \mathcal{A}\rangle_{\aleph} \subseteq \mathcal{G}$ y si $\mathcal{A}$ es un sub álgebra de $C(X)$ que contiene la unidad , entonces la inclusión se convierte en una igualdad.

Escribiremos $\langle \mathcal{G}, \mathcal{A}\rangle$ cuando no existe restricción sobre la cardinalidad del conjunto de índices.

Definición 2. *Sea $\mathcal{A} \subset C(X)$ un subconjunto no vació S de X se llama un $\mathcal{A}$ - conjunto antisimétrico de X si f es un elemento de $\mathcal{A}$ y la restricción de f a S es un valor real, entonces la restricción de f a S es constante.* Así para álgebras reales $\mathcal{A}$ un conjunto antisimétrico, es igual a un conjunto donde todas las funciones del álgebra son constantes.

Se define la siguiente relación en X si $p \in X$ y $q \in X$ diremos que $p \sim q$ cuando existe un conjunto $\mathcal{A}$- *antisimétrico* S que contenga a p y q. Esta relación es de equivalencia en X, las clases de equivalencia son los conjuntos $\mathcal{A}$ - *antisimétricos maximales* de X. Luego define una única descomposición de X en conjuntos disjuntos dos a dos, no vacíos.

Denotamos por $\mathcal{A}(X)$ la familia de todas los conjuntos $\mathcal{A}$ - *conjunto antisimétrico* de X

$$\mathcal{A}(X) = \{S \subset X / f|_S = \text{ constante } \forall f \in \mathcal{A}\}$$

Definición 3. *Si $\mathcal{A}$ es un sub álgebra de $C(X,E)$ Decimos que $\mathcal{A}$ es Puntualmente Constante si $\mathcal{A}(X) = \{\{x\} : x \in X\}$*

Definición 4. *Una familia $\{h_\alpha/\alpha \in \mathbb{R}$ de funciones continuas $h_\alpha : X \to I$ es llamada una Partición de la Unidad sobre X si*

1. *Los soportes de h_α forma un cubrimiento cerrado finito de X*
2. $\sum_\alpha h_\alpha(x) = 1\ \ \forall x \in X$

Sea $\{\mathbb{U}_\beta/\beta \in I\}$ es un cubrimiento abierto de X se dice que la partición $\{h_\alpha/\alpha \in I\}$ de la unidad está subordinada a $\{\mathbb{U}_\beta\}$ si el soporte de cada h_β esta contenido en algún $\mathbb{U}_\beta$.

Definición 5. *Si $\mathcal{A} \subseteq C(X),\ \mathcal{G} \subseteq C(X,E)$ y α un número cardinal, diremos que $\mathcal{A}$ α- refina $\mathcal{G}$ cuándo para cada recubrimiento abierto $\mathbb{U}$ de X de la forma*

$$\mathbb{U} = \{G_i^{-1}(B_\epsilon\{G_i(S_i)\}) : G_i \in \mathcal{G}, S_i \in \mathcal{A}(X), i \in I\}$$

existe una partición localmente finita de la unidad $\{h_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{A}$ que está subordinado a $\mathbb{U}$, con $h_i \geq 0$ para todo $j \in J$ y $|J| < \alpha$.

Diremos que $\mathcal{A}$ refina $\mathcal{G}$ cuando no existe restricción sobre la cardinalidad de J.

Definición 6. *Sea $F \in C(X,E)$ y $\mathcal{A} \subseteq C(X)$, diremos que $\mathcal{A}$ separa F cuándo para todo número r y t con $0 < r < t$ y cada $S \in \mathcal{A}(X)$, existe una función $h \in \mathcal{A}$ y una constante real p tal que $h(F^{-1}(\overline{B_r\{F(S)\}}) \geq p > 0$ y $h(X \backslash F^{-1}(B_t(\{F(S)\}))) = 0$*

Observación 1. *Es importante notar que si $\mathcal{A} = C(X)$, entonces toda función $F \in C(X,E)$ está $\mathcal{A}-$ separado por $\mathcal{A}$.*

Definición 7. *Dado $F \in C^*(X,E)$, se dice que $\mathcal{A}$- separa debilmente a F, cuando para toda $B(a,r) \subseteq E$ y $\delta > 0$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que cumple:*

1. $0 \leq f \leq 1$
2. $f|_{F^{-1}(B(a,r))} = 1\ \ y\ \ f|_{X - F^{-1}(B(a,r+\delta))} = 0$

Sea $\mathcal{F} \subset C^*(X,E)$ se dice que $\mathcal{A}$ separa débilmente a $\mathcal{F}$ si $\mathcal{A}$-separa débilmente a G, para todo $G \in \mathcal{F}$

Definición 8. *Sea $F \in C(X,E)$ y $\mathcal{A} \subseteq C(X)$, diremos que $\mathcal{A}$ separa F cuándo para todo número r y t con $0 < r < t$ y cada $S \in \mathcal{A}(X)$, existe una función $h \in \mathcal{A}$ y una constante real p tal que* $h(F^{-1}(\overline{B_r\{F(S)\}}) \geq p > 0$ y $h(X \backslash F^{-1}(B_t(\{F(S)\}))) = 0$

Observación 2. *Es importante notar que si $\mathcal{A} = C(X)$, entonces toda función $F \in C(X,E)$ está $\mathcal{A}-$separado por $\mathcal{A}$.*

Definición 9. *Dado $F \in C^*(X,E)$, se dice que $\mathcal{A}$- separa debilmente a F, cuando para toda $B(a,r) \subseteq E$ y $\delta > 0$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que cumple:*

1. $0 \leq f \leq 1$
2. $f|_{F^{-1}(B(a,r))} = 1$ y $f|_{X-F^{-1}(B(a,r+\delta))} = 0$

Sea $\mathcal{F} \subset C^*(X,E)$ se dice que $\mathcal{A}$ separa débilmente a $\mathcal{F}$ si $\mathcal{A}$-separa débilmente a G, para todo $G \in \mathcal{F}$

2. Algunos resultados previos. Denotaremos por $F - \mathcal{G}$ a la familia $\{F - G/G \in \mathcal{G}\}$

Lema 1. *Si $\mathcal{A} \subseteq C(X), \mathcal{G} \subseteq C(X,E)$ y $F \in C(X,E)$.*

1. *Si $\mathcal{A}$ α-refina a $F - \mathcal{G}$, entonces $d_X(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle)_\alpha) \leq \sup\{d_S(F,\mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X).\}$*
2. *Supongamos que $\mathcal{A}(X)$ es Puntualmente Constante y $\mathcal{G}$ contiene todas las funciones constantes. Si $\mathcal{A}$ α-refina $\{F\}$ entonces $d_X(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_\alpha) = 0$*

Para la prueba ver [23].

Lema 2. *Si $\mathcal{A} \subseteq C^*(X)$ y $\mathcal{G} \subseteq C^*(X,E)$. Entonces $d_X(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle)_\aleph = d_X(F, \langle \mathcal{G}, \overline{\mathcal{A}} \rangle_\aleph)$.* Para la prueba ver [23].

Lema 3. *Sea $\mathcal{A}$ es un subálgebra cerrada uniforme de $C^*(X)$ que contiene a la unidad y $F \in C^*(X,E)$. Si $\mathcal{A}$ separa F entonces $\mathcal{A}$ $\aleph$- refina $\{F\}$.* Para la prueba ver [23].

Usando los Lemas anteriores, se obtiene el siguiente resultado

Teorema 1. *Si $\mathcal{A} \subseteq C^*(X)$, $\mathcal{G} \subseteq C^*(X,E)$ es tal que para cada elemento de $\mathcal{A}(X)$ es Puntualmente Constante y $\mathcal{G}$ contiene las funciones constantes. Si $\mathcal{A}$ separa $F \in C^*(X,E)$, entonces $d_X(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle) = 0$*

Para la prueba ver [23].

3. Algunos nuevos resultados. **Teorema 2.** *Si $\mathcal{A}$ separa a $F \in C^*(X,E)$. Además si $\mathcal{G} \subset C(X,E)$ un subálgebra que contiene a las constantes, entonces $\langle \mathcal{A}, \mathcal{G} \rangle_0$, aproxima uniformemente a F.* **Prueba:**

Sea $\epsilon > 0$ y como F tiene rango pre-compacto, existe

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in X \text{ tal que } F(X) \subseteq B(F(x_1), \epsilon) \cup, \ldots, B(F(x_n), \epsilon)$$

Denotando por $B_j = B(F(x_j), \epsilon)$ y $B^j = B(F(x_j), 2\epsilon)$ y como $\mathcal{A}$-separa a $F \in C(X,E)$, se tiene que

$$\forall j \;\; 1 \leq j \leq n, \text{ existe } h_j \in \mathcal{A} \text{ tal que}$$

- $0 \leq h_j \leq 1$
- $h_j|_{F^{-1}(B_j)} = 1$ y $h_j|_{X-F^{-1}(B^j)} = 0$

Luego $\forall x \in X$, se cumple que $\sum_{j=0}^{n} h_j(x) > 0$. puesto que $x \in F^{-1}(B_j)$ para algún j.

Definiendo por recurrencia

$$g_1 = h_1$$

$$g_i = (1-h_1)(1-h_2)\ldots(1-h_{i-1})h_i \text{ donde } 1 < i \leq n$$

Por inducción sobre $n \in N$ se demuestra que

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1, \quad \forall x \in X$$

Tomando

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) \widetilde{F(x_i)} \in \langle \mathcal{A}, \mathcal{G} \rangle_N$$

donde $\widetilde{F(x_i)}$ es una constante.

Luego se tiene que :

$$\|F(x) - G(x)\| = \|\sum_{j=1}^{n} g_j(x)F(x) - \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\widetilde{F(x_j)}\| \leq \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\|F(x) - \widetilde{F(x_j)}\|$$

observando que $x \in F^{-1}(B_j)$ entonces $\|F(x) - \widetilde{F(x_j)}\| < \epsilon$, por lo tanto

Dado $F \in C^*(X,E)$ existe $G \in \langle \mathcal{A}, \mathcal{G} \rangle$ tal que $\|F - G\| \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. con lo que el teorema queda probado.

Teorema 3. *Si $F \in C*(X,E), \mathcal{G} \subseteq C^*(X,E)$ y $\mathcal{A}$ separa débilmente a $F - \mathcal{G}$ entonces*

$$d_\mu(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_0) \leq \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}$$

Prueba:

Sea $r = \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}$

Si $r = +\infty$ no hay nada que probar.

Si $r < +\infty$ entonces, tomado $\epsilon > 0, \forall S \in \mathcal{A}(X)$ existe $G_S \in \mathcal{G}$ tal que

$$r \leq \|F(x) - G_S(x)\|_S < r + \epsilon$$

donde $x_j \in S_j$. Como A separa a $F - \mathcal{G}$ entonces $\forall j, 1 \leq j \leq n$ existe h_j tal que

1. $0 \leq h_j \leq 1$
2. $h_j|_{(F-G_{S_j})^{-1}(B(F-G_{S_j})(x_j),\epsilon)} = 1$ y $h_j|_{X-(F-G_{S_j})^{-1}(B(F-G_{S_j})(x_j),2\epsilon)} = 0$

Luego $\sum_{1 \leq j \leq n} h_j > 0$ puesto que $x \in (F - G_{S_j})^{-1(B(F-G_{S_j})(x_j),\epsilon)}$.

Definiendo por recurrencia

$$g_1 = h_1$$

$$g_i = (1 - h_1)(1 - h_2) \ldots (1 - h_{i-1})h_i \text{ donde } 1 < i \leq n$$

Por inducción sobre $n \in N$ se demuestra que

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1, \quad \forall x \in X$$

Tomando $G = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j G_{S_j}$ se demuestra como el teorema anterior, que $\|F - G\| \leq \epsilon$, con lo que termina la prueba.

Corolario 1. *Sea $F \in C*(X,E)$ de manera que $\mathcal{A}$ separa a $\{F - G : G \in \mathcal{G}\}$. Si $\mathcal{A}$ es puntualmente constante y $\mathcal{G}$ aproxima puntualmente a F, entonces $\langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_0$ aproxima uniformemente a F.*

Prueba:

Por el teorema anterior

$$d_\mu(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_0) \leq \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}$$

Como $S = \{x\}$ y si $\mathcal{G}$ aproxima puntualmente a F, luego $d_{\{x\}}(F, \mathcal{G}) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0, \ x \in S$

Por lo tanto $d_\mu(F, \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle) < \epsilon$.

Lo que significa que $\langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle_0$ aproxima uniformemente a F.

Referencias

[1] F. Anderson. *Approximation in systems of real-valued continuous functions*.Trans.Amer.Math.Soc. 103 (1962) 249-271

[2] Bartle, Robert G.: *The Elements of Real Análysis*, Segunda Edición, New York,Editorial Wiley,(1976),90-192,315-346.

[3] E. Bishop: *A generalization of the Stone-Weierstrass Theorem*,Pacific J.Math.J.11 (1961).777-783.

[4] R.L.Blair *Extensions of Lebesgue sets and real - valued functions*, Czechoslovak Math.J. 31 (1981). 63-74.

[5] J.Blasco, L.Molto. *On the uniform clasure of a linear space of bounded real-valued funtions*Annali di Matematica Pura ed Applicata 134 (4)1983, 233-239.

[6] J.Blasco. *Hausdorff compactification and Lebesgue set*. Topology and its Application. 15 (1983) 111-117.

[7] J.Blasco. *Conjuntos de Lebesgue y compactaciones de un espacio topologico*.Rev. Real Acad. de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid. 78 (1984) 295-200.

[8] J.Blasco. *Complete bases and Wallman realcompactification.*Proc.Amer.Soc. 75 (1979),114-117.

[9] B.Brosowski; F.Deutsch. *An Elementary Proof of the Stone-Weierstrass Theorem.*Proceedings of the American Mathematical Society,Vol 81, Nª1 (1981),89-92.

[10] R.B.Burkel: *Bishop's Stone-Weierstrass Theorem*, Amer.Math.Monthly 91 (1984). 22-32.

[11] T.Carleman: *Sur un Théoreme de Weierstrass*.1927

[12] Jean-Etienne Rombaldi. *Sur les theoremes de Stone-Weierstrass et de Korovkin*- 9 junio 2003.

[13] Carothes,N.L.: *A Short Course on Aproximation Theory*, Department of Mathematics and Statistics, Bowling green State University,(1998).

[14] D.A.Edwards: *A Short proof of a Theorem of Machado*, Math.Proc. Cambridge Philos.Soc.99 (1986), 111-114.

[15] R. Engelking: *General Topology*, Polish Scientific, Warszawa 1977.

[16] M.Estrada: *Los Teoremas de Ascoli y Stone-Weiertrass, su aplicación en el Análisis Funcional.*(1998) Tesis de Licenciatura.-UNPRG.
[17] J.Galindo, M. Sanchis. *Stone-Weierstrass Type Theorems For Group-Valued Fuctions.*
[18] J. Gomez. *'Algebra de Funciones Continuas Intermedias entre $C^*(X)$ y $C(X)$*Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.1997.
[19] L.Gillman and M.Jerison: *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, Princenton.1960.
[20] A.Hager. *On inverse-closed subalgebras de $C(X)$*. Proc. London. Math. Soc.III Ser.19 (1969) 233-257
[21] A. Hager. *An approximation tecnique for real-valued functions,* General Topoly and its Applications, 1 1971, 127-133.
[22] M.Henriksen. *Unsolved problems on algebraic aspects de $C(X)$*.Lecture Notes in Pure and Appl.Math, 95,Dekker, New York,1985.
[23] S. Hernández. *Approximation and extension de continuos fuctions*
[24] S. Hernández. *Algebra de Funciones Continuas* Tesis Doctoral . Universidad de Valencia. 1983.
[25] E. Hewitt: *Certain representation of the Weierstrass approximation theorem*, Ducke Math., 14 (1947), 419-427.
[26] R.Jewett. *A Variation on the Stone-Weiertrass Theorem*.Proceedings of the American Mathematical Society,Vol 14, Nª5 (1963),690-693.
[27] S.Kakutani. *Concrete representation of abstract (M)-space*,Annals of Math., 42 (1941), 994-1024.
[28] S.Machado: *On Bishop's generalization of the Stone-Weierstrass Theorem*, Indag.Math.39 (1977).218-224.
[29] S.Mrówka. *On some approximation Theorems*, Nieuw Archief voor Wiskunde,XVI (1968), 94-111.
[30] F.Montalvo: *Uniform approximation theorems for real-valued continuous function*, Topology and its Application 45 (1992)145-155 North-Holland.
[31] F.Montalvo y M.I.Garrido. *On Some Generalizations Of The Kakutani-Stone And Stone-Weierstrass Theorems*,Acta Math.Hung.(1993), 199-208.
[32] F. Montalvo Y M.I. Garrido: *Generation of Uniformly Closed Algebras of Functions*Positivity, 8 2005, 8195.
[33] F.Montalvo Y M.I.Garrido. *Algebraic Properties of the Uniform Closure of Space of Continuous Function* Annals of the New York . Academy of Sciences. Volumen 788,(1996)
[34] F.Montalvo y M.I. Garrido. *Uniform approximation theorems for real-valued continuous functions*.Topology and its Application 45 (1992)145-155.North-Holland.
[35] F.Montalvo y M.I. Garrido. *Generation of the uniformly continuous functions*.Topology and its Application, 137 2004, 167174.
[36] M.I.Garrido: *Aproximación Uniforme en Espacios de Funciones Continuas*, Departamento de Matemáticas -Universidad de Extremadura (1990)
[37] A.Pinkus. *Weierstrass and Approximation Theory*
[38] A.Pinkus. *Density in Approximation Theory*-4 julio-2004.
[39] A.Pinkus. *Density Methods And Results in Approximation Theory*.Orlicz Centenary Volume. Banach Center Publication, Volume 64.(2004)
[40] J.Prolla: *Weirstrass-Stone the theorem*,Velag Peter Lang GmbH ,Frankfurt am Main 1993
[41] T.J. Ransford. *One Short elementary proof of the Stone-Weierstrass - Bishop Theorem* , Math, Proc. Cambridge Philos.Soc. 96(1984), 309-311.
[42] E.Rojas. *Aproximación en Espacios de Funciones Continuas*, Trabajo de Investigación -DEA, Universidad Jaume I,Castellón (2006).
[43] W. Rudin. *An'alisis Funcional* Editorial Reverté, S.A.-1979.
[44] Y. Sterfeld. *Dense Subgroups of $C(K)$ Stone-Weierstrass Type Theorems for Groups*Constructive Approximation. 6:339-351 (1990).Springer- Verlag New York Inc.
[45] Y. Sternfeld, Y. Weit. *An Approximation theorem for vector-valued function. In: Geometric Aspects Functional Analysis*Lecture Notes in Mathematics. Belin: Springer-Verlag - 1998.
[46] M.H.Stone, *A generalized Weierstrass approximation theorem*Math. Magazine,21 (1948),167-184, 237-254.
[47] K.Weierstrass. *Sur la possibilité dúne représentation analytique des fonctions dites arbitraires dúne variable réelle*.J.Math.Pure et Appl. 2 (1886) 115-138.