21(1): 53-59, 2018

SCIÉNDO

CIENCIA PARA EL DESARROLLO

Existencia y unicidad de solución de una ecuación de difusión no lineal del tipo parabólico

Existence and uniqueness of solution of diffusion non linear equation of the parabolic type

Teodoro Moore Flores[1,*]; Milton Melciades Cortez Gutiérrez

1 Licenciado en Matemática, Magister en Educación, Departamento Académico de Matemática, Universidad Nacional Del Santa, Chimbote – Perú.

*Autor correspondiente: **temoore64@yahoo.es** (T. More)

Fecha de recepción: 18. 01. 2018. Fecha de aceptación: 27 02 2018

RESUMEN

En la presente investigación se demostró la existencia y unicidad de solución de una ecuación de difusión no lineal del tipo parabólico de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^2\frac{\partial u}{\partial x_i})=f \quad \text{en} \quad Q=\Omega x(0,t)$$

Considerando para ello la ecuación como un operador diferencial se obtuvo una base en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

Donde: $u=0, \sum=\partial\Omega x(0,T)$

$u(0)=u_0 \quad en \quad \Omega$

Palabras clave: operador diferencial; desigualdad de Poincaré; norma estrictamente convexa; distribuciones y espacio de Sobolev.

ABSTRACT

In the present investigation there was demonstrated the existence and uniqueness of solution of a diffussion not linear equation of the parabolic type of the form:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^2\frac{\partial u}{\partial x_i})=f \quad \text{en} \quad Q=\Omega x(0,t)$$

$H_0^1(\Omega)$.

Donde: $u=0, \sum=\partial\Omega x(0,T)$

$u(0)=u_0 \quad en \quad \Omega$

Keywords: Differential operator; Poincaré Inequality; strictly convex norm; distributions and space of Sobolev.

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sciendo.2018.006

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales parciales constituyen una potente herramienta para describir procesos o sistemas que se dan en la naturaleza. En el mundo de la ingeniería son múltiple los ejemplos, desde el estudio del movimiento armónico simple en muelles hasta las ecuaciones no lineales de la mecánica de fluidos, por citar algunos.

Uno de los casos particulares en el vasto conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales lo constituyen las ecuaciones diferenciales parciales lineales de 2º orden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}) = f \quad \text{en}$$
$$Q = \Omega x(0,t)$$

Las cuales son ecuaciones diferenciales parciales las que modelan en su mayoría los problemas en ingeniería.

En la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales parciales se consideran las condiciones iniciales, así como también las condiciones de contorno.

En estos problemas se plantean las siguientes cuestiones:

a. Existencia de solución. Se trata de obtener al menos una solución del problema.
b. Unicidad de la solución. Se trata de probar que existe una única solución, y de existir otra, la diferencia entre ellos será la solución nula.
c. Estabilidad de la solución. Se trata de hallar una solución estable, es decir, ella no cambia bruscamente si hacemos un pequeño cambio en los datos.

La mayoría de las leyes de la física están gobernadas por ecuaciones diferenciales parciales: las ecuaciones de Maxwell, la ley de enfriamiento de Newton, las leyes de Kepler, la ecuación de Navier – Stokes, la ecuación del momentum de Newton, la ecuación de Schrodinger de la mecánica cuántica, la ecuación del telégrafo, la ecuación parabólica en la teoría de control, etc.

Los problemas que involucran ecuaciones diferenciales parciales no lineales han venido siendo desarrollados desde diferentes perspectivas, según la Base de Datos del Ministerio de Educación y Ciencia de España, la Universidad de Sevilla como por ejemplo en el caso de los problemas no lineales de transferencia de calor, existe un modelo del tipo parabólico modelado netamente con herramientas matemáticas basados experimentalmente como son los coeficientes de difusividad térmica del material, etc. (Climent, 1996; Gómez, 1998), seguidamente se han encontrado problemas de difusión (Haim – Brezis, 1983), por otro lado los modelos ya han sido tratados desde el punto de vista numérico tal como muestra Echevarría (1995) en donde se observa una matemática finita, note que también existen modelos relacionados con la dinámica de poblaciones con difusión lineal y no lineal estudiados (Suarez, 1998), recientemente también han sido tratados los problemas de control (Doubova, 2000), así como también existen otros modelos que conllevan a las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas tal como la ecuación de ITO entre los que también tratan en este trabajo de tesis se va estudiar un modelo que involucra la ecuación de difusión basado en un modelo del tipo parabólico para posteriormente tratar sobre las existencia y unicidad de solución (Garrido, 2002).

Por otro lado, las derivadas parciales que aparecen no siempre existen desde el punto de vista clásico es por eso que también se requiere el uso de la teoría de las distribuciones para poder generalizar a una derivada generalizada en la que la solución del modelo a tratar será en los espacios funcionales como son los Espacios de Sobolev, etc.

I. ENUNCIADO DEL PROBLEMA

¿Existe y es única la solución de una ecuación de difusión no lineal del tipo parabólico de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}) = f \quad \text{en} \quad Q = \Omega x(0,t)$$

Considerando para ello la ecuación como un operador diferencial se obtuvo una base en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

Donde: $$u = 0, \sum = \partial\Omega x(0,T)$$
$$u(0) = u_0 \quad en \quad \Omega$$

?.

II. HIPÓTESIS

- Se considera $f \in L^2(\Omega)$.
- El operador diferencial admite una base en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

III. REFERENCIAS TEÓRICAS

ESPACIO DE FUNCIONES DE PRUEBA:

Definición.- Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $u:\Omega \to \mathbb{R}$ una función.
Se llama soporte de u y se denota por $spp(u)$ al subconjunto definido por:
$spp(u)=\{x\in\Omega / u(x)\neq 0\}$.

Definición.- Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, una función $u:\Omega\to\mathbb{R}$, es llamada función de prueba, si cumple las siguientes condiciones:

i. $u\in C^{\infty}(\Omega)$, u es infinitamente diferenciable, con derivadas parciales continuas de todos los órdenes sobre Ω.

ii. $spp(u)\subset K$, K compacto.

Ejemplo. Dada la función:

$$w(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & ,|x|\prec 1 \\ 0 & ,|x|\geq 1\end{cases}$$

i. $w\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, u es infinitamente diferenciable, con derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

ii. $spp(w)\subset K=[-1,1]$, K compacto.

$Ð(\Omega)$: Es llamado Espacio de Funciones de Prueba con soporte compacto.

Convergencia

Definición.- Una sucesión $(u_n)_{n\geq 1}\subset Ð(\Omega)$ converge hacia "u" en $Ð(\Omega)$ si:

i. $spp(u_n)\subset K$, K compacto, $\forall n\in\mathbb{N}$.

ii. $D^{\alpha}u_n\to D^{\alpha}u$, las derivadas convergen uniformemente $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$

($\alpha\in\mathbb{N}^n$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, $\alpha_i\in\mathbb{N}$)

Distribuciones

Definición.- Una funcional lineal $T:Ð(\Omega)\to K$ es llamada distribución si T es continua.
Esto es:

i. T funcional.
Es decir. Para cada función $u\in Ð(\Omega)$, se le asocia un escalar que designaremos por $\langle T,u\rangle$.

ii. T lineal.
Es decir. $\langle T,\alpha u+\beta v\rangle=\alpha\langle T,u\rangle+\beta\langle T,v\rangle$.

iii. T continuo.
Es decir: Para toda sucesión $\{u_n\}$ convergente en $Ð(\Omega)$, sus imágenes $\{T(u_n)\}$ forman una sucesión convergente en K, obteniendo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(T(u_n)\right)=T\left(\lim_{n\to\infty}u_n\right) \quad o \quad \lim_{n\to\infty}\langle T,u_n\rangle=\left\langle T,\lim_{n\to\infty}u_n\right\rangle$$

Por otro lado, se define la suma de distribuciones y el producto por un escalar de la siguiente forma:
$\langle T_1+T_2,u\rangle=\langle T_1,u\rangle+\langle T_2,u\rangle$ y $\langle\alpha T,u\rangle=\alpha\langle T,u\rangle$
Con lo que el conjunto de distribuciones tiene estructura de espacio vectorial sobre K y se designa por $Ð'$ (espacio dual de $Ð$).

Derivada de una Distribución

Definición.- Sea $T:Ð(\Omega)\to K$ una distribución, llamamos derivada de T respecto a x_i y se denota por $\partial_i T$, a una distribución talque verifica:

$$\langle\partial_i T,u\rangle=-\langle T,\partial_i u\rangle=-\int_{\Omega}T.\frac{\partial u}{\partial x_i}dx,\quad \forall u\in Ð(\Omega)$$

ESPACIOS DE SOBOLEV

Definición.- Dado un subconjunto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto acotado, llamamos espacio de Sobolev y se denota por $H^1(\Omega)$, al conjunto de funciones u de $L^2(\Omega)$, cuyas derivadas parciales de primer orden, también pertenecen a $L^2(\Omega)$, junto a las operaciones de funciones de adición y multiplicación escalar.
Es decir:

$$H^1(\Omega)=\left\{u\in L^2(\Omega):\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\Omega);\ i=1,2,...,n\right\}$$

Nota.- Las derivadas parciales en $H^1(\Omega)$, no se entienden en el sentido clásico, sino en el de las distribuciones.

Definición.- Dado un subconjunto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto acotado, llamamos espacio de Sobolev de orden $m\in\mathbb{Z}^+$, y se denota por $H^m(\Omega)$, al conjunto de funciones u de $L^2(\Omega)$, cuyas derivadas parciales en el sentido de las distribuciones de orden menor o igual a m también pertenecen a $L^2(\Omega)$.

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sciendo.2018.006

$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega):\ D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$

$H^1(\Omega)$ es un espacio con producto interno, con el producto interno:

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} =$$

$$\int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$

Demostración. $\forall u, v, w \in H^1(\Omega); \quad \forall \alpha, \beta \in K$

a). $\langle\langle u, u\rangle\rangle \geq 0$

$$\langle\langle u, u\rangle\rangle = \langle u, u\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} =$$

$$\int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \ \geq\ 0$$

$$\langle\langle u, u\rangle\rangle = 0$$

$$\langle\langle u, u\rangle\rangle = \langle u, u\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} =$$

$$\int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \ =\ 0$$

$$\int_\Omega |u(x)|^2\, dx \ =\ 0 \quad \text{y}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \ =\ 0$$

$u(x) \ =\ 0$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \ =\ 0, \forall i = 1...n$$

b). $\langle\langle u, v\rangle\rangle = \langle\langle v, u\rangle\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle\langle u, v\rangle\rangle &= \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \\
&= \int_\Omega v(x)u(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx \\
&= \langle v, u\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \langle\langle v, u\rangle\rangle
\end{aligned}$$

c). $\langle\langle \alpha u + \beta v, w\rangle\rangle = \alpha\langle\langle u, w\rangle\rangle + \beta\langle\langle v, w\rangle\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle\langle \alpha u + \beta v, w\rangle\rangle &= \langle \alpha u + \beta v, w\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega [\alpha u + \beta v](x).w(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial[\alpha u(x) + \beta v(x)]}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}dx \\
&= \alpha\int_\Omega u(x).w(x)dx + \beta\int_\Omega v(x).w(x)dx + \alpha\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}dx + \\
&\quad \beta\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}dx \\
&= \alpha\langle u, w\rangle_{L^2(\Omega)} + \beta\langle v, w\rangle_{L^2(\Omega)} + \alpha\sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad \beta\sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \alpha\langle\langle u, w\rangle\rangle + \beta\langle\langle v, w\rangle\rangle
\end{aligned}$$

$H^1(\Omega)$ es un espacio normado, con la norma:

$$\|u\| = [\int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx]^{1/2}$$

MATERIAL Y MÉTODOS

Se utilizaron diferentes técnicas del análisis funcional tales como estimativa a priori, convergencia débil estrella así como también algunas desigualdades en los espacios L^p además los espacios de Sobolev.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Teorema: Sea $f \in L^{4/3}(\Omega), \mu_0 \in L^2(\Omega)$

$\Rightarrow$ existe una única función $\mu(x,t)$ tal que:

1. $\mu \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$
2. $|\mu|\mu \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$
3. $\hat{\mu}\,\varepsilon L^{4/3}(0,T;w^{-1,4/3}(\Omega))$
4. $$\begin{cases} \mu_t - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\mu|^2 \frac{\partial \mu}{\partial x_i}\right) = f, \\ x \in \Omega,\ t > 0 \end{cases}$$

$\mu(x,0) = \mu_0(x),\ x \in \Omega$

$\mu = 0,$ sobre $\sum = \partial\Omega x(0,T)$

Demostración

Considere las funciones propias (w_j) :

$$(w_j, v)_{H^\gamma(\Omega)} = \lambda_j(w_j, v), \forall v \in H_0^\Upsilon, \Upsilon = \frac{5}{2}$$

Y definamos el problema aproximado:

$$\left(\mu_m'(t), w_j\right) + \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega |\mu_m|^2 \frac{\partial \mu_m}{\partial x_i}.\frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx =$$

$$(f(t), w_j)...(1)$$

$$1 \leq j \leq m, \mu_m(t) \in [w_1, w_2, ...w_m]...(2)$$

Además

$$\mu_m(0) = \mu_{om} \to \mu_o \quad en\ L^2(\Omega)........(3)$$

De (1) y (2)

$$\left(\mu_m'(t), \mu_m(t)\right) + \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega |\mu_m|^2 \frac{\partial \mu_m}{\partial x_i}\frac{\partial \mu_m}{\partial x_i} dx =$$

$$(f(t), \mu_m(t))$$

equivalentemente:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mu_m(t)|^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(|\mu_m|\mu_m)\right]^2 dx =$$

$$(f(t), \mu_m(t))$$

Integrando de 0 a T, se obtiene:

$$\frac{1}{2}\int_o^T \frac{d}{dt}|\mu_m(s)|^2 ds + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2}\int_o^T ds \int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(|\mu_m|\mu_m)\right]^2 dx =$$

$$\int_o^T (f(s), \mu_m(s))ds$$

$$\frac{1}{2}|\mu_m(t)|^2 - \frac{1}{2}|\mu_{om}|^2 + \frac{1}{4}\int_o^T \left\||\mu_m(s)|\mu_m(s)\right\|_{H_0^1}^2 ds =$$

$$\int_o^T (f(s), \mu_m(s))ds$$

$$\frac{1}{2}|\mu_m(t)|^2 + \frac{1}{4}\int_o^T \left\||\mu_m(s)|\mu_m(s)\right\|_{H_o^1}^2 ds =$$

$$\int_o^T (f(s), \mu_m(s))ds + \frac{1}{2}|\mu_{om}|^2 ...$$

$$\leq \int_o^T |f(s)||\mu_m(s)|ds + \frac{1}{2}|\mu_{om}|^2$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_o^T |f(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_o^T |\mu_m(s)|^2 ds +$$

$$\frac{1}{2}|\mu_{om}|^2 ....(4)$$

De donde:

$$\frac{1}{2}|\mu_m(t)|^2 \leq \frac{1}{2}\int_o^T |\mu_m(s)|^2 ds +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T |f(s)|^2 ds + \frac{1}{2}|\mu_{om}|^2$$

Del lema de Gronwall, se deduce que:

$$\frac{1}{2}|\mu_m(t)|^2 \leq C........(5)$$

Es decir:

(μ_m) es un limitado de

$L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.............(6)

También de 4 y 5

$$\frac{1}{4}\int_o^T \left\||\mu_m(s)|\mu_m(s)\right\|_{H_0^1}^2 ds \leq C$$

Es decir:

$|\mu_m|\mu_m$ es un limitado de

$L^2(0,T;H_o^1(\Omega))$..............(7) de (6) y (7) se puede extraer una subsucesión $(\mu_v) de (\mu_m)$ tal que:

$\mu_v \to \mu$ débil estrella en

$L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.........(8)

$|\mu_v|\mu_v \to |\mu|\mu$ débil en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

De la relación (8):

$$\left(\mu_v,v\right)\rightarrow\left(\mu,v\right),\forall v\ \varepsilon\ L^{'}\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$$

Tome $v=\omega\theta,\ \omega\in L^2\left(\Omega\right),\theta\in D\left(0,T\right)$

Consecuentemente

$$\int_o^T\left(\mu_v,v\right)\theta\ dt\rightarrow\int_0^T\left(\mu,v\right)\theta\ dt,\ \ v\rightarrow\infty$$

Multiplicando la ecuación aproximada por $\theta\in D\left(0,T\right)$ e integrando de 0 a T, se obtiene:

$$-\int_o^T\left(\mu_v,v\right)\theta'(t)\,dt+\int_0^T\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\left|\mu_v\right|^2\frac{\partial\mu_v}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i}\theta(t)dt=$$

$$\int_0^T\left(f(t),v\right)\theta(t)dt$$

Cuando $v\rightarrow\infty$

$$-\int_o^T\left(\mu,v\right)\theta^{'}\left(t\right)dt+\int_0^T\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\left|\mu\right|^2\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}.\theta\ dt=$$

$$\int_0^T\left(f(t),v\right)\theta(t)dt$$

Por lo tanto:

$$\int_o^T\left[\frac{d}{dt}\left(\mu\left(t\right),v\right)-\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial\mu}{\partial x_i}(\left|\mu\right|^2\frac{\partial\mu}{\partial x_i})v\right]\theta dt=$$

$$\int_0^T\left(f(t),v\right)\theta\left(t\right)dt$$

$$\therefore\frac{d}{dt}\left(\mu\left(t\right),v\right)-\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\mu\right|^2\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right)v=$$

$$\left(f(t),v\right)\forall v\in H_0^1(\Omega)$$

en el sentido de las distribuciones de $D\left(0,T\right)$.

Por otro lado para

$$\theta\ \varepsilon\ C^{'}\left(\left[0,T\right];\square\right),\theta\left(0\right)=1,\theta\left(T\right)=0$$

Se tiene: $\forall v\in H_0^1(\Omega)$

$$\lim_{v\rightarrow\infty}\int_0^T(\mu_v(t),v)\theta'(t)dt=\int_0^t(\mu(t),v)\theta'(t)dt$$

Integrando por partes:

$$\lim_{\alpha\rightarrow\infty}\left\{-\int_0^T(\mu'_v(t),v)\theta(t)dt-\left(\mu_v(0),v\right)\right\}=$$

$$-\int_0^T(\mu'(t),v)\theta(t)dt-\left(\mu(0),v\right)\Rightarrow$$

$$\lim_{v\rightarrow\infty}\left(\mu_v\left(0\right),v\right)=\left(\mu(0),v\right)$$

$$\lim_{v\rightarrow\infty}\left(\mu_{0v},v\right)=\left(\mu\left(0\right),v\right)$$

$$\left(\mu_0,v\right)=\left(\mu\left(0\right),v\right)\Rightarrow\mu(0)=\mu_0$$

Note que si P_m es el operador proyector ortogonal en $L^2(\Omega)$ sobre $\left[w_1,w_2,...,w_m\right],P_m$ es limitado en $\ell(H_0^r(\Omega),H_0^r(\Omega))$ e $\ell(H^r(\Omega),H^{-r}(\Omega))$,

Consecuentemente

$\mu_m=P_m\left(g\ (\mu_m^{'})+f\right)$ donde $g(\mu_m^{'})$ es el término no lineal del problema aproximado.

Es decir $(\mu_m^{'})$ es un limitado de $L^{4/3}\left(0,T;H^{-5/2}\left(\Omega\right)\right)$

Por lo tanto:

$$\mu^{'}=f-\frac{1}{3}\Delta\left(\left|\mu\right|^2\mu\right)\in L^{4/3}\left(0,T;w^{-1,4/3}\left(\Omega\right)\right)$$

Unicidad

$$\begin{cases}\mu_t-\displaystyle\sum_{n=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\mu\right|^2\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right)=f\\ \text{............(1)}\\ \qquad\qquad\mu(x,o)=\mu_0(x)\end{cases}$$

Sea $w=\mu-v$

Para μ y v solución de (1)

Luego se tiene $w^1-\frac{1}{3}\Delta\left(\left|\mu\right|^2\mu-\left|v\right|^2v\right)=0$

Tomado el producto escalar por

$$\left(-\Delta\right)^{-1}w\Rightarrow\left(w^{'},w\right)_{H^{-1}}+$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}\left(\left|\mu\right|^2\mu-\left|v\right|^2v,\mu-v\right)}_{\alpha}=0$$

Pero $\left(f,g\right)_{H^{-1}}=\left(f,(-\Delta)^{-1}g\right)$

De la monotonía $\left(\left|\mu\right|^2\mu-\left|v\right|^2v,\mu-v\right)\geq0$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w\right\|^2=\left(w^{'},w\right)\leq0$$

$$\Rightarrow w(t)=0\Rightarrow\mu=v$$

Observación $\lambda\rightarrow\left|\lambda\right|^2\lambda$ es monótona.

Para encontrar la existencia de solución se ha usado el lema de Gronwall a la desigualdad:

$$\frac{1}{2}\left|\mu_m(t)\right|^2\leq\frac{1}{2}\int_o^T\left|\mu_m(s)\right|^2ds+$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T\left|f(s)\right|^2ds+\frac{1}{2}\left|\mu_{om}\right|^2$$

Y mediante las técnicas del análisis funcional vale decir convergencias débiles llegamos a encontrar la solución. Para la unicidad también se usa el lema de Gronwall.

CONCLUSIONES

Se demostró la existencia y unicidad de solución de una ecuación de difusión no lineal del tipo parabólico de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}) = f \quad \text{en}$$

$$Q = \Omega x(0,t)$$

Considerando para ello la ecuación como un operador diferencial se obtuvo una base en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

Donde $u = 0, \sum = \partial\Omega x(0,T)$ y

$$u(0) = u_0 \quad en \quad \Omega .$$

Para encontrar la solución se ha usado el lema de Gronwall a la desigualdad y utilizando técnicas del análisis funcional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Climent, B. 1996. Soluciones débiles y renormalizadas de algunas Ecuaciones en Derivadas Parciales no Lineales con Origen en Mecánica de Fluidos. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, Sevilla. España.

Doubova, A. 2000. Análisis y control de algunas EDP no lineales con origen en mecánica. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, Sevilla. España.

Echevarría, R. 1995. Algunas aplicaciones del Método de Elementos Finitos a Problemas en Derivadas Parciales No Lineales. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, Sevilla. España.

Garrido, J. 2002. Algunos resultados de Existencia, Unicidad y estabilidad para EDP Funcionales Estocásticas no Lineales. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, Sevilla. España.

Gómez, M. 1998. Estudio Matemático de algunos problemas no Lineales de la Mecánica de Fluidos Incompresibles. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, Sevilla. España.

Haim, B. 1983. Fonctiionelle analyce et applications edit Maisson. Paris.

Suarez, A.1998. Propiedades de las soluciones de sistemas estacionarios de la dinámica de poblaciones con difusión lineal y no lineal. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, España.

.

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sciendo.2018.006