REVISTA DE INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA
Revista Electrónica
Universidad Nacional de Trujillo

DISTRIBUCIÓN ÓPTIMA DE LA INVERSIÓN EN ACTIVOS DE LA BOLSA DE VALORES DE LIMA-2017

OPTIMAL DISTRIBUTION OF INVESTMENT IN ASSETS ON THE LIMA-2017 STOCK EXCHANGE

Wilson Guillermo Díaz Araujo*[1], Martha Reneé Cardoso Vigil[1], Sergio Albert Chafloque Viteri[1], Diego Renato Risco Cosavalente[2], Ana Elizabeth Paredes Morales[2]

[1] Departamento Académico de Estadística de la UNT, Trujillo-La Libertad, Perú
[2] Escuela Académico Profesional de Estadística de la UNT, Trujillo-La Libertad, Perú.

RESUMEN

En esta investigación se presenta una técnica informática para distribuir, óptimamente, la inversión entre cuatro activos de la Bolsa de Valores de Lima (BVL) para inicios del año 2018: Scotiabank, Graña y Montero, Alicorp S. A. y Enel Generación Perú (antes, Edegel), pertenecientes a los rubros Bancos y Financieras, Diversas, Industriales Comunes y Servicios Públicos, respectivamente, haciendo uso de la programación cuadrática. La importancia de la investigación radica en presentar el estudio económico de la BVL, mediante el análisis de la matriz de covarianzas entre la rentabilidad anual de dichos activos. La información fue procesada con los programas computacionales WinQSB y EXCEL, lo que arrojó como resultado distribuir la inversión del siguiente modo: el 21% del total debe invertirse en Scotiabank, el 9% en Graña y Montero, el 44% en Alicorp y el 26% debe invertirse Enel Generación Perú.

Palabras clave: Matriz de covarianzas, Programación Cuadrática, Distribución Óptima de la Inversión

ABSTRACT

In this research, it is presented an informatic technique to deal in optimal conditions, the inver sion between four assets in the stock exchange from Lima for 2018, they are: Scotiabank, Gra ña y Montero, Alicorp S. A. and Enel Generacion Peru, belonging to Banks and Financier, Di verse, Common Industrials and Public Services rubrics respectively by using the cuadratic pro gramming. The importance of the research lies on the presentation on the economic study of t he Lima Stock Exchange, through the analysis of the matrix of covariances between the annua ly profitability of those asset. The information was processed with the computing programme s WinQSB y EXCEL, the result was to distribute the inversion in the following way: 21% fro m the total must be invested in Scotiabank, 9% in Graña y Montero, 44% in Alicorp and 26% in the EnelGeneracion Peru.

Key words: covariance matrix, quadratic programming, optimal distribution of the inversion

*: Departamento Académico de Estadística de la Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n Trujillo-La Libertad, Perú
Correo electrónico: Wdiaz@unitru.edu.pe

1. INTRODUCCIÓN

Los grandes economistas, estudiosos del tema de rentabilidad y riesgo en el manejo de una cartera de inversiones, han tratado de desarrollar fórmulas matemáticas con el fin de calcular de antemano las posibles expectativas de retorno de una inversión, procurando minimizar el universo de riesgos a los que están expuestos. La teoría de portafolios creada en 1952 por Markowitz revolucionó todo lo relacionado con las inversiones, sentando los principios básicos que rigen la relación rentabilidad-riesgo. Markowitz decía que, para minimizar el riesgo, había que invertir en más de un instrumento, introduciendo la idea de diversificación, y que la combinación de dos activos o más creaban una cartera o portafolio de inversión. Una de las premisas de esta teoría está constituida por el objetivo principal del estudio, que consiste en determinar la proporción a invertir en cada título. En el modelo de Markowitz, el objetivo puede ser la minimización del riesgo, dada una rentabilidad esperada (Piñol, 2014; Geller, 2013).

Markowitz contribuyó significativamente a la teoría moderna financiera mediante la técnica denominada análisis de media-varianza, planteándolo a través de la solución de un problema de optimización cuadrática. Este enfoque ha tenido un gran impacto sobre las economías financieras y es de actualidad en las finanzas modernas (Fan et.al., 2012; Rodríguez, 1981).

Este problema se puede aplicar para una persona que deba tomar la decisión de invertir su presupuesto a un plazo considerable (digamos, a un año) con la finalidad de lograr el mejor retorno de su inversión.

A modo de ilustración, se considera que un fondo de ahorro para el retiro, el cual ha operado desde hace 12 años en Grupo Financiero Banorte (GFNORTE). La variabilidad en el rendimiento de la inversión en estos últimos 12 años ha sido aproximadamente 0.0026 (ver siguiente tabla de "Matriz de covarianza"). Las varianzas y covarianzas entre los retornos de inversión (rentabilidades), así como la rentabilidad media anual para tres activos diferentes se describen a continuación:

Matriz de covarianza

	Banorte	Banamex	HSBC
Banorte	0.00258	-0.00025	0.0044
Banamex	-0.00025	0.00276	-0.00542
HSBC	0.0044	-0.00542	0.03677

Rentabilidad promedio (%) 7.64 13.43 14.93

Es previsible que por medio de un instrumento de inversión se tenga acceso a mayores rendimientos, pero con el consiguiente incremento en la variabilidad de estos últimos. A este fenómeno se le denomina riesgo del instrumento.

En la tabla anterior se puede observar que Grupo Financiero Banamex (Banamex), durante los últimos 12 años produjo en promedio un retorno de la inversión de 13.43%, mientras que Grupo Financiero HSBC generó un rendimiento promedio de 14.93%. En cuanto a la matriz de covarianza, ésta indica que las variabilidades en el retorno anualizado para Banorte, Banamex y HSBC son de 0.00258, 0.00276 y 0.03677, respectivamente. Tal como ya se mencionó, a mayor variabilidad o varianza en la rentabilidad del instrumento, mayor es su riesgo. El planteamiento de este caso consiste en determinar cuáles son los porcentajes óptimos que el portafolio (fondo) de inversiones debe brindar, con la finalidad de alcanzar un retorno esperado de la inversión, digamos, mayor al 12% y lograrlo con el mínimo riesgo posible. Al aplicar la programación cuadrática para responder a esta cuestión se concluyó que los porcentajes de inversión óptimos en Banorte, Banamex y HSBC son 27%, 63% y 9%, respectivamente (Montufar, 2009). En dicha determinación debe asegurarse que los porcentajes sumen 100%. El valor en riesgo, es hoy día una de las medidas de riesgo más empleadas comúnmente, tanto por reguladores como por los demás actores de los mercados financieros en todo el mundo. Dicho valor mide la máxima pérdida esperada para un determinado horizonte de tiempo. Si estamos analizando el riesgo de un fondo de pensiones, el horizonte puede ser de hasta un año (Montufar, 2009; Swift, 2010; Alonso, Berggrun, 2015), como es el caso del presente estudio. Similar estudio se hizo con activos ofertados por la Bolsa de Valores de Caracas-Venezuela (Conti, 2009).

El riesgo es la eventualidad de que las cosas no salgan como se planearon. La finalidad de la teoría de la cartera es encontrar una combinación de activos que ofrezcan el mayor rendimiento esperado, dado un nivel de riesgo. La teoría de la cartera busca que el inversor obtenga la adecuada combinación de rentabilidad-riesgo. En la presente investigación nos centraremos en el modelo de Markowitz, ganador del Premio Nobel de Ciencias Económicas en 1990. El modelo está planteado desde la óptica del inversor individual y no entra a detallar cuáles son las consecuencias de su uso para el conjunto del mercado (analizado por el modelo CAPM: Capital Asset Pricing Model o Modelo de Valuación de Activos de Capital, y que no será considerado en esta investigación). El conjunto de carteras eficientes puede ser calculado resolviendo un programa cuadrático paramétrico. (Court, Tarradellas, 2010).

La alternativa ideal para invertir siempre dependerá del grado de riesgo que se desee asumir y la cantidad de dinero que se desee ganar.

En el Perú, es muy conocido que el gobierno promulgó, a inicios del año 2016, la ley de retiro del 95.5% de fondos de AFP para los afiliados que tengan 65 años o más. El afiliado a partir de los 65 años de edad podrá elegir entre percibir la pensión que le corresponda en cualquier modalidad de retiro, o solicitar a la AFP la entrega hasta 95.5% del total del fondo disponible en su Cuenta Individual de Capitalización (CIC) en las armadas que considere necesarias. Entre las alternativas para invertir el dinero de las AFP se pueden considerar las siguientes: Retiro programado o renta vitalicia, depósitos a plazo, inmueble, fondos mutuos, Bolsa de valores y negocios. Con respecto a la inversión en la Bolsa de Valores, se puede contratar un agente de bolsa o mediante plataformas electrónicas que ahora existen, dependiendo de su interés. Sin embargo, se debe tener presente que el mercado bursátil es uno de los más volátiles y, por lo tanto, es recomendable que se tome esta opción si se tiene algún tipo de conocimiento en el sistema, o si se quiere arriesgar, que sea con dinero que no se considere necesario (El Comercio, Perú 21). En la presente investigación se abordará la alternativa de una inversión en la Bolsa de Valores de Lima, proporcionando el conocimiento adecuado desde el punto de vista de la Investigación de Operaciones; específicamente, de la Programación Cuadrática. En los modelos de programación lineal, la suposición característica es la linealidad de la función objetivo y de las restricciones. Aunque esta suposición se cumple en numerosas situaciones prácticas, aún nos encontramos con muchas situaciones donde la función objetivo y algunas de todas las restricciones son funciones no lineales (Ghadle, 2015; Siemens, 1973), como ocurre con la Programación Cuadrática.

Uno de los objetivos de las inversiones financieras consiste en diseñar carteras de inversión, aplicando el principio de diversificación. El horizonte temporal, al realizar una inversión financiera que tenga en cuenta la rentabilidad y el riesgo, es de un período base de un año, transcurrido entre el momento inicial de la inversión y el período final de la misma. El inversor racional es el que maximiza la rentabilidad y minimiza el riesgo: Invertir con riesgo (apostar) a fin de tener la posibilidad de conseguir la máxima rentabilidad posible. Pero se debe apostar, pues nadie ofrece rentabilidad sin apostar. Para ello, se considera los siguientes pasos fundamentales en el diseño óptimo de carteras:

(a) Escoger adecuadamente un número determinado (relativamente pequeño) de títulos entre los que se negocian en el mercado financiero.
(b) Distribuir adecuadamente (y agotar) el presupuesto de inversión entre los títulos escogidos: diversificación
(c) Calcular la rentabilidad esperada y el riesgo de la cartera, de modo que dicho riesgo coincida con el soportable y tal rentabilidad esperada sea la mayor posible para ese riesgo.

Para el presente estudio se ha considerado la siguiente información correspondiente a la rentabilidad anual de cuatro activos (Scotiabank, Graña y Montero, Alicorp S.A. y Enel Generación Perú) que se negocian en la Bolsa de Valores de Lima, tal como se muestra en la siguiente tabla (Tabla 1), los cuales tienen una rentabilidad media anual positiva, variabilidad menor a la de los demás activos y seleccionados con la idea de diversificación. En esta Tabla se han incluido los años 2016 y 2017, que no se consideraron, al momento de hacer el proyecto de investigación, pues, no se contaba con la información de estos años.

Tabla 1: Rentabilidad anual (%) de cuatro activos que se negocian en la Bolsa de Valores de Lima

AÑO	SCOTIABANK	GRAÑA Y MONTERO	ALICORP S.A.	ENEL GENERACIÓN PERÚ
2007	-2.9	92.5	15.2	17.6
2008	-47.6	-56.1	-49.5	-29.9
2009	120.2	44.5	107.2	22.9
2010	84.49	137.86	138.05	71.25
2011	-29.33	2.57	-1.55	-6.45
2012	24.36	44.78	42	33.76
2013	-11.08	44.21	10.99	21.76
2014	12.33	-24.72	-10.59	24.45
2015	-4.3	-72.26	-18.42	-14.07
2016	72.74	141.17	26.89	8.46
2017	28.23	-60.21	47.85	-21.69
Media	22.47	26.75	26.01	11.64
Coeficiente de variación	216.99	271.80	204.54	236.02

Gestión (diciembre de 2007, 2008, …, 2017)

Se trata de determinar el porcentaje del presupuesto que el inversor debe asignar al i-ésimo instrumento de inversión para un período futuro, con el fin de minimizar el riesgo de la inversión, sujeto a la restricción de obtener una mínima rentabilidad esperada. Los datos pertinentes para los años 2016 y 2017 se obtuvieron del Diario Gestión, al final del mes de diciembre de cada año. Para resolver este problema, formalmente, se puede aplicar la programación cuadrática, para lo cual definiremos las variables de decisión y las restricciones, así como declararemos la función objetivo.

Definición de las variables de decisión

Tomando en cuenta que, en este problema, el punto de partida es la existencia de cuatro instrumentos de inversión, para la formulación del modelo del uso de las siguientes variables de decisión, se requiere conocer:

p_i: proporción del capital total a ser invertido en el instrumento de inversión i-ésimo (i = 1, 2, 3, 4), representando cada número los activos Scotiabank, Graña y Montero, Alicorp S.A. y Enel Generación Perú, respectivamente.

Estas variables de decisión deben ser positivas y no exceder de 1. Por tanto:

$$p_1, p_2, p_3, p_4 >= 0$$
$$p_1, p_2, p_3, p_4 <= 1$$

Planteamiento de las restricciones del problema

Hay dos restricciones principales para la definición del problema. **La primera** es asegurar que el total de los fondos invertidos sumen 100% de lo disponible. Para ello:

$p_1+p_2+p_3+p_4=1$ ………………………………………………. (1)

La segunda restricción consiste en asegurar que el retorno de la inversión obtenido para el portafolio (R) en conjunto sea al menos igual a la rentabilidad media de los cuatro activos, mín(R). Es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i \geq mín(R), \quad \text{……………………………………………} \ (2)$$

donde μ_i representa la rentabilidad media del i-ésimo activo, mín(R) representa el mínimo retorno esperado de inversión del portafolio y n es el número de activos.

En la expresión (2), la parte izquierda de la restricción consiste en un promedio ponderado de los retornos esperados para el portafolio en cuestión.

Las **3 últimas restricciones** se refieren a que las variables de decisión (proporciones) no deben exceder a 1 (como se mencionó anteriormente), es decir:

$p_1<=1$ …………………………………………………… (3)

$p_2<=1$ …………………………………………………… (4)

$p_3<=1$ …………………………………………………… (5)

$p_4<=1$ …………………………………………………… (6)

Finalmente, las **restricciones de no negatividad** están dadas por (ya indicado más antes también):

$p_1, p_2, p_3, p_4 >=0$

Definición de la función objetivo

El objetivo del caso de estudio consiste en encontrar la estrategia óptima de inversión enfocada a minimizar el riesgo de la mezcla del portafolio. Luego, el riesgo del portafolio se mide con la métrica de variabilidad del mismo. En general, la variabilidad (o riesgo) para un portafolio conformado por "n" instrumentos está definido por la suma aritmética de sus varianzas y covarianzas, como se muestra a continuación:

Z = Riesgo del portafolio = $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 p_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sigma_{ij} p_i p_j$, donde:

p_i: proporción del total invertido en el instrumento i-ésimo.

σ_i^2: varianza (variabilidad individual) de las rentabilidades del instrumento de inversión i-ésimo.

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$: covarianza (variabilidad conjunta) entre las rentabilidades de los instrumentos i y j.

Solución del problema

La expresión anterior contiene elementos cuadráticos, por lo cual será necesario emplear la programación no lineal (en este caso, la programación cuadrática) para su solución, la cual se implementará con asistencia del programa informático WinQSB, siguiendo los siguientes pasos:

(1) WinQSB (doble clic izquierdo)

(2) Quadratic Programming (doble clic izquierdo)

(3) Clic izquierdo en la rejilla azul, ubicada en la esquina superior izquierda de la pantalla
Problema Title: (colocar el título)
Number of Variables: 4
Number of Constraints: 6
Objective Criterion: seleccionar Minimization
Data Entry Format: seleccionar Spreadsheet Matrix Form OK

(4) Completar la siguiente tabla, como se muestra a continuación:

Tabla 2. Estructura de ingreso de datos para aplicar la programación cuadrática con WinQSB

Variable	X1	X2	X3	X4	Direction	R.H.S.
Minimize	0	0	0	0		
X1	σ_1^2	σ_{12}	σ_{13}	σ_{14}		
X2	σ_{21}	σ_2^2	σ_{23}	σ_{24}		
X3	σ_{31}	σ_{32}	σ_3^2	σ_{34}		
X4	σ_{41}	σ_{42}	σ_{43}	σ_4^2		
C1	1	1	1	1	=	1
C2	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	>=	Mín(R)
C3	1	0	0	0	<=	1
C4	0	1	0	0	<=	1
C5	0	0	1	0	<=	1
C6	0	0	0	1	<=	1
Lower Bound	0	0	0			
Upper Bound	M	M	M			
Variable Type	Continuous	Continuous	Continuous			

(5) Solve and Analize/Solve the Problem/Aceptar (se visualizará la solución óptima). En este caso las variables X1, X2 y X3 y X4 (mostradas por defecto con el programa WinQSB) representan las proporciones p_1, p_2, p_3 y p_4, respectivamente.

2. MATERIAL Y MÉTODO

2.1. **METODO**:

Diseño de investigación:

Investigación observacional de corte longitudinal, con diseño descriptivo.

2.2. **MATERIAL**:

Población y Muestra:

Población: Rentabilidad anual de cualquiera de los cuatro activos de la Bolsa de Valores de Lima considerados en esta investigación, desde el inicio de actividades de la BVL, hasta el año 2017.

Muestra: Se consideró una muestra de la rentabilidad de 11 años consecutivos, utilizando el criterio de alternativas de inversión que se ajustan a un perfil de riesgo y un horizonte de inversión (Martínez, 2013), de los títulos que han negociado de manera ininterrumpida en la Bolsa de Valores de Lima, entre los años 2007 y 2017.

Técnicas e Instrumentos:

Como instrumento de recolección de datos se considera el formato de la cotización anual de las acciones de los cuatro activos considerados, según el boletín diario emitido por la Bolsa de Valores de Lima. En dicho formato se encuentra características como: acciones, símbolo, monto negociado, cotización, rentabilidad de la acción, etc. En esta investigación se ha utilizado la rentabilidad en el año, mostrada en la Tabla 1, para determinar los porcentajes de inversión óptima.

Para el presente estudio se utilizó la **técnica de la programación cuadrática**. El instrumento utilizado fue un formato para recolectar los datos sobre la rentabilidad anual de Scotiabank, Graña y Montero, Alicorp y Enel Generación Perú, cuya estructura se presenta en el Anexo.

Se trata de determinar el porcentaje del presupuesto que el inversor debe asignar al i-ésimo instrumento de inversión para un período futuro, con el fin de minimizar el riesgo de la inversión, sujeto a la restricción de obtener una mínima rentabilidad esperada. Para resolver este problema formalmente, se puede aplicar la programación cuadrática.

Interrogante de investigación:

¿Cuáles son los porcentajes óptimos de inversión en Scotiabank, Graña y Montero, Alicorp y Enel Generación Perú de la Bolsa de Valores de Lima, con un retorno mínimo esperado de la invesión igual a la rentabilidad promedio de los cuatro activos, al mínimo riesgo posible, para inicios del año 2018?

Objetivos:

Determinar los porcentajes óptimos de inversión en Scotiabank, Graña y Montero, Alicorp y Enel Generación Perú de la Bolsa de Valores de Lima, para alcanzar un retorno mínimo de la inversión al mínimo riesgo posible, en el período inicial del año 2018.

3. RESULTADOS

Los elementos de la matriz de covarianzas poblacionales (obtenidas con Excel) entre la rentabilidad anual de los cuatro activos, utilizando los datos de la Tabla 1 y que se emplearon en la programación cuadrática se muestran a continuación:

σ_1^2=0.2377; σ_{12} = 0.1990 = σ_{21}; σ_{13} = 0.2262 = σ_{31}; σ_{14} = 0.0764 = σ_{41}

σ_2^2= 0.5288; σ_{23} = 0.2202 = σ_{32}; σ_{24} = 0.1463 = σ_{42}; σ_3^2= 0.2831

σ_{34} = 0.1008 = σ_{43}; σ_4^2 = 0.0755

Igualmente, siempre con Excel, las rentabilidades promedio de los cuatro activos (μ_i) considerados para la inversión son:

μ_1 = 0.2247 (rentabilidad media de Scotiabank); μ_2 = 0.2675 (rentabilidad media de Graña y Montero); μ_3 = 0.2601 (rentabilidad media de Alicorp S.A.); μ_4 = 0.1164 (rentabilidad media de Enel Generación Perú).

El promedio de estas cuatro rentabilidades es igual a 0.2172 (mínimo retorno esperado de inversión del portafolio).

Con esta información, la restricción (2) está dada por:

$0.2247p_1+0.2675p_2+0.2601p_3+0.1164p_4>=0.2172$ ……………….. (2)

En la expresión (2), la parte izquierda de la restricción consiste en un promedio ponderado de los retornos esperados para el portafolio en cuestión. La cantidad de la parte derecha de esta restricción se denomina mínimo retorno esperado de inversión del portafolio.

Asumiendo que se cumplen las restricciones de no negatividad de las cuatro variables, definiremos la función objetivo.

Definición de la función objetivo

Como se desea encontrar la estrategia óptima de inversión enfocada a minimizar el riesgo de la mezcla del portafolio, utilizando las varianzas y covarianzas anteriores, la función objetivo de nuestro problema es:

$$\text{Mín (Z) = Mín (Riesgo del portafolio)} = \sum_{i=1}^{4}\sigma_i^2 p_i^2 + 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{4}\sigma_{ij}p_i p_j$$

$$=0.2377\, p_1^2+0.5288\, p_2^2+0.2831\, p_3^2+0.0755\, p_4^2 + 2(0.1990\, p_1\, p_2+0.0.2262\, p_1\, p_3 +0.0.0764\, p_1\, p_4 +0.2202\, p_2\, p_3 + 0.1463\, p_2\, p_4+0.1008\, p_3\, p_4)$$

Solución del problema

La expresión anterior para la función objetivo contiene elementos cuadráticos, por lo cual será necesario emplear la programación no lineal (en este caso, la programación cuadrática) para su solución, la cual se implementó con asistencia del programa informático WinQSB. Utilizando la información contenida en las Tablas 1 y 2, se obtiene la siguiente tabla (Tabla 3):

Tabla 3

Ingreso de datos reales para aplicar la programación cuadrática con WINQSB

Variable	X1	X2	X3	X4	Direction	R.H.S.
Minimize	0	0	0	0		
X1	0.2377	0.1990	0.2262	0.0764		
X2	0.1990	0.5288	0.2202	0.1463		
X3	0.2262	0.2202	0.2831	0.1008		
X4	0.0764	0.1463	0.1008	0.0755		
C1	1	1	1	1	=	1
C2	0.2247	0.2675	0.2601	0.1164	>=	0.2172
C3	1	0	0	0	<=	1
C4	0	1	0	0	<=	1
C5	0	0	1	0	<=	1
C6	0	0	0	1	<=	1
Lower Bound	0	0	0			
Upper Bound	M	M	M			
Variable Type	Continuous	Continuous	Continuous			

Al ejecutar el paso (5), anteriromente considerado en la forma de utilizar el programa WinQSB, con esta información ingresada, se tiene:
Solve and Analize/Solve the Problem/Aceptar (se visualiza la solución óptima: X1=0.21, X2=0.09, X3=0.44, X4=0.25). En este caso, las variables X1, X2, X3 y X4 (mostradas por defecto con el programa WinQSB) representan las proporciones p_1, p_2, p_3 y p_4,, respectivamente. Esto significa que del capital total invertido (100%), el 21% debe invertirse en Scotiabank, el 9% en Graña y Montero, el 44% en Alicorp y el 25% en Enel Generación Perú. Podemos notar también que estos porcentajes suman 99%, no pudiéndose visualizar en estos resultados las demás cifras decimales de los resultados óptimos. (Ver Anexo).

4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

Para la elección de los cuatro activos considerados en esta investigación se ha tenido en cuenta el criterio de "diversificación", debido a que existen ventajas en esta cualidad, pues, al formar una cartera con dos o más títulos, si se exceptúa el caso poco probable de que sus rendimientos estén correlacionados de forma perfecta y positiva, habrán ventajas en esa diversificación, ya que el rendimiento esperado de la cartera será igual a la media ponderada de los rendimientos de los títulos que se mezclan (Blanco, 2015). Por este motivo, los títulos incluidos en este estudio pertenecen a los rubros <Bancos y Financieras> (Scotiabank), <Diversas> (Graña y Montero), <Industriales Comunes> (Alicorp S. A.) y <Servicios Públicos> (Enel Generación Perú, antes denominado Edegel) (El Comercio, 2016). Además, otro criterio utilizado para seleccionar estos activos ha sido el hecho de ser empresas que tienen liquidez asegurada con solvencia demostrada (López, 2016), cuya capitalización bursátil, por ejemplo, para los años 2012 y 2017, se muestra en la siguiente tabla (Tabla4). A esto se suma que dichas empresas cotizaron, ininterrumpidamente, entre los años 2007 y 2017, y por tanto se tuvo acceso a la información anual de sus rentabilidades.

Tabla 4.

Capitalización bursátil (en millones de $) de cuatro

Activos negociados en la Bolsa de Valores de Lima en los años 2012 y 2017

AÑO	SCOTABANK	GRAÑA Y MONTERO	ALICORP S.A.	ENEL GENRACIÓN PERÚ
2012	3939.60	2123.70	2771.90	2023.80
2017	5634.54	378.05	2785.98	1768.03

Gestión, diciembre 2012-diciembre 2017

Según el funcionamiento lógico de los mercados financieros, mayores riesgos deben ser premiados en el tiempo con mayores rentabilidades. Adicionalmente, la teoría y la práctica han demostrado sobradamente las virtudes de la diversificación de las inversiones (García, 2009).

Con respecto a las correlaciones entre las rentabilidades de los títulos incluidos, ellas no son perfectas, justificándose, desde este punto de vista, la elección de los cuatro activos. De hecho, estas correlaciones fueron: 0.5613, 0.8719, 0.5702, 0.5693, 0.7320 y 0.6893, entre las rentabilidades anuales de los siguientes pares de activos: (Scotiabank, Graña y Montero), (Scotiabank, Alicorp S.A.), (Scotiabank, Enel Generción Perú), (Graña y Montero, Alicorp S.a.), (Graña y Montero, Enel Generación Perú) y (Alicorp S.A., Enel Generación Perú), respectivamente. Lo usual es que los activos financieros no estén perfectamente correlacionados, ni en sentido positivo ni en sentido negativo, sino que entre ellos exista un grado de correlación intermedio (Blanco, 2015). Asumiendo una hipótesis nula de correlación igual a 0 y como hipótesis alternativa una correlación distinta de cero, para el nivel de significancia del 5%, resultaron significativas las correlaciones entre los pares de rentabilidad: (Scotiabank, Alicorp S.A), (Graña y Montero, Enel Generación Perú) y (Alicorp S.A., Enel Generación Perú); las demás fueron significativas a partir del nivel del 8% (ver Anexo). Esto justifica, una vez más, la elección de los activos financieros para este estudio. Ahondando un poco más sobre la diversificación de un portafolio, es más inteligente comprar varios valores para que las posibles pérdidas de unos sean compensadas con las mayores ganancias de los otros.

Con respecto a la rentabilidad promedio, si sólo se observa esta característica de los cuatro títulos, se observa en la Tabla 1 que, excepto el título Scotiabank, los porcentajes óptimos a invertir en los demás activos son marcadamente diferentes de las rentabilidades promedio. Así, al aplicar el paso (5) de WinQSB en la Tabla 3, el porcentaje óptimo a invertir en Graña y Montero es de 9% y su rentabilidad media es de 27%, el de Alicorp S.A. es de 44% y su rentabilidad promedio es de 26% y el de Enel Generación Perú es de 25% con una rentabilidad media de 12%. Con estos resultados, un inversor con poco conocimiento de la programación cuadrática podría sólo tener en cuenta la rentabilidad promedio, sin considerar el riesgo de cada título, pudiendo invertir, quizás, la mayor cantidad del presupuesto en Graña y Montero y la menor parte del mismo en Enel Genración Perú. Sólo falta comparar los valores óptimos obtenidos con las rentabilidades anuales, a fines del año 2018, para discutir un poco más sobre esto. (Ver Anexo y la Tabla 1, para observar las rentabilidades promedio).

En lo que atañe a la restricción (2) del modelo de programación cuadrática propuesto se ha considerado como mínimo retorno esperado de inversión del portafolio, mín (R), el promedio de los cuatro rendimientos medios de los activos considerados (21.72%), aunque también pudo haberse considerado el Producto Bruto Interno (PBI) del Perú para el año 2017 (2.5%) (Álvarez, 2018) o el índice inflacionario del Perù en el año 2017.

El modelo aquí presentado, considera cómo los inversores eligen carteras de activos financieros, conocido como Teoría de Selección Carteras, la cual tiene su origen en el modelo de selección de carteras propuesto por Harry Markowitz en 1952, en su artículo <<Portafolio Selection>>, que desarrolló posteriormente con mayor detalle, en 1959, en su libro Portafolio Selection: Efficient Diversification of Investment. En 1990, junto a William Sharpe y Merton Miller, le fue concedido el premio Nobel de Economía, como reconocimiento a esta contribución a la Teoría del Mercado de Capitales y la Economía Financiera… Para ello, Markowitz elaboró un modelo normativo uniperiodal de selección racional de inversiones financieras arriesgadas en función de dos parámetros: la esperanza matemática y la varianza (o la desviación típica), como medidas respectivas de la rentabilidad y del riesgo de tales inversiones, …, siendo el primero en prestar atención a la diversificación de las carteras (Blanco, 2015).

De los cuatro activos considerados, la investigación indica que el menor porcentaje del capital total invertido, debe hacerse en Graña y Montero (sólo 9%), lo cual estaría en relación con problemas de dicha empresa en el caso Odebrecht, donde en 14 meses el valor de la mayor constructora del país ha descendido 73%, hoy dos de sus exdirectivos tienen prisión preventiva… (RPP, 2017). También se ha encontrado que este activo tiene el mayor riesgo (0.5288), al compararse con los tres títulos restantes. Por otro lado, vemos que, a pesar de que Graña y Montero tiene el mejor rendimiento promedio anual (26.75%), sólo debe invertirse en este activo la menor cantidad de dinero (9%). Existe una relación inversa entre el riesgo y el rendimiento para este activo. Fundamentalmente, en Teoría de Riesgo, se habla de la relación entre el riesgo y el rendimiento, entendiendo este último, como el promedio o valor esperado de una variable cualquiera y por supuesto en especial el rendimiento de inversión, lo cual amerita entender el valor en riesgo de una cartera de activos (Diz, 2015), que puede ser motivo de investigación adicional.

La rentabilidad de un activo (título) se la puede definir como el beneficio económico que se obtiene a partir de la tenencia de dicho activo durante un período determinado. Generalmente, se expresa en porcentajes. A partir de la definición se deduce que la rentabilidad de un activo financiero es sólo conocida luego que el período en el que se esté evaluando haya vencido, es decir, que no se puede fijar con exactitud cuál ha de ser la rentabilidad del mismo en el futuro. Esta deducción puede, asimismo, considerarse en virtud de la relación inversa existente entre el precio de un activo y su rentabilidad. Con lo cual, dado que el precio exacto de los títulos, al igual que el de cualquier otra mercancía, es incierto hacia el futuro, entonces tampoco puede ser conocida su rentabilidad (Pacheco, 2002).

El enfoque del análisis de la matriz de covarianzas, aquí considerado, para resolver un problema de programación cuadrática, ha tenido un gran impacto sobre la economía financiera y constituye una piedra angular de las finanzas modernas (Fan, 2012).

La base para realizar el presente estudio estuvo en el trabajo de investigación realizado en el año 2013 (Díaz, 2013), lo cual se hizo con información mensual y su finalidad sólo fue ilustrar la técnica de programación cuadrática con WinQSB, donde dos de los tres activos considerados en dicho trabajo volvieron a considerarse en la presente ocasión (Graña y Montero y Alicorp S.A.), aunque con información anual, ideal para seguir un método de inversión disciplinado y a largo plazo (López, 2016). Dado que la información utilizada en el trabajo mencionado fue mensual y, la actual es anual, no es tan apropiado hacer las comparaciones entre los valores óptimos de inversión obtenidos en estos dos activos, a pesar de la coincidencia de invertir, óptimamente, 44% en Alicorp S.A, como lo muestran los resultados obtenidos en ambos trabajos.

Por último, después de haber aportado con este estudio para que un inversor decida, óptimamente, qué porcentaje de su presupuesto debe invertirlo en cada uno de los activos seleccionados, es conveniente indicar lo que manifiestan López y Poal (2016) acerca de la importancia de crear una comunidad de lectores/inversores, diciendo que "invertir en bolsa con éxito se basa en seguir una filosofía y respetar unos principios; pero a la hora de interpretar el entorno bursátil y de escoger el momento de invertir, e incluso cuando se trata de valorar y escoger empresas concretas, toda información es poca. Eso sí, sin llegar a dejar que aturda y que produzca parálisis. Hay que saber decir basta. Cada inversor debe saber procesar la información y las recomendaciones de las que disponga, interpretarlas y sacar sus propias conclusiones. Porque, a la hora de la verdad, cada uno debe tomar sus propias decisiones, y eso es inevitable".

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El presente estudio tuvo por finalidad presentar una técnica informática para determinar la distribución óptima de una inversión en la Bolsa de Valores de Lima, concretamente en los activos Scotiabank, Graña y Montero, Alicorp S. A. y Enel Generación Perú, correspondiente al período del año 2018, haciendo uso de la programación cuadrática y con asistencia del programa informático WINQSB. La muestra estuvo conformada por la rentabilidad anual de cada uno de 11 años, comprendidos entre los años 2007 y 2017. Se llegó a las siguientes conclusiones y recomendaciones:

Conclusiones:

El porcentaje óptimo de inversión para inicios del año 2018 en Scotiabank es del 21%, en Graña y Montero 9%, en Alicorp S.A. debe invertirse el 44% y el 25% en Enel Generación Perú (salidas de WinQSB).

`**Recomendaciones**:

``Para una mejor comprensión de la programación no lineal y de sus implicaciones, realizar un estudio, en una investigación futura, acerca del problema de programación cuadrática, utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), las cuales constituyen el resultado individual analítico de mayor importancia en la programación no lineal (Chiang, 2006).

6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Alonso, J.; Berggrun, L. (2015). Introducción al análisis de riesgo financiero, 3ª. ed. Ecoe Ediciones Ltda. Bogotá-Colombia, pp: 59, 60.

Álvarez, I. (2018). Crecimiento del PBI en el 2017 no alcanzó la meta oficial. Perú., Consulta: 9 de abril de 2018. https://elcomercio.pe/crecimiento-pbi-alcanzo-meta-oficial-noticia-497394.

Balbas, A.; Gil, J. (1990). Programación matemática. 2°a ed. Ed. AC. Madrid, pp: 115-120.

Blanco, F.; Ferrando, M.; Martínez, M. (2015). Teoría de la inversión. Ediciones Pirámide. Madrid, pp. 289-394.

Calberg, C. (2011). Análisis Estadístico con Excel. Ed. Anaya. España, pp. 87- 152.

Cobo, A. (s.a.). La selección de carteras: desde Markowitz. Bogotá. Consulta: 8 de noviembre de 2012. < http://web.usal.es/ emmam/Docencia/Modelizacion/p…>

Conti, D.; Rodríguez, A.; Bencomo, M. (2009). Determinación de la Cartera Óptima de Inversión Bajo un Enfoque de Programación No Lineal. Bogotá. Consulta: 8 de noviembre de 2012. <htt://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/15981/1/determinación.pdf.>

Court, E.; Tarradellas, J. (2010). Mercado de capitales. Ed. Pearson. México, pp.: 127, 128, 132-135.

Díaz, W. (2013). Distribución óptima de la inversión en activos de la Bolsa de Valores de Lima-2013. PIC CÓD. N° 20021305105.

Diz, E. (2015). Teoría de riesgo, 4ª ed. Ediciones ECOE. Bogotá, pp. 55-57.

El Comercio (2016). "Gobierno promulgó ley de retiro del 95.5% de fondos de AFP". El Comercio. Lima, 21 de abril.

Fan, J; Zhang, J.; Yu, K (2012). Vast Portfolio Selection With Gross . Exposure Constraints. Journal of the American Statistical Association, 107:498. Consulta: 8 de noviembre de 2012. pp. 592-606 <http://dx.doi.org/10.1080/01621459.2012.682825>

García, P.; Diez, L. (2009). Mercados financieros internacionales. Ed. Copyryght. Madrid, pp. 17, 305-327.

Geller, A. (2013). Dinero eficiente. Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú: N° 2013-04611. Impreso en Lima-Perú, pp.: 276, 277.

Gestión (2012). "Bolsa de Valores. Movimiento de acciones al contado en la Rueda". Gestión. 2, 9, 16, 23 y 30 de mayo; 6, 13, 20 y 27 de junio; 4, 11, 18 y 25 de julio; 1, 8, 15, 22 y 29 de agosto. Lima, pp: 22-25.

Ghadle, K.; Pawar, T. (2015): New approach for Wolfe´s modified simplex method to solve quadratic programming problems. International Journal of Research in Engineering and Technology. Volume: 04 Issue:01/Jan-2015, Available @http://www.ijret.org. Consultad: 23 de noviembre de 2016. <Esatjournals.net/ijret/2015v04/i01/IJRET20150401055.pdf>.

López, F.; Poal, J. (2016). 30 ACCIONES PARA INVERTIR EN BOLSA EN 2017. Serveis editorials, scp. España, pp. 9-13.

Martínez, L. (2013). Modelo de Programación Cuadrática y Ratios Financieros para minimizar el riesgo de las inversiones en la Bolsa de Valores de Lima. Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Investigación Operativa. Lima-Perú.

Montufar, M; Flores, H.; et. al. (2009). Investigación de Operaciones. Grupo Editorial Patria. México, pp: 35-40, 211-236.

Pacheco, J. (2002). Rosario. Consulta: 18 de mayo de 2012. <http://www.fcecon.unr.edu.ar>. Programación cuadrática y selección de carteras de inversión. Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas, Escuela de Estadística. Universidad Nacional de

Perú 21 (2016). “Desde hoy puedes retirar 95.5% de tu fondo de AFP: Aquí 6 opciones de inversión”. Perú21. Lima, 16 de mayo.

Piñol, J. (2014). Teoría de la inversión, 2ª ed. Guada Impersores, S.L. Valencia-España, pp: 107-138.

RPP (2017). Los 7 golpes que sufrió Graña y Montero por el caso Odebrecht. Consulta: 9 de abril de 2018. <rpp.pe/economía/economía/los-7-golpes-que-sufrio-graña-y-montero-por-el-caso-odebrecht-noticia-1092474.

Siemens, N.; et. al. (1973). Operations Research. The Free Press. New York Copyright. By the Free Press, pp.: 144, 393-395.

Swift, L.; Piff, S. (2010). Quantitative methods, third edition. Palgrave Macmillan. Printed and bound in China, p. 678.

Taha, H. (2004). Investigación de Operaciones, 7° ed. Ed. Pearson. México, pp: 747-752

Tecnológico de Monterrey (2010). Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Departamento de Matemáticas, CSI/ITESM. Consulta: 18 de mayo de 2005. <http://www.mty.itesm.mx/etie/deptos/m/ma00-130/lecturas/m130-16.pdf>.

Wayne, W. (2005). Investigación de Operaciones. Aplicaciones y algoritmos, 4° ed. Ed. Thomson. México, pp: 610-706