Revista CIENCIA Y TECNOLOGÍA

ISSN 1810-6781 Rev. Cienc. Tecnol. 20(3): 23-38, (2024)

Leyes de conservación de la masa y del momento para un fluido ideal en el marco inercial de la relatividad especial

Laws of conservation of mass and momentum for an ideal fluid in the inertial framework of special relativity

Gilberto Sebastián Alva Castillo; Wilson Maco Vásquez*

Escuela de Posgrado, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n – Ciudad Universitaria, Trujillo, Perú.

* Autor correspondiente: mwilsonmaco@hotmail.com (W. Maco)

DOI: 10.17268/rev.cyt.2024.03.02

RESUMEN

En los fluidos newtonianos, se aplican importantes leyes de conservación, como la de la masa, el momento y la energía, las cuales se abordan dentro de marcos de referencia absolutos. Sin embargo, en el contexto de la relatividad especial, dentro del espacio-tiempo, no existe una conservación separada ni de la masa ni del momento. Gracias a las transformaciones de Lorentz y a los sistemas de referencia, para estudiar la covarianza de las leyes en fluidos en movimiento, solo se requieren dos sistemas de referencia: S y S', los cuales se desplazan uniformemente uno respecto al otro, cada uno con su propio tiempo. En el ámbito de la relatividad especial y en el caso de partículas, se conocen resultados significativos relacionados con el movimiento, como el vector de energía-momento. Basándose en estos resultados, en el estudio de fluidos y en marcos inerciales, es fundamental aplicar las leyes de conservación al tensor de energía-momento.

Palabras clave. Fluidos Newtonianos; conservación de masa; conservación de momento; relatividad especial; conservación de energía-momento.

ABSTRACT

In the realm of Newtonian fluids, fundamental conservation laws such as those governing mass, momentum, and energy are rigorously upheld within absolute reference frames. However, within the framework of special relativity and the concept of space -time, the notions of separate conservation of mass and momentum no longer hold. Instead, the theory relies on Lorentz transformations and relative reference systems, typically denoted as S and S', moving uniformly relative to each other, each with its own temporal framework. Within the context of special relativity, particularly in the study of particles, significant findings pertain to the energy-momentum vector. These findings underscore the necessity, when studying fluids within inertial frames, to apply conservation principles to the energy-momentum tensor.

Keywords: Newtonian Fluids; law of conservation of mass and momentum; Especial relativity; conservation of energy momentum tensor.

1. INTRODUCCIÓN

Comprender el comportamiento del flujo de fluidos en la atmósfera es esencial para protegerse de estos fenómenos. La mecánica newtoniana proporciona importantes leyes de conservación. Es fundamental conocer estas leyes dentro de marcos más generales, como la teoría de la relatividad especial, que incluye sistemas de referencia y sus tiempos propios.

En el espacio tiempo de Minkowsky en la teoría de la relatividad especial, se tienen, los cuatro-vectores en sistemas de referencia inerciales y en ella no hay ley de conservación de la masa ni del momento más bien hay dilataciones del tiempo y contracciones de longitudes; donde las leyes físicas son covariantes bajo las transformaciones de Lorentz.

En el presente trabajo se debe obtener el correspondiente tensor de energía – momento y sus correspondientes leyes de conservación, (las ecuaciones de continuidad). Para obtener resultados tomaremos las ideas básicas en dinámica de partículas relativistas y en fluidos de la teoría Newtoniana.

Fecha de envío: 22-05-2024 Fecha de aceptación: 01-08-2024 Fecha de publicación: 17-09-2024

D’ Inverno (1998) manifiesta que, algunos artículos y textos consideran a la hidrodinámica relativista especial como una generalización de la mecánica clásica de los fluidos. Landau & Lifshitz (1987) consideran que el estudio de un fluido, desde la perspectiva de un medio puramente mecánico, se encuentran las ecuaciones de conservación de masa, de momento y de Navier – Stokes para un fluido ideal en el marco de la relatividad especial. Buchert (2001) afirma que, en la hidrodinámica relativista se encuentran los jets galácticos (fluidos colimados de plasmas) como un fenómeno en el cual se podría aplicar estos conceptos.

1.1. Dinámica de partículas y fluidos en la mecánica no relativista

1.1.1. Es conocido, las nociones de, vector de posición del movimiento de una partícula, la velocidad, el momento y la ecuación del movimiento F = m. a, la cual es, invariante bajo las transformaciones de Galileo.

1.1.2. Mecánica no relativista en medios continuos, mundo de las densidades de: masa, de momento, de energía y los correspondientes vectores de flujo de densidades de

energía, $\rho_e \vec{u}, \quad w = \rho_e$ y de masa $\vec{j} = \rho\vec{u}$ (1.1)

1.1.3. **La ley de la conservación de la masa (ecuación de continuidad), son dadas por:**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_k}{\partial x_k} = 0, \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\vec{u}) = 0 \qquad (1.2)$$

1.2. La ley de la conservación del momento

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \mathrm{F}, \text{fuerzas de superficie y de cuerpo} \qquad (1.3)$$

En el presente trabajo solo se considerará la presión (fuerza real)

En los fluidos debemos considerar la derivada sustancial o material

$$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{Dt}} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \qquad (1.4)$$

De la ecuación de Euler y de ecuación de continuidad se obtiene.

1.3 El tensor T_{ik}, densidad del flujo del momento.

$$\frac{\partial\rho v_i}{\partial t} = -\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \qquad (1.5)$$

donde el tensor T_{ik} es definido por $T_{ik} = \delta_{ik} p + \rho v_i v_k$,

Tensor que depende de la densidad y presión será, un referente para nuestro tensor de energía – momento relativista en fluidos

1.4. Conceptos de relatividad especial

Tolman (1949) presenta los conceptos de relatividad especial relacionados a fluidos, Bert Jansen (2 013) presenta los conceptos de relatividad especial y general**.**

1.4.1 Mecánica de partículas relativistas

Conceptos en el espacio-tiempo relacionados con el radio vector y las velocidades

$$\vec{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} \mathrm{ct} \\ \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathrm{ct} \\ \vec{\mathrm{r}} \end{bmatrix} \quad d\vec{R} = \begin{bmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cdt \\ d\vec{r} \end{bmatrix}, \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{R}}}{\mathrm{dt}} = \begin{bmatrix} c \\ dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{c} \\ \vec{\mathrm{u}} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Usando, la relación entre el tiempo normal y el tiempo propio, $d\tau = \gamma^{-1}\, dt$

se obtiene el cuatro - vector velocidad de Minkowski,

$$\vec{\mathrm{U}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}\tau} = \begin{bmatrix} c\gamma \\ \gamma dx/dt \\ \gamma dy/dt \\ \gamma dz/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\gamma \\ \gamma u_{\mathrm{x}} \\ \gamma u_y \\ \gamma u_y \end{bmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{u}^2}{\mathrm{c}^2}}} \quad \text{factor de Lorentz} \tag{2.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{R}}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{U} = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{u} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{U}^0 = \gamma c, \qquad \mathrm{U}^{\mathrm{i}} = \gamma \vec{u}^i \;\; \mathrm{i} = 1,2,3 \tag{2.3}$$

El vector de energía – momento, invariante en el tiempo es:

$$\vec{\mathrm{P}} = \mathrm{m}_0\vec{\mathrm{U}} = \begin{bmatrix} \mathrm{m}_0\gamma\mathrm{c}^2/c \\ \mathrm{m}_0\gamma u_x \\ \mathrm{m}_0\gamma u_y \\ \mathrm{m}_0\gamma u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}/c \\ \mathrm{m}u_x \\ \mathrm{m}u_y \\ \mathrm{m}u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}/c \\ P^x \\ P^y \\ P^z \end{bmatrix}, \text{donde } \mathrm{m} = \gamma\mathrm{m}_0 \tag{2.4}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Energía} & \rightarrow E/c & \text{componente temporal} \\ \text{Momento en la dirección x} & \rightarrow \mathrm{P}^x & \text{componente espacial} \\ \text{Momento en la dirección y} & \rightarrow \mathrm{P}^y & \text{componente espacial} \\ \text{Momento en la dirección z} & \rightarrow \mathrm{P}^z & \text{componente espacial} \end{array}$$

El movimiento de la densidad del vector de energía - momento en un volumen

específico está vinculado al tensor de energía - momento mediante,

$$\mathbf{V}\bar{\mathbf{n}}_{\nu}\mathbf{T}^{\nu\mu} = \mathbf{P}^{\mu}, \tag{2.5}$$

$\bar{n}_v$ **vector unitario normal a la superficie**

con volume n V, $\mathbf{T}^{\nu\mu}$ tensor de energía - momento.

El vector $T^{0\mu}$, siendo

T^{00} el cambio de la densidad de energía

T^{01} el flujo de la energía en la dirección x

T^{02} el flujo de la energía en la dirección y

T^{03} el flujo de la energía en la dirección z

los vectores $T^{1\mu}, T^{2\mu}, T^{3\mu}$, corresponde a la densidad de los momentos en la dirección, x, y, z respectivamente

Considerando dos sistemas de coordenadas del espacio tiempo S y S', S' moviéndose relativamente respecto a S con velocidad V. Cada sistema está proveído con un sistema de ejes ortogonales y con un conjunto, de relojes distribuidos en intervalos convenientes en el sistema y moviéndose con este.

Si alguna ocurrencia cinemática dada ha sido medida por un observador moviéndose con el sistema S' y descrita en las cantidades x', y', z' y t', se debe obtener un conjunto de expresiones para esas cantidades las cuales al sustituirlas deben dar la descripción correcta de la misma ocurrencia en términos de las variables x, y, z y t.

Las transformaciones, obtenidas por Lorentz, se escriben en la forma

$$x' = \gamma(x - Vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma(t - Vx/c^2)$$

podemos expresarlos como

$$x' = \gamma(x - \beta ct),$$
$$t' = \gamma(ct - \beta x), \quad (2.6)$$

Considerando los dos sistemas de referencia tenemos matricialmente

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Las transformaciones de Lorentz forman un grupo, tal que el combinado resultado de transformaciones sucesivas es equivalente a una simple transformación del sistema de coordenadas origen al sistema final.

Se deduce de las transformaciones de Lorentz la contracción de longitudes y la dilatación del tiempo.

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \qquad L = \frac{L_0}{\gamma} \quad (2.8)$$

Las Transformación de Lorentz dan dos importantes resultados

El cuatro-vector velocidad U siempre tiene la misma longitud

$$\mathrm{U}^2 = (c^2\gamma^2 - \gamma^2\mathrm{u}^2) = \gamma^2(\mathrm{c}^2 - u^2) = c^2 \qquad (2.9)$$

Así mismo la importante relación de ortogonalidad

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{U}^2 = 2\mathrm{U}\,.\,\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{d}\tau} = 0 \qquad (2.10)$$

Desde que para el momento se conoce

$$\mathrm{P}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathrm{P}_1^2 - \mathrm{P}_2^2 - \mathrm{P}_3^2 \qquad (2.11)$$

y el valor de este invariante puede ser calculado en el sistema

en reposo $\mathrm{P}_1^2 = \mathrm{P}_2^2 = \mathrm{P}_3^2 = 0$ y $\mathrm{P}^2 = \frac{E_0^2}{c^2}$ obteniedo así

$$\mathrm{E}^2 = c^2(\mathrm{P}_1^2 + \mathrm{P}_2^2 + \mathrm{P}_3^2) + m_0^2c^2 \qquad (2.12)$$

Expresión, que da la relación entre energía y momento.

1.4.2 Ecuaciones del movimiento en un campo dado

Consideramos una partícula moviéndose en un campo de fuerza, dado como una función, donde, la partícula así mismo no tiene efecto sobre el campo.

Introducimos la fuerza de acuerdo a la siguiente definición

$$f_a = \frac{\mathrm{dP_a}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{m_0U_a}) \qquad \mathrm{a = x, y, z} \qquad (2.13)$$

además, desde que, siempre se aplica (2.12) podemos obtener la cuarta

componente del vector de energía-momento y su derivada lo denotamos por f_1, y así, por tanto, al reemplazar (2.13) por

$$\mathrm{f_k} = \frac{\mathrm{dP_k}}{\mathrm{dt}}, \qquad \mathrm{k = 1,2,3,4} \qquad (2.14)$$

fuerza de Newton, $\mathrm{f_k}$ no es un cuatro - vector y por esta razón definimos $\mathrm{f_k}$ y no $\mathrm{F_k}$

Consideramos el cuatro- vector dado por la **fuerza de Minkowski**

$$\begin{aligned}\mathrm{K_k} &= \frac{\mathrm{dP_k}}{\mathrm{d}\tau}\\ &= \left\{ \mathrm{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(m_0\frac{dt}{d\tau}\right), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(m_0\frac{dx}{d\tau}\right), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(m_0\frac{dy}{d\tau}\right), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(m_0\frac{dz}{d\tau}\right)\right\},\end{aligned} \qquad (2.15)$$

Donde la relación entre f_k y K_k es dada por

$$K_k = (\gamma f_k) = (c\gamma \frac{dm_0\gamma}{dt}, \gamma f_a) = ((c^{-1}\gamma \frac{dm_0\gamma c^2}{dt}, \gamma f_a), \tag{2.16}$$

desde que U_k y $\frac{dU_k}{d\tau}$ son ortogonale s obtenemos

$$P_k \cdot \frac{dP_k}{d\tau} = m_0 U_k \cdot \frac{d(m_0 U_k)}{d\tau} = m_0 U_k \cdot [m_0 \frac{dU_k}{d\tau} + U_k \frac{dm_0}{d\tau}] =$$
$$= m_0^2 U_k \cdot \frac{dU_k}{d\tau} + m_0 U_k^2 \frac{dm_0}{d\tau} = m_0 c^2 \frac{dm_0}{d\tau} \tag{2.17}$$

$$\text{Usando (2.15) y} \quad P_k = (m_0\gamma c, m_0\gamma u_a) \tag{2.18}$$

asi, obtenemos de (2.17)

$$-m_0\gamma^2 f_a u_a + m_0\gamma^2 \frac{d}{dt}(m_0\gamma c^2) = m_0 c^2\gamma \frac{dm_0}{dt} \tag{2.19}$$

Consecuentemente

$$f_a u_a = \frac{d}{dt}(E) - \frac{1}{\gamma}\frac{dm_0 c^2}{dt} \tag{2.20}$$

donde E es la energía , $f_a u_a$ es el trabajo hecho por f_a por unidad de tiempo. Sigue por lo tanto, a menos que $\frac{dm_0}{dt} = 0$. **no se tiene la ley de la conservación de la energía.**

De aquí también, cuando una fuerza está actuando sobre una partícula

$$\frac{d}{dt}(m_0) = \frac{d(m_0 c^2)}{dt} = 0 \tag{2.21}$$

la masa m_0 no puede depender sobre el campo de fuerzas.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1. El objeto de estudio

El objeto de estudio es, obtener, a partir de la ecuación del movimiento, el tensor de energía - momento y, su correspondiente ley de conservación. sobre un determinado volumen llevando energía y momentos en las direcciones temporales y espaciales (ecuaciones de continuidad). Este tensor de energía – momento y sus leyes de conservación, sustituirá a las correspondientes leyes de conservación de la masa y del momento, de la mecánica no relativista.

En la teoría de la relatividad especial se tienen, sistemas de referencia inerciales., no hay conservación de la masa ni del momento ni de la energía por si solas, hay contracción de longitudes y dilataciones del tiempo. Las leyes físicas, se mantienen covariantes bajo las transformaciones de Lorentz.

Este trabajo se inicia, precisando conceptos en la mecánica pre-relativista referente a los flujos de fluidos, se da las leyes de conservación de: la masa, del momento y la ecuación de Euler.

Antes de tratar los medios continuos, se definen conceptos de la mecánica de partículas, luego, las relaciones entre un, sistema, inercial y en reposo.

2.2. MÉTODOS Y TÉCNICAS

La presente investigación se inicia, precisando conceptos en la mecánica de partículas en universo pre relativista. En fluidos, las leyes de conservación de la masa y del momento Newtonianas y el tensor de densidad de flujo del momento,

En el universo de la teoría de la relatividad se tiene el espacio – tiempo, los sistemas de referencia y las transformaciones de Lorentz. así que, se dan, los cuatro- vectores de Minkowski, velocidades, aceleraciones, fuerzas para preservar conceptos físicos, en los diferentes sistemas de referencia.

En el universo de partículas relativistas se da el vector de energía –momento, el mismo que determina la relación entre la energía y el momento referente a partículas y prueba la relación directa entre momento y energía. Finalmente se trata las ecuaciones del movimiento en un campo de fuerzas dado y la partícula, así mismo, no tiene efecto sobre el campo y se deduce que a menos que, la masa en reposo sea constante no se tiene la conservación de la energía.

El estudio de los flujos de fluidos relativistas comienza considerando un fluido altamente idealizado, sin influencia de viscosidad ni presión. Se emplean dos sistemas de referencia: uno en reposo y otro en un marco relativo K. Estas consideraciones permiten establecer la relación entre la densidad en un sistema inercial y la densidad en el marco en reposo.

Asumiendo que el fluido está sujeto a una fuerza de densidad de volumen y a una fuerza de densidad de potencia, se deriva la ecuación del movimiento y el tensor de energía-momento. La conservación de este tensor proporciona las correspondientes ecuaciones de continuidad para el momento y la energía. Al considerar la ausencia de presión y aplicando los resultados de la dinámica clásica, se obtiene la ecuación que muestra la conservación de la masa relativa a un marco arbitrario K, así mismo la ecuación de conservación de la masa en reposo.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1 Ecuaciones del movimiento en fluidos altamente ideales en ausencia de presión.

Consideramos inicialmente **un fluido altamente idealizado** en el cual la iteración entre una parte y otra es ignorada. En otras palabras, no se consideran ni la presión ni la viscosidad. En tales circunstancias se conoce que la masa en reposo de cualquier porción de fluido debe ser conservada y que fuerzas externas no deben tener efecto sobre la masa en reposo. Posteriormente se asumirá algo diferente.

Sea δm_0 la masa en reposo de una pequeña gota de fluido, si δV_0 es el volumen de la pequeña gota en reposo, i.e. el volumen relativo a un marco en el cual se mueve con la gota, tenemos

ρ_0 es la densidad en reposo de la masa en reposo. Ambos ρ_0, δV_0 son invariantes pero ninguna es conservadas, sino ambas cambian en el transcurso del tiempo, relativo a algún marco relativo K, el volumen debe ser δV y la densidad de la masa en reposo algún ρ_0^K

$$\delta m_0 = \rho_0 \delta V_0 \tag{3.1}$$

$$\text{donde de nuevo} \quad \delta m_0 = \rho_0^K \delta V \ . \tag{3.2}$$

Esto nos lleva a la densidad de la masa en reposo relativa a un observador

Quien mide el volumen de la gota mientras está en movimiento.

Introduciendo, la masa relativista δm, la cual, de acuerdo a la teoría de la relatividad es definida por

$$\delta m = \gamma \delta m_0 = \rho \delta V \tag{3.3}$$

donde ρ es la densidad de la masa relativa. La relación entre δV medida en K y δV_0 medida en el sistema en reposo, sigue de la **contracción de Lorentz**

$$\delta V = \gamma^{-1} \delta V_0$$

usando, $\delta m = \gamma \delta m_0 = \gamma(\rho_0 \delta V_0) = \gamma \rho_0 \gamma \delta V = \gamma^2 \rho_0 \delta V$

$\delta m = \rho \delta V$

deducimos de las dos igualdades

$$\rho = \gamma^2 \rho_0 \tag{3.4}$$

$$\rho = \gamma^2 \rho_0 \qquad \rho_0^K = \gamma \rho_0 \tag{3.5}$$

3.1.1 Fuerzas de volumen de densidad

Asumimos ahora, que el líquido es expuesto a una fuerza de volumen de densidad F_a y postulamos una ley del movimiento, donde u_a es la velocidad, para (a = x, y, z)

$$F_a \delta V = \frac{d(\delta m \mu_a)}{dt} = \frac{d(\rho \mu_a \delta V)}{dt}, \quad a = x, y, z \tag{3.6}$$

Para obtener la invarianza relativista de la masa δm, debemos identificar esta con la masa relativista dada en (3.2). Usaremos la parte derecha de esta ecuación, para encontrar F_a, Así mismo, la expresión d/dt debe ser considerada como una **derivada material,** pues ahora nuestra atención está enfocada en una gota de líquido dada. Desde que, para la derivada material respecto al tiempo de cualquier cantidad ψ ($x_{i,\ t}$) tenemos

$$\frac{\mathrm{d}\,\psi}{\mathrm{dt}} = \frac{D\,\psi}{Dt} = \frac{\partial(\psi)}{\partial t} + \mu_a \frac{\partial(\psi)}{\partial x_a} \tag{3.7}$$

Como para el elemento de volumen δV, encontramos en [1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\delta V = \frac{\partial(\mu_a)}{\partial x_a}\delta V \tag{3.8}$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\psi\delta\mathrm{V})}{\mathrm{dt}} &= \frac{d(\psi)}{dt}\delta V + \psi\frac{\mathrm{d}(\delta\mathrm{V})}{\mathrm{dt}} \\ &= [\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u_a}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x_a}}(\psi)]\delta\mathrm{V} + \psi\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\delta\mathrm{V}\end{aligned} \tag{3.9}$$

usando (3.8) en (3.9) tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\psi\delta V) = \frac{\partial}{\partial x_a}(u_a\psi)\delta V + \frac{\partial(\psi)}{\partial t}\delta V, \quad \mathrm{a} = x, y, z \tag{3.9a}$$

Aplicando esta fórmula al lado derecho de (3.6) y **considerando** $\psi = \rho\, u$, después de intercambiar índices conseguimos

$$\mathrm{F_a}\delta V = \frac{\partial}{\partial x_b}(\rho u_a u_b)\delta V + \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_a)\delta V, \quad \mathrm{a = x, y, z} \tag{3.10}$$

Obteniéndose así, la importante ecuación de continuidad para el vector flujo de masa $\rho\, u_a$

$$\mathrm{F_a} = \frac{\partial(\rho\mu_a u_b)}{\partial x_b} + \frac{\partial(\rho\mu_a)}{\partial t}, \quad \mathrm{a = x, y, z} \tag{3.10a}$$

3.1.2. Densidad e potencia

Agregamos a estas tres ecuaciones la densidad de potencia

$$(\mathrm{F_a}\mu_a)\delta V = \frac{d(\delta E)}{dt} = \frac{d(w\,\delta V)}{dt} \tag{3.11}$$

Donde δE es la energía de la gota y w es la densidad de energía. Aplicando (3.9a) y considerando ψ = w, conseguimos, con razonamiento análoga al anterior

$$(\mathrm{F_a}u_a)\delta V = \frac{d(w\delta V)}{dt} = \frac{\partial(u_a w)}{\partial \mathrm{x_a}}\delta\mathrm{V} + \frac{\partial w}{\partial \mathrm{t}}\delta\mathrm{V}$$

por lo tanto

$$\mathrm{F_a}\mu_a = \frac{\partial(w\mu_a)}{\partial x_a} + \frac{\partial w}{\partial t} \tag{3.12}$$

de aquí se obtendrá la ecuación de continuidad de la densidad de energía.

Ahora, estamos en capacidad de introducir una nueva cantidad T^{uv}. Recordemos que en coordenadas cartesianas las notaciones covariantes y contravariante coinciden.

3.1.3. Introduciendo el Tensor de energía – momento

Ahora introducimos la cantidad T^{ab} definida por

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}^{\alpha\beta} = \rho\mu^{\alpha}\mu^{\beta}, \quad \mathrm{T}^{\alpha 0} = c\rho\mu^{\alpha}, \quad \mathrm{T}^{0\beta} = \frac{w\mu^{b}}{c}, \ \mathrm{T}^{00} = w \\
&\mathrm{T}^{\alpha\beta} = \rho_0\gamma^2\mu^{\alpha}\mu^{\beta}, \quad \mathrm{T}^{\alpha 0} = c\rho_0\gamma^2\mu^{\alpha}, \quad \mathrm{T}^{0\beta} = \frac{w\mu^{b}}{c}, \ \mathrm{T}^{00} = w \\
&\mathrm{T}^{\alpha\beta} = \rho_0 U^{\alpha}U^{\beta}, \quad \mathrm{T}^{\alpha 0} = c\rho_0\gamma U^{\alpha}, \quad \mathrm{T}^{0\beta} = \frac{w\mu^{b}}{c}, \ \mathrm{T}^{00} = w
\end{aligned} \tag{3.13}$$

y una cantidad F_a definida por

$$\mathrm{F}_{\mu} = (F_a u^a / c, F_a) \tag{3.14}$$

Entonces obtenemos, *la ecuación del movimiento*

$$\mathrm{F}_{\mu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} \tag{3.15}$$

Para garantizar la invarianza relativista de esas ecuaciones debemos estar seguros que T^{uv} es un cuatro - tensor y F_{μ} un cuatro – vector

$$\mathrm{T}^{\alpha\beta} = \rho\mu^{\alpha}\mu^{\beta} = \rho_0\gamma^2\mu^{\alpha}\mu^{\beta} = \rho_0 U^{\alpha}U^{\beta}, \tag{3.16}$$

$$\mathrm{T}^{\alpha 0} = c\rho\mu^{\alpha} = c\rho_0\gamma^2\mu^{\alpha} = \rho_0 U^{\alpha}U^{0}, \tag{3.17}$$

donde $\mathrm{U}^{\mu} = (U^0, U^1, U^2, U^3)$ es el cuatro - vector velocidad y $\mathrm{U}^0 = c\gamma$. Es posible ahora asumir que si deseamos que $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ sea

Un cuatro- tensor, las cuatro componentes restantes, deben tener la dependencia en el mismo modo que U^u y ρ_0 como las doce componentes listadas. En efecto se tiene

$$T^{0\beta} = \rho U^0 U^\beta, \quad T^{00} = \rho_0 U^0 U^0 = c^2 \rho_0 \gamma^2 = \rho c^2 = w,$$

por tanto

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 U^\mu U^\nu, \tag{3.18}$$

El tensor T^{uv} (3.18) es el tensor de energía – momento, en un fluido en ausencia de presión

3.1.4. Leyes de conservación, ecuaciones de continuidad

El tensor de energía – momento y la ecuación de movimiento se pueden expresar como:

$$\begin{bmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} c^2 & cu_x & cu_y & cu_z \\ cu_x & (u_x)^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ cu_y & u_y u_x & (u_y)^2 & u_y u_z \\ cu_z & u_z u_x & u_z u_y & (u_z)^2 \end{bmatrix}, \text{ se uso } \rho = \gamma^2 \rho_0$$

$$\text{La ecuación del movimiento} \quad F_\mu = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \tag{3.18a}$$

La ley de conservación del tensor de energía - momento es $\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0$

y las ecuaciones de continuidad de energía y momento dadas por

para $\mu = 0$ energia a través del tiempo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

$$\text{o equivalent emente} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho u) = 0 \tag{3.18b}$$

para $u = 1$ fluir a través del eje x

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho (u_x)^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_x u_z) = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + div(\rho u u_x) = 0$$

para $u = 2$ fluir a través del eje y

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho (u_x u_y)) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho (u_y)^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_y u_z) = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + div(\rho u u_y) = 0$$

$$\text{para u} = 3 \text{ fluir a través del eje z}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho(u_x u_z)) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho(u_z)^2) = 0$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + div(\rho u u_z) = 0$$

de estas ecuaiones se obtiene

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u u_z)}{\partial z} = 0 \tag{3.18c}$$

3.2. Ausencia de presión y conservación de la masa en reposo

En el párrafo anterior, la introducción de la expresión relativista de la masa y la densidad, que no son invariantes para diferentes observadores en movimiento, permitió derivar las ecuaciones del movimiento en un fluido (3.15). Dado que, en la dinámica clásica ρ es idéntica a ρ_0 de la teoría relativista, se introduce la ley de conservación de la masa para ρ_0, las ecuaciones del movimiento en este caso pueden expresarse como:

$$\rho_0 \delta V \frac{d\mu_a}{dt} = F_a \delta V \tag{3.19}$$

La cual es equivalente a,

$$\frac{\mathrm{d}(\rho_0 \delta V \mu_a)}{dt} = F_a \delta V \tag{3.20}$$

Desde que, $\rho_0 \delta V$ es la masa total de la gota y por lo asumido esta es conservada. Esto nos guia a la siguientes ecuaciones clasicas:

$$F_u = \frac{dt^{\mu\nu}}{dx_\nu} \tag{3.21}$$

Donde,

$$\mathrm{t}^{ab} = \rho_0 \mu_a \mu_b\ , \quad \mathrm{t}^{ao} = c\rho_0 \mu_a \quad \mathrm{t}^{ob} = (w/c)\mu_b\ , \ \mathrm{t}^{oo} = w \tag{3.22}$$

y

$$\mathrm{w} = \frac{1}{2}\rho_0 \mu^2 + cons\tan te \tag{3.23}$$

Las ecuaciones (3.21) parecen superficialmente como ecuaciones relativistas, pero por supuesto ellas no lo son, desde e, $t^{\mu\nu}$ no es un cuatro – tensor. En la teoría relativista ρ_0 es reemplazada por la ρ relativista y esta cantidad no satisface la ecuación de continuidad, la masa relativista no es conservada

En efecto, por virtud de $w = \rho c^2$, ρ es directamente proporcional a la densidad de energía y esta depende por el trabajo hecho por la fuerza externa. De (3.12) conseguimos, en el caso clásico

$$\frac{\partial(\rho c^2 \mu_a)}{\partial x_a} + \frac{\partial \rho c^2}{\partial t} = F_a \mu_a \tag{3.24}$$

Por tanto,

$$\operatorname{div}(\rho\mu) + \frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} = \frac{F_a \mu_a}{c^2} \tag{3.25}$$

Esto no corresponde a una expresión covariante de continuidad. Sin embargo, la ecuación (3.25) resulta de nuestra teoría relativista y expresa en un modo convencional (no covariante) la no conservación de masa relativa.

Por otra parte, debemos ahora probar que la masa en reposo es conservada, de allí que, ρ_0 debe satisfacer una ecuación de continuidad. Esta ecuación debemos derivarla en forma covariante. Para este fin consideramos el escalar F_u U^u. De (3.12) y $U^0 = \gamma c$ conseguimos

$$\mathrm{F}_\mu . \mathrm{U}^\mu = \mathrm{F_a u_a / c\, U^0} . - \mathrm{F_a U^a} = \gamma \mathrm{F_a u_a} - \gamma \mathrm{F_a u_a} = 0 \tag{3.26}$$

Seguidamente, podemos reescribir (3.10 a) como sigue:

$$\mathrm{F}_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\rho_0 \mathrm{U}^\mu \mathrm{U}^\nu\right) = \mathrm{U}^\mu \frac{\partial(\rho_0 \mathrm{U}^\nu)}{\partial \mathrm{x}_\nu} . + \rho_0 \mathrm{U}^\nu \frac{\partial \mathrm{U}^\varpi}{\partial \mathrm{x}_\nu} \tag{3.27}$$

El último término de (3.27) tiene la forma de una derivada material de U_u con respecto al tiempo propio

$$\rho_0 \mathrm{U}^\nu \frac{\partial \mathrm{U}^\mu}{\partial \mathrm{x}_\nu} = \rho_0 \mathrm{U}^1 \frac{\partial \mathrm{U}^\mu}{\partial \mathrm{x}_1} + \rho_0 \mathrm{U}^2 \frac{\partial \mathrm{U}^\mu}{\partial \mathrm{x}_2} + \rho_0 \mathrm{U}^3 \frac{\partial \mathrm{U}^\nu}{\partial \mathrm{x}_3} + \rho_0 \mathrm{U}^0 \frac{\partial \mathrm{U}^\mu}{c\partial t}$$

$$= \rho_0 \gamma (\mu_\mathrm{a} \frac{\partial U^\mu}{\partial \mathrm{x_a}} + \frac{\partial U^\mu}{\partial t}) = \rho_0 \gamma \frac{dU^\mu}{dt} = \rho_0 \frac{\mathrm{d}\mathrm{U}^\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{3.28}$$

(3.28) se convierte en

$$\mathrm{F}_\mu = \mathrm{U}^\mu \frac{\partial(\rho_0 \mathrm{U}^\nu)}{\partial \mathrm{x}_\nu} . + \rho_0 \frac{d\mathrm{U}^\mu}{\partial \tau} \tag{3.29}$$

Multiplicando esta ecuación por U^u sabemos de (3.26) que debemos conseguir un cero.

$$F_{\mu} U^{\mu} = (U^{\mu})^{2} \frac{\partial(\rho_0 U^{\nu})}{\partial x_{\nu}} . + \rho_0 U^{\mu} \frac{dU^{\mu}}{\partial \tau} =$$

$$= c^{2} \frac{\partial(\rho_0 U^{\nu})}{\partial x_{\nu}} + \frac{1}{2} \rho_0 \frac{dU^{2}_{\mu}}{d\tau} = 0 \tag{3.30}$$

desde que $(U^{\mu})^2 = c^2$ y el último término de (3.30) es cero. esto nos conlleva a

$$\frac{\partial(\rho_0 U^{\mu})}{\partial x_{\nu}} = 0 \tag{3.31}$$

En término s de ρ_0^K densidad de la masa en reposo como medida relativa a un marco arbitrario K, nosotros hemos usando $\rho_0 = \gamma^{-1} \rho_0^K$

$$\frac{\partial(\gamma^{-1} \rho_0^K U^{\nu})}{\partial x_{\nu}} = \frac{\partial(\gamma^{-1} \gamma \rho_0^K \mu_a)}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial(c \gamma \gamma^{-1} \rho_0^K)}{c \partial t} = 0 \tag{3.32}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial(\rho_0^K \mu_a)}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial(\rho_0^K)}{\partial t} = 0 \tag{3.33}$$

Esta es una ecuación de continuidad en términos de ρ_o^K, y esta expresa en forma diferencial la ley de la conservación de la masa en reposo. También vemos que la forma covariante de un tal una ecuación es dada por (3.31).

3.3. El tensor energía momento y las leyes de conservación

La ecuación (3.15) en ausencia de fuerzas externas se convierte en

$$\frac{\partial(T_{\mu\nu})}{\partial x_{\nu}} = 0 \tag{3.34}$$

Ecuación que expresa la ley de conservación del momento y la energía en forma diferencial y que son dadas por sus correspondientes ecuaciones de continuidad. Considerando

$$T^{ab} = \rho_0 U^{a} U^{b} = \rho_0 \gamma^2 \mu_a \mu_b = \rho \mu_a \mu_b = g_a \mu_b \tag{3.35}$$

donde

$$g_a = \rho \mu_a \quad \textbf{es la densidad del momento} \tag{3.36}$$

Las primeras tres ecuaciones en (3.34) nos llevan a

$$\frac{\partial(g_a\mu_b)}{\partial x_b} + \frac{\partial g_a}{\partial t} = 0 \quad a = (x, y, z) \tag{3.37}$$

Para los valores de a, esto es, para componentes del momento g_a, así conseguimos una ecuación de continuidad. La cantidad $g_a u_b$ representa **la densidad de corriente** de la a-componente del momento en la dirección b.
Similarmente para la cuarta ecuación en (3.34) μ = 0, tenemos

$$\frac{\partial(w\mu_b)}{\partial x_b} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad a = (x, y, z) \tag{3.38}$$

La cual es la ecuación de continuidad para la energía. En el presente caso cualquier flujo de energía procede a través del flujo de materia y como este tiene la velocidad u_b **la densidad de corriente de energía** es dada por wu_b.

Obsérvese que, en el caso de una partícula se tiene el vector de energía – momento P^u y su ley de conservación es dada por

$$\frac{\partial P^u}{\partial \tau} = 0$$

y en el caso de fluidos tenemos el tensor simétrico de energía- momento T^{uv} y su ley de conservación es dada por (3.34)

3.4. El tensor de energía – momento en presencia de presión

En los fluidos perfectos en reposo las únicas fuerzas entre volúmenes contiguos son perpendiculares a la superficie que los separa y están caracterizadas por la presión p. En fluidos en reposo y en equilibrio termodinámico no hay transferencia de energía entre elementos contiguos por lo que la forma del tensor de energía. momento en reposo es dado por

$$T^{ij} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

Los valores de la densidad de energía ρ y la presión p caracterizan al fluido perfecto, estas cantidades se relacionan a través del estado que depende del fluido

El tensor de energía momento a obtener debe caracterizarse por el hecho que cuando la presión tiende a cero este debe coincidir con el tensor dado en (3.18). Esto sugiere que debemos considerar el tensor de energía momento a el único tensor simétrico que puede ser asociado con el fluido $U^u\ U^v$ y con la métrica g^{uv} y así la única expresión más simple que puede ser hecha es, dada por

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 U^\mu U^\nu + pS^{\mu\nu} \text{, para algún tensor simétrico} S^{\mu\nu} \tag{3.40}$$

$$S^{\mu\nu} = \alpha U^\mu U^\nu + \beta g^{\mu\nu} \tag{3.41}$$

donde α y β son constantes. Desde que estamos en el caso de un fluido perfecto considerado en el universo de la relatividad especial y en el universo de los cuatro- vectores de Minkowski

Siguiendo nuestro procedimiento usual para la ley de la conservación $\partial_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$., demandamos así mismo que esta se reduzca en un límite apropiado a la ecuación (3.18) y a la ecuación de Euler en ausencia de fuerzas externas (3.19); eso nos lleva a tener $\alpha = \frac{1}{c^2}$ y $\beta = -1$, entonces , (3.40)y (3.41) dan

$$T^{\mu\sigma} = (\rho_0 + p / c^2) U^{\mu} U^{\nu} - p g^{\mu\nu} \tag{3.42}$$

El cuál es el tensor de energía -momento en el caso de la relatividad especial y para un fluido perfecto.

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se debe obtener el correspondiente tensor de energía – momento y sus correspondientes leyes de conservación, (las ecuaciones de continuidad). Para ello se ha obtenido.

Las relaciones entre la densidad de la masa en un sistema K y en el sistema en reposo (son dadas por 3.5)

Fue necesario considerar la fuerza de volumen de densidad, (3.10) y la densidad de potencia (3.12). y usar esos resultados para obtener (3.14) y luego la ecuación del movimiento (3.15) que permite tener el tensor de energía – momento en ausencia de presión (3.18)

La Conservación de la masa en reposo en ausencia de presión es dada por (3.31), (3.33).

Las leyes de conservación del tensor de energía – momento en ausencia de presión son dadas por (3.34), (3.37) y (3.38),

El tensor de energía en presencia de presión para un fluido ideal en el marco inercial de la relatividad especial es, dada por (3.42).

Recomendaciones

Considerar en el futuro, la acción de fuerzas viscosas.

Introducir los campos electromagnéticos para hacer estudios en magneto electrodinámica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aharoni, J (1959). *The special theory of relativity*. Oxford at the Clarendon Press.

Campos, H (2003). A preliminary model for growing of the convective Boundary layer. Ciencia e nature. (Special issue: Proceeding of Brazilian Workshop on Micrometerology, 2628 Noviembre 2003, Santa María RS).

Bert, Jansen (2013). *Teoría de la Relatividad General*. Universidad de Granada – España.

Landau, L.D. y Lifshitz E.M. (1987). *Fluid Mechanics.* New York Pergamon. Press

Richard C. Tolman (1949). *Relativity Thermodinamics and Cosmology*. Oxford at the Clarendon Press.

Rodríguez Salazar, J. F. (2021) *Progresos recientes en Termodinámica Irreversibles de fluidos Relativistas*. [Tesis doctoral, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo]. Repositorio Institucional de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

http://bibliotecavirtual.dgb.umich.mx:8083/xmlui/handle/DGB_UMICH/6269

Sandino Jhon Martin, Castrillo Arjuna (2010). Conservación de masa y Ecuaciones de Navier- Stokes. Para un fluido Ideal desde la Relatividad Especial. *RevistamTumbaga 5*,165-182.

https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3628319

Zdunkowsky, W. & Boot, A. (2003). *Dynamic of the atmosphere. A course in Theorical meteorology*. Cambridge, University Press.