

## Modelado matemático con funciones polinomiales del perfil de una leva mediante el análisis cinemático del seguidor

Mathematical modeling with polynomial functions of a cam profile through kinematic analysis of the follower

Luis Fernando Vargas Vera\*  ; Edward Javier León Lescano 

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n – Ciudad Universitaria, Trujillo, Perú.

\*Autor correspondiente: [lvargasv@unitru.edu.pe](mailto:lvargasv@unitru.edu.pe) (L. Vargas)

DOI: [10.17268/rev.cyt.2024.02.02](https://doi.org/10.17268/rev.cyt.2024.02.02)

### RESUMEN

En la presente investigación se diseñó el perfil de una leva para un sistema leva-seguidor-pistón-tacón, de modo que en el tacón se simule las fuerzas verticales que ejerce el pie de una persona al caminar. Este sistema puede contribuir con la innovación tecnológica de pruebas de calidad para las empresas de calzado de la región. Se obtuvieron los datos de fuerza vs tiempo en un ciclo de marcha estable, estableciendo la relación entre el desplazamiento y la fuerza a simular. El modelamiento matemático del perfil emplea funciones polinomiales, se definen 9 condiciones de frontera, obteniéndose un polinomio de grado 8, la leva diseñada a partir de su solución cumple con la ley fundamental de las levas (curvas continuas para la velocidad y aceleración). Para que el ángulo de presión entre la leva y el seguidor sea menor a  $30^\circ$  se determinó una excentricidad  $\varepsilon = 0$ , radio primario  $R_p$  de 3 pulgadas y un radio de base  $R_b$  de 2 pulgadas, lo que asegura que la transmisión de fuerza en la dirección del movimiento del seguidor sea eficiente. Se realizó el modelado del sistema en SolidEdge.

**Palabras clave:** síntesis de levas; funciones polinomiales; desplazamiento, fuerzas de marcha

### ABSTRACT

In the present research, the profile of a cam for a cam-follower-piston-heel system was designed, simulating the vertical forces exerted by a person's foot while walking on the heel. This system has the potential to contribute to technological innovation in quality testing for footwear companies in the region. Force vs. time data were obtained during a stable walking cycle, establishing the relationship between displacement and the simulated force. The mathematical modeling of the profile employs polynomial functions, defining 9 boundary conditions, resulting in an 8th-degree polynomial. The cam, designed based on its solution, complies with the fundamental law of cams (smooth curves for velocity and acceleration). To ensure that the pressure angle between the cam and the follower is less than  $30^\circ$ , an eccentricity  $\varepsilon$  of 0, a primary radius  $R_p$  of 3 inches, and a base radius  $R_b$  of 2 inches were determined. This ensures efficient force transmission in the follower's direction of motion. The cam-follower system was modeled in SolidEdge.

**Keywords:** cam synthesis, polynomial functions, displacement, walking forces.

### 1. INTRODUCCIÓN

Se utilizan sistemas de leva-seguidor por su capacidad de generar casi cualquier perfil de movimiento, lo que tiene gran variedad de aplicaciones en máquinas industriales; este perfil puede ser descrito por varias expresiones matemáticas en conjunto, donde cada una define el comportamiento del seguidor en un segmento (Milenković, 2022). Un diseño válido implica que estas funciones sean continuas hasta el tercer grado de derivación, es decir, que la velocidad, aceleración y sobreaceleración no presenten discontinuidades, de no cumplirse este requerimiento se generarían picos infinitos en sus derivadas; lo que en su implementación se traduce en vibraciones, cargas de choque y desgaste excesivo (Hamza et al., 2018).

El diseño de levas de baja velocidad se realiza tanto por métodos matemáticos como geométricos, si bien estos últimos son más rápidos de modelar, las curvas generadas por métodos matemáticos tienen más puntos de análisis, lo que implica que se generen perfiles de levas con mayor precisión y una menor fricción con el seguidor. Además, la cinemática obtenida a través del modelo matemático permite obtener de manera más fácil el modelado dinámico de la leva, es decir, relacionar la cinemática con las fuerzas involucradas (Aquino et al., 2018).



Según la complejidad del perfil de movimiento deseado y la cantidad de parámetros de diseño, el movimiento puede modelarse mediante funciones cicloidales, armónicas, curvas splines, curvas Bézier, entre otras. En aplicaciones reales, estos perfiles suelen tener segmentos con movimientos de tipo reposo, caída y ascenso; por lo que se utilizan funciones por tramos por cada segmento (Adduci et al., 2023).

Las levas diseñadas a partir de ecuaciones polinomiales se caracterizan por un buen desempeño a distintas velocidades, por lo que son flexibles en su aplicación a distintos sistemas. Los cálculos mediante este método también permiten el control preciso de la posición final del seguidor, limitar las vibraciones a amplitudes mínimas y reducir el golpeteo (Ade et al., 2020).

Todorović et al. (2022) compararon el desempeño de métodos que hacen uso de funciones de Fourier, curvas armónicas, polinomios de quinto grado (3-4-5), o superior, entre otros. Utilizando algoritmos de optimización metaheurísticos, se demostró que los polinomios de octavo grado demuestran una mejora del 12.8% en comparación a los de quinto grado; mientras que los de décimo sexto grado solo mejora un 3% respecto a los de octavo grado, polinomios de grado superior no son convenientes por el alto coste computacional requerido y la presencia de inestabilidades.

Otros estudios refieren a métodos basados en elementos finitos para diseño de perfil de leva, lo que considera parámetros que afectan al rendimiento cinemático y optimizadores computacionales (Chi et al., 2023); también se pueden optimizar perfiles de movimiento para obtener mejores características dinámicas a partir de los parámetros de movimiento (Nguyen et al., 2021). Así mismo, se busca la mayor transmisión de las fuerzas de la leva al seguidor, para esto se suele modular la excentricidad  $\epsilon$  por prueba y error, algo que es ineficiente en la mayoría de casos (Freitas y Soares, 2023).

La industria del calzado en el distrito de El Porvenir es una de las industrias menos desarrolladas tecnológicamente en el país, a pesar de ser responsable del 31.1% de la producción de calzado a nivel nacional (Salinas y Rodríguez, 2021). La producción se caracteriza por ser en gran medida artesanal y contar con procesos de fabricación tradicionales (Pérez et al., 2008). La falta de tecnología moderna ha impedido la optimización en sus procesos, lo que resulta en una menor eficiencia y una producción reducida en términos de cantidad y calidad, limitando su competitividad frente a mercados chinos o brasileños (Cachay-Pilco et al., 2023).

En este estudio se diseña el perfil de una leva para simular las fuerzas verticales que ejerce el pie al caminar, esto es de gran utilidad para los fabricantes de calzado para determinar la duración del tacón del zapato y con ello se podrá explorar los materiales adecuados para una mayor vida útil. Se completa el estudio diseñando un sistema oleo-hidráulico accionado por el seguidor de la leva para simular estas fuerzas.

## 2. METODOLOGÍA

### 2.1 Objeto de estudio

El objeto de estudio es el perfil de una leva para simular la fuerza del pie al caminar.

### 2.2 Métodos y técnicas

El presente estudio es una investigación aplicada, se muestran los parámetros a considerar en el análisis de datos en la Tabla 1.

**Tabla 1.** Método de análisis de datos

LEVA – SEGUIDOR	DESCRIPCIÓN
Datos	Fuerza vs tiempo del pie en el ciclo de marcha.
Resultados	Curvas de desplazamiento, velocidad y aceleración del seguidor en función del tiempo. Fuerza vs tiempo del pie en el ciclo de marcha obtenidos.
Condiciones de frontera	$\Theta$ , $\beta$ , s, v, a
Giro de leva	0° a 360°

Se considera el siguiente procedimiento para la realización de esta investigación:

### 2.2.1 Modelo matemático de la leva mediante funciones polinomiales.

A partir de estudios en adultos jóvenes se obtiene la fuerza vertical ejercida durante un ciclo de marcha estable, con ello se definen los segmentos de leva según la curva de fuerza en el tiempo; estas curvas son combinaciones de fases de subida, bajada y detenimiento. Se identificarán los puntos críticos, que corresponden a los máximos y mínimos de la fuerza registrada en el ciclo de marcha; a partir de los cuales definiremos las condiciones de frontera (CFs), estas incluyen el ángulo de rotación de la leva ( $\theta$ ), el desplazamiento del seguidor ( $s$ ), la velocidad ( $v$ ) y la aceleración ( $a$ ).

Se realizará la aproximación del perfil de movimiento requerido de modo que pase por cada uno de los puntos críticos, habiendo establecido las CFs se podrá establecer el grado del polinomio a resolver; dicho polinomio se derivará tres veces, lo que permite obtener funciones para la velocidad, la aceleración y la sobreaceleración. Las CFs se reemplazarán en cada una de las ecuaciones resultantes. Para la resolución del sistema de ecuaciones se utilizará el método de matriz inversa, para lo cual se utilizará el software Excel de Microsoft en su versión 2021.

### 2.2.2 Comprobación de la ley de continuidad

Se graficarán las curvas de desplazamiento ( $s$ ), velocidad ( $v$ ), aceleración ( $a$ ) y sobreaceleración ( $j$ ) en cada segmento del perfil de la leva usando Excel 2021. Estos gráficos se generan para verificar que las levas cumplan con la ley de continuidad, lo que significa que no presenten discontinuidades en cada curva.

### 2.2.3 Curva de Fuerza vs Tiempo que el mecanismo ejerce sobre una superficie de prueba

Se seleccionará un mecanismo con leva – seguidor para simular las fuerzas; para ello se encontrará una ecuación que relacione la fuerza ejercida por el mecanismo y el desplazamiento del seguidor. Posteriormente se graficará la curva Fuerza vs Tiempo en el software Excel. La curva generada por el mecanismo debe pasar por los puntos críticos establecidos previamente.

### 2.2.4 Dimensiones y modelo del mecanismo de seguidor de leva en software CAD

Se establecen las dimensiones del perfil para que la transmisión de fuerzas de la leva al seguidor se dé eficientemente; esto dependerá del tamaño del círculo primario, los valores excentricidad y el ángulo de presión. Usando el software SolidEdge versión estudiantil de Siemens se modelará y dimensionará el mecanismo de seguidor de leva en distintos ángulos de giro.

## 2.3 Modelado matemático del perfil de una leva

### 2.3.1 Funciones polinomiales

Son un tipo fundamental de funciones matemáticas que se expresan en términos de polinomios, sus aplicaciones en diseño de levas tienen la ventaja de ser versátiles y adaptables a distintas especificaciones. Una ecuación polinomial tiene por forma general:

$$s = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6 + \dots + C_nx^n \quad (1)$$

Donde:

- $s$ : Función del seguidor.
- $x$ : Variable dependiente que puede ser tanto tiempo como la relación  $\theta/\beta$ .
- $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ : Coeficientes constantes a determinar.

Para establecer el grado del polinomio debemos primero definir las condiciones de frontera a partir de los diagramas  $s$  *v a*  $j$ . Debido a la existencia de un término independiente en la expresión de grado  $n$ , en ésta habrá  $n + 1$  términos; al derivar sucesivamente esta ecuación nos encontraremos con un sistema de ecuaciones lineales, el cual se puede solucionar a partir de los coeficientes, si  $f$  es la cantidad de condiciones de frontera, entonces se puede resolver  $f$  ecuaciones con  $f$  incógnitas; por lo que el grado del polinomio deberá ser  $n = f - 1$  (Pridgen, 2011).

### 2.3.2 Condiciones de Frontera

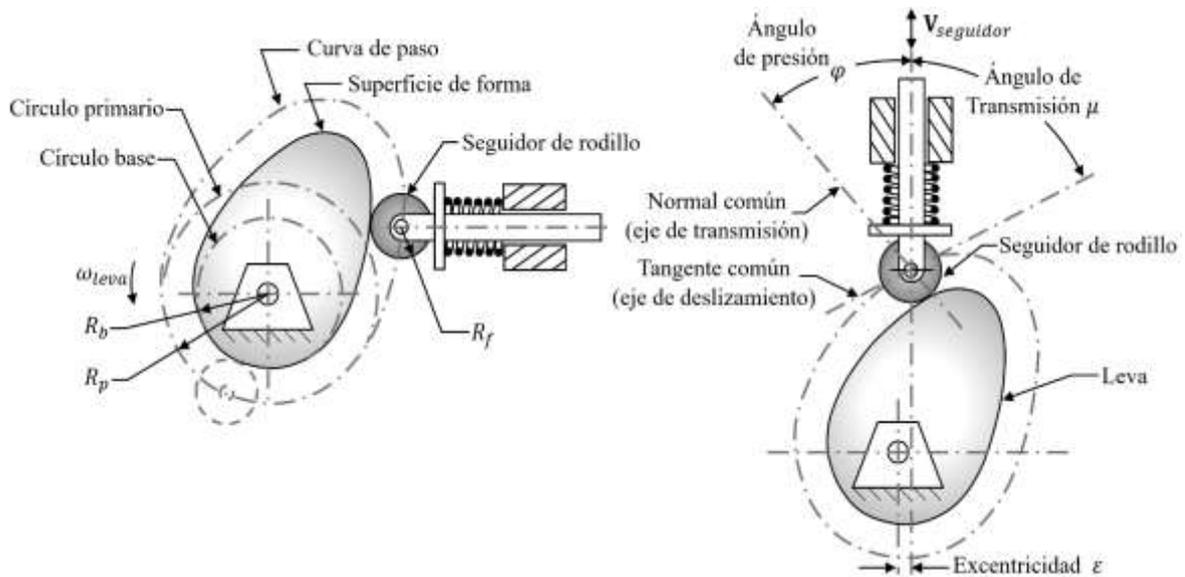
Estas condiciones se establecen por cada segmento, la resolución óptima requiere que se reduzca al mínimo los segmentos del perfil, asimismo, por cada segmento es deseable minimizar la cantidad de CFs, caso contrario, se produciría una expresión de grado elevado, lo cual podría provocar oscilaciones indeseables.

### 2.3.3 Dimensionamiento de levas

Después de definir las funciones  $(s)$ ,  $(v)$ ,  $(a)$  y  $(j)$  que describen el movimiento del seguidor, el siguiente paso es asignar dimensiones, en donde se consideran tanto el ángulo de presión como el radio de curvatura (Zhang et al., 2022); si el seguidor es de tipo cara plana, los factores se relacionan con el círculo de base; en cambio, si son rodillos o curvos, se relacionan con el círculo primario, ambos círculos son concéntricos y su centro de rotación coincide con el de la leva (Mills et al., 1993).

En la Figura 1 se observa que el círculo base ( $R_b$ ) será el de menor tamaño tangente al perfil, análogamente, el círculo primario ( $R_p$ ) es el mínimo que puede trazarse de manera que sea tangente a la curva de paso, que es el lugar geométrico que sigue el centro del seguidor en su recorrido (Cardona et al., 2014), independientemente del tipo de seguidor utilizado, el círculo de base está presente en todas las levas radiales.

El ángulo de presión ( $\varphi$ ) representa el ángulo existente entre el eje de desplazamiento del seguidor y el eje de transmisión, para un ángulo de presión de  $0^\circ$  la fuerza se transforma por completo en movimiento lineal del seguidor sin que se aplique fuerza en la dirección de desplazamiento; por otro lado, si el ángulo de presión es de  $90^\circ$ , el seguidor permanece inmóvil (Yousuf, 2021). En el caso de seguidores con movimientos de traslación, se recomienda un ángulo de presión en el rango de  $0$  a  $30^\circ$  para prevenir sobrecarga lateral en el seguidor; en cambio, para seguidores con movimiento oscilante en un brazo pivotante, se considera aceptable un ángulo de presión de hasta  $35^\circ$  dependiendo de las características específicas del mecanismo y su diseño (Mishra y Bhowmik, 2021).



**Figura 1.** Parámetros geométricos de una leva con seguidor de rodillo (Pleguezuelos González et al., 2022).

Una relación muy importante entre  $\varphi$ , el desplazamiento  $s$ , la velocidad  $v$ , la excentricidad  $\epsilon$  y el radio del círculo primario  $R_p$  es dada por la ecuación

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{v - \epsilon}{s + \sqrt{R_p^2 - \epsilon^2}} \right) \quad (2)$$

En esta ecuación, la velocidad  $v$  tiene por unidad a longitud/rad, mientras que las unidades del resto de magnitudes se expresan en longitudes compatibles. Las variables  $s$  y  $v$  ya han sido definidas en esta fase del diseño de perfil, en este momento se procede al cálculo de  $R_p$  y  $\epsilon$  con el fin de obtener un valor máximo aceptable para el ángulo de presión  $\varphi$ . A medida que aumenta el valor de  $R_p$ , se observará una disminución en el valor de  $\varphi$  (DasGupta y Ghosh, 2004).

### 2.3.4 Cálculo del círculo primario

El radio del círculo primario y la excentricidad se encuentran involucrados en la expresión trascendental de la ecuación (2), lo que permite resolver convenientemente para estos valores de manera directa. El enfoque más sencillo implica establecer una medida experimental para  $R_p$ , así como un valor inicial cero para  $\varepsilon$ . Haciendo uso de un solucionador de ecuaciones se determina de manera eficiente los valores de  $\varphi$  a lo largo de toda la leva. Posteriormente, se ajusta el valor de  $R_p$  y se repite el cálculo hasta obtener una configuración adecuada que cumpla con los requisitos deseados.

### 2.3.5 Uso de la excentricidad

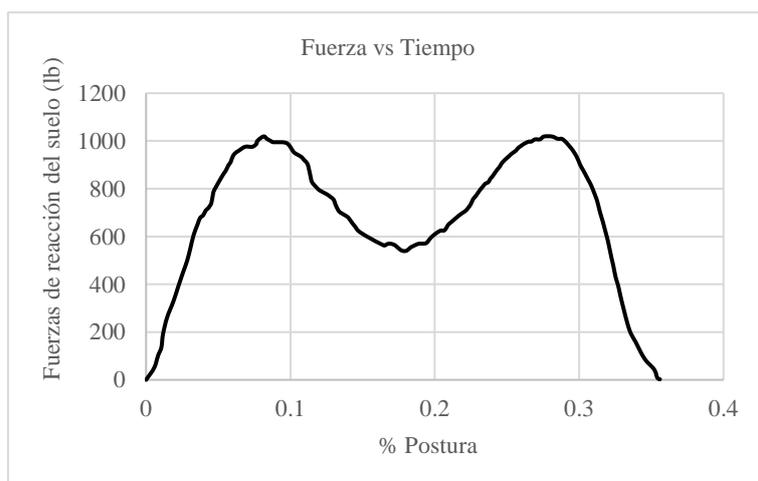
En caso de que no sea factible crear una leva de tamaño adecuado con un ángulo de presión admisible, se puede introducir una excentricidad que pueda ajustarlo. No obstante, es importante mencionar que el uso de excentricidad como medio de control presenta ciertas restricciones. Cuando se aplica una velocidad angular positiva ( $\omega$ ), una excentricidad positiva reducirá el ángulo de presión durante el ascenso, pero lo aumentará durante la fase de descenso. Por otro lado, una excentricidad negativa producirá efectos opuestos en el ángulo de presión.

Es importante considerar estas implicaciones puesto que el resultado de este recurso puede variar según la configuración específica y las necesidades de la aplicación.

En un ciclo de marcha estable, la fuerza que ejerce el pie de un adulto promedio se representa en la , la cual ha sido medida en una cinta de correr con placas de fuerza incorporadas, a un grupo representativo de adultos de entre 20 y 30 años saludables (Li y Hamill, 2002), resultando en la Figura 2. Esta gráfica será considerada como dato de entrada para luego encontrar un perfil de leva que simule dicha curva a través de un sistema leva – seguidor representado en la Figura 4. Estudios indican que las curvas de fuerza son lo suficientemente estables a partir del quinto paso de inicia la marcha (Racic y Pavic, 2008), además, las variaciones de forma entre individuos de distintos pesos y alturas son mínimas por lo que no son relevantes en la mayoría de estudios (Lianxin et al., 2021).

### 2.3.6 Fuerza vertical de una persona al caminar

En nuestro estudio tomamos la curva que representa la fuerza humana al caminar, la cual ha sido medida en una cinta de correr con placas de fuerza incorporadas, a un grupo representativo de adultos de entre 20 y 30 años saludables (Li y Hamill, 2002), resultando en la Figura 2. Esta gráfica será considerada como dato de entrada para luego encontrar un perfil de leva que simule dicha curva a través de un sistema leva – seguidor representado en la Figura 4. Estudios indican que las curvas de fuerza son lo suficientemente estables a partir del quinto paso de inicia la marcha (Racic y Pavic, 2008), además, las variaciones de forma entre individuos de distintos pesos y alturas son mínimas por lo que no son relevantes en la mayoría de estudios (Lianxin et al., 2021).



**Figura 2.** Curva fuerza vs tiempo en el contacto del pie con el suelo (Li y Hamill, 2002).

La gráfica que se ilustra en la Figura 3 solo considera el contacto del pie en el caminar estable, se determinó que, a una velocidad confortable, este contacto dura un promedio de 0.356 segundos, el tiempo de balanceo hasta el siguiente contacto del mismo pie dura un aproximado de 0.5 segundos (Osorio y Valencia, 2013).

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para simular la curva definimos los puntos críticos por donde pasa la nueva curva fuerza – tiempo. El punto 1 ( $P_1$ ) fue el inicio de la curva, el primer punto máximo es el punto 2 ( $P_2$ ), el punto 3 ( $P_3$ ) se considera al punto mínimo, el segundo punto máximo es el punto 4 ( $P_4$ ), el punto 5 ( $P_5$ ) es el final de la curva y el punto 6 ( $P_6$ ) cuando finaliza el ciclo.

La fuerza que se obtiene se transmite desde la leva hasta el tacón (ver Figura 4).

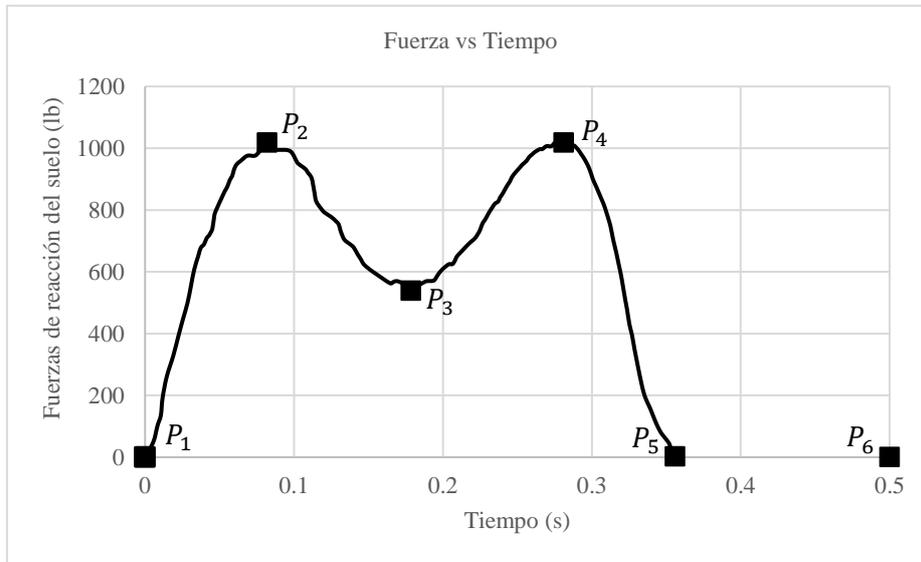


Figura 3. Fuerza humana al caminar en el tiempo.

Para obtener los datos de los puntos críticos de la gráfica se usó el método escalar en GeoGebra, resultando en los datos de la Tabla 2.

Tabla 2. Puntos máximos y mínimos de la curva fuerza vs tiempo

Puntos	Tiempo (s)	Fuerza (lb)
Punto 1	0,000	0,000
Punto 2	0,079	110,282
Punto 3	0,172	79,338
Punto 4	0,276	106,667
Punto 5	0,356	0,000
Punto 6	0,500	0,000

A partir de los datos de la curva fuerza vs tiempo se establecieron las condiciones de frontera para la aplicación del método de funciones polinomiales, con el fin de encontrar las curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración del seguidor.

#### 3.1 Condiciones de frontera

Tomando en cuenta que el ángulo de la leva gira a una velocidad constante  $\omega = 12.566 \text{ rad/s}$ , se puede hallar el ángulo del giro de leva  $\theta$  en cada punto del tiempo  $t$  aplicando  $\theta = \omega \times t$ , resultando en la Tabla 3.

Tabla 3. Valores del ángulo de rotación de la leva

Puntos	Tiempo (s)	$\theta$ (rad)	$\theta$ (°)
Punto 1	0,000	0,000	0,000
Punto 2	0,079	0,993	56,880
Punto 3	0,172	2,161	123,840

Puntos	Tiempo (s)	$\theta$ (rad)	$\theta$ (°)
Punto 4	0,276	3,468	198,720
Punto 5	0,356	4,474	256,320
Punto 6	0,500	6,283	360,000

### 3.2 Desplazamientos

En la Figura 4 mostramos el sistema leva – seguidor a diseñar para simular la curva fuerza – tiempo del ciclo de marcha de una persona, la nueva curva obtenida representará la fuerza que ejerce el pistón sobre el tacón.

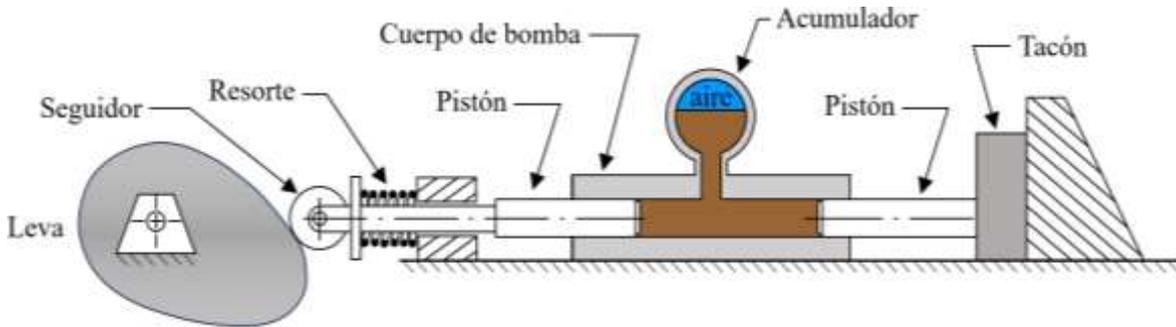


Figura 4. Modelo del sistema leva – seguidor (Norton, 2013).

Según la Figura 2 el desplazamiento que realiza el seguidor será el mismo desplazamiento que realice el pistón. Se deduce la ecuación 3 que relaciona el desplazamiento  $s$  del seguidor, el volumen de presión  $V$ , la fuerza  $F$ , la presión  $P$  y el área  $A$  del pistón sobre el tacón:

$$s = \frac{F}{\left(\frac{P}{V}\right) * A^2} \quad (3)$$

El área es un dato que resulta de la selección del radio del pistón (Figura 4), para nuestra investigación asignaremos un radio  $R_s$  de 3/4", mientras que la presión se obtiene al dividir la presión de la bomba entre el volumen desplazado del pistón, que para el caso es de 30  $psi/pulg^3$  (Norton, 2013).

A partir de la ecuación 3 se puede establecer una correlación entre el tiempo, la magnitud de la fuerza y el desplazamiento, resultando en la Tabla 4.

Tabla 4. Valores del desplazamiento

Puntos	Tiempo (seg)	Fuerza (lb)	s (pulg)
Punto 1	0,000	0,000	0,000
Punto 2	0,079	110,282	1,177
Punto 3	0,172	79,338	0,847
Punto 4	0,276	106,667	1,139
Punto 5	0,356	0,000	0,000
Punto 6	0,500	0,000	0,000

Comparando las Tablas 3 y 4 tenemos la correspondencia del desplazamiento del seguidor con el ángulo de giro (ver Tabla 5).

Tabla 5. Correspondencia de desplazamiento del seguidor y ángulo de giro de leva

Puntos	$\theta$ (°)	s (pulg)
Punto 1	0,00	0,000
Punto 2	56,88	1,177
Punto 3	123,84	0,847
Punto 4	198,72	1,139
Punto 5	256,32	0,000
Punto 6	360,00	0,000

Solo se realiza el análisis de modelamiento desde el punto 1 al punto 5, al que denominaremos segmento 1, pues del punto 5 al 6 (segmento 2) la función desplazamiento es nula. Para ello, establecemos las siguientes condiciones de frontera:

**Tabla 6.** Condiciones de frontera del segmento 1

Datos	Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4	Punto 5
$\theta^\circ$	0,000	56,88	123,840	198,720	256,320
s (pulg)	0,000	1,177	0,847	1,139	0,000
v (pulg/rad)	0,000	No se sabe	No se sabe	No se sabe	0,000
a (pulg/rad <sup>2</sup> )	0,000	No se sabe	No se sabe	No se sabe	0,000
j (pulg/rad <sup>3</sup> )	No se sabe				

### 3.3 Diseño del perfil de la leva

Tomando en cuenta las nueve condiciones de frontera en el segmento 1, consideraremos un polinomio de grado 8 para el desplazamiento. Como variable independiente utilizaremos el ángulo normalizado  $\theta/\beta_1$ , donde

$\beta_1$ : es el ángulo máximo recorrido por la leva en el primer segmento.

$$\beta_1 = 256.32^\circ = 4.474 \text{ rad}$$

$\theta$ : es el ángulo recorrido en cada instante en el primer segmento.

$$\theta = [0^\circ, \dots, 256.32^\circ]$$

Entonces se definen las ecuaciones 4, 5 y 6 para desplazamiento, velocidad y aceleración respectivamente.

$$s = C_0 + C_1 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right) + C_2 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2 + C_3 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3 + C_4 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^4 + C_5 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^5 + C_6 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^6 + C_7 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^7 + C_8 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^8 \tag{4}$$

$$v = \frac{1}{\beta_1} \left[ C_1 + 2C_2 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right) + 3C_3 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2 + 4C_4 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3 + 5C_5 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^4 + 6C_6 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^5 + 7C_7 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^6 + 8C_8 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^7 \right] \tag{5}$$

$$a = \frac{1}{\beta_1^2} \left[ 2C_2 + 6C_3 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right) + 12C_4 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2 + 20C_5 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3 + 30C_6 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^4 + 42C_7 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^5 + 56C_8 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^6 \right] \tag{6}$$

Al reemplazar las condiciones de frontera se tiene un sistema de nueve ecuaciones con nueve variables cuyas soluciones son:

$$C_0 = C_1 = C_2 = 0$$

$$\begin{aligned} C_3 &= 612.721 & C_6 &= -13873.375 \\ C_4 &= -4057.255 & C_7 &= 8822.470 \\ C_5 &= 10696.565 & C_8 &= -2201.126 \end{aligned}$$

Reemplazando los valores obtenidos se obtienen las ecuaciones 7, 8 y 9:

$$s = 612.721 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3 - 4057.255 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^4 + 10696.565 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^5 - 13873.375 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^6 + 8822.470 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^7 - 2201.126 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^8 \quad (7)$$

$$v = 410.889 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2 - 3627.709 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3 + 11955.135 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^4 - 18606.878 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^5 + 13804.744 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^6 - 3936.181 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^7 \quad (8)$$

$$a = 183.694 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right) - 2432.730 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2 + 10689.432 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3 - 20796.184 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^4 + 18514.831 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^5 - 6159.042 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^6 \quad (9)$$

También hallamos una expresión de la sobreaceleración  $j$  para el segmento 1, derivando la función aceleración con respecto a  $\theta$  y reemplazando los valores ya conocidos ( $C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$  y  $C_8$ ) se obtiene la ecuación 9:

$$j = 41.061 - 1087.587 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right) + 7168.297 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2 - 18594.469 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3 + 20693.306 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^4 - 8260.467 \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^5 \quad (10)$$

Las gráficas de las funciones  $s, v, a, j$  respecto al tiempo son dadas en el anexo A.

### 3.4 Diagrama fuerza vs tiempo

Se ha obtenido la relación:

$$F = 113909119.914 \left(\frac{t}{\beta_1}\right)^3 - 9478461506.996 \left(\frac{t}{\beta_1}\right)^4 + 314021742122.031 \left(\frac{t}{\beta_1}\right)^5 - 5118083419157.450 \left(\frac{t}{\beta_1}\right)^6 + 40900185985788.700 \left(\frac{t}{\beta_1}\right)^7 - 128230063836800.000 \left(\frac{t}{\beta_1}\right)^8 \quad (11)$$

Con ayuda de Excel obtenemos valores de la fuerza para el segmento 1.

$$t = [0, \dots, 0.356]seg$$

$$F = [0, \dots, 126.175]lb$$

La curva fuerza vs tiempo se muestra en la Figura 5, la fuerza máxima es 126.175 lb se da cuándo han pasado 0.1 seg, desde que la leva ha empezado a girar y hasta ese momento la leva gira 74°, el seguidor está en su punto más alto ejerciendo máxima presión correspondiente cuando el pie está en la fase inicial de apoyo.

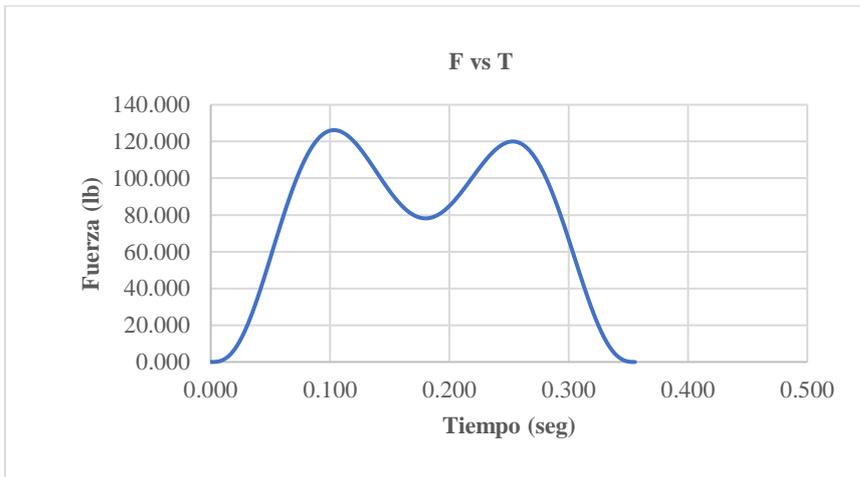


Figura 5. Curva fuerza vs tiempo del pistón sobre el tacón.

### 3.5 Dimensionamiento de la leva

Las dimensiones que hallamos para el radio primario de la leva, el radio del rodillo y la excentricidad, se obtienen de la ecuación (2) usando los valores de posición  $s$  y velocidad  $v$ , que se calculan con las ecuaciones polinómicas 7 y 8. Este cálculo se realizó para los  $360^\circ$  que gira la leva, asignando valores al radio de un círculo primario  $R_p$  y a la excentricidad  $\varepsilon$  (Figura 1) de manera iterativa, el valor del ángulo de presión  $\varphi$  debe ser menor o igual a  $30^\circ$ , para que la transmisión de fuerzas desde la leva al seguidor se realice de manera eficiente. Entonces usando una hoja de cálculo en Excel obtenemos los siguientes resultados:

$$R_p = 3'' \qquad \varepsilon = 0''$$

$$\varphi_{max} = 26.6^\circ \text{ en la subida} \qquad \varphi_{max} = -25.7^\circ \text{ en la bajada}$$

Los valores de  $R_f$  y  $R_s$  son  $1''$  y  $3/4''$  respectivamente, así mismo, el radio del círculo base es la diferencia entre el  $R_p$  y  $R_f$  (Figura 1), siendo  $R_b = 2''$ . A partir de estas dimensiones y la función polinomial se hizo el modelado de la leva en SolidEdge (Anexo B), mostrándose distintas posiciones de giro de la leva.

### 3.6 Discusiones

Las derivadas de la función polinómica para el desplazamiento permanecen continuas en todo el ciclo hasta la función de aceleración, para el caso de sobreaceleración se tiene continuidad en toda la fase apoyo del pie, la discontinuidad que se presenta al inicio y fin de la fase, cuando el pie no está en contacto con el piso, es finita en su valor de sobreaceleración, por lo que la leva diseñada cumple con la ley fundamental de las levas.

La velocidad de rotación de la leva considerada para el análisis, permite simular 120 pasos/min, obteniéndose una velocidad pico del seguidor aceptable de 22.5 pulg/s (0.57 m/s) a los  $37^\circ$  de rotación de la leva. El valor pico de aceleración es alto  $685.5 \text{ pul/s}^2$  ( $17.4 \text{ m/s}^2$ ) por lo que la fuerza de contacto entre leva y rodillo es alta, sin embargo, no toda la fuerza de contacto es transmitida al seguidor en la dirección del movimiento (ángulo de presión) con lo que la fuerza entre leva y rodillo se reduce. El diseño de rodillo y el dimensionamiento de la leva se realizaron tomando en cuenta la condición de ángulo de presión (menor que  $30^\circ$ ), esto minimiza la fuerza de contacto generada entre el seguidor y los cojinetes de apoyo deslizantes.

## 4. CONCLUSIONES

El modelado matemático del perfil de una leva para simular el ciclo de marcha humano se puede realizar usando una función polinomial de grado ocho. Esta función queda completamente definida con nueve condiciones de frontera, cinco para el desplazamiento, dos para la velocidad y dos para la aceleración del seguidor (Tabla 6). La función desplazamiento es continua en su primera (velocidad) y segunda derivada (aceleración), y garantiza que el contacto entre leva y seguidor no haya fuerzas de impacto. Además, al obtener la curva de sobreaceleración se tiene que sus valores son finitos en todo el intervalo de los  $360^\circ$ . Las dimensiones obtenidas del círculo primario, excentricidad y círculo base aseguran un ángulo de presión menor a  $30^\circ$  en un giro completo, teniendo como máximos a  $26.6^\circ$  en la subida y  $-25.7^\circ$  en la bajada, esto asegura que la transmisión de la fuerza entre leva y seguidor sea eficiente.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adduci, R., Willems, J., Kikken, E., Gillis, J., Croes, J., y Desmet, W. (2023). An Integrated Co-Design Optimization Toolchain Applied to a Conjugate Cam-Follower Drivetrain System. *Machines*, 11(4), 486.
- Ade, M., Kucheriya, N., Laware, S., Patil, T., Jain, A., y Dakhole, M. (2020). Cam Design using Polydyne Approach. *International Research Journal of Engineering and Technology*, 7(7), 1388-1392.
- Aquino, S., Tierra, L., Pozo, E., Escobar, M., Ordoñez, M., y Choto, L. (2018). Análisis cinemático de levas de baja velocidad con leyes combinadas en base a métodos geométricos y matemáticos. *Dominio de las Ciencias*, 4(4), 185-205.
- Cachay-Pilco, A., Yalta-Panaifo, D., Vidaurre-Rojas, P., Fasanando-García, S., y Ludeña-Cardenas, J. C. (2023). Nivel de planificación y la competitividad de Mypes peruanas de venta de calzados. *Revista Amazónica de Ciencias Económicas*, 2(2), 549.
- Cardona, S., Zayas, E., y Jordi, L. (2014). Radius of curvature and sliding velocity in constant-breath cam mechanisms. *Mechanisms and Machine Theory*, 181-192.
- Chi, J., Xing, M., Xing, J., y Song, J. (2023). The Design of the Controlling Cam Optimization Profile in an Automated-Cutoff Valve Based on Ga. *Advances in Engineering Technology Research*, 5(2), 128-128.
- DasGupta, A., y Ghosh, A. (2004). On the determination of basic dimensions of a cam with a translating roller-follower. *Journal of Mechanical Design*, 126.
- Freitas, A. A., y Soares, L. F. (2023). Nomograms for maximum pressure angles in radial cams with follower eccentricity for cycloidal and harmonic motion curves. *Acta Scientiarum. Technology*, 45(1), e57823.
- Hamza, F., Abderazek, H., Lakhdar, S., Ferhat, D., y Yıldız, A. R. (2018). Optimum design of cam-roller follower mechanism using a new evolutionary algorithm. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 99, 1267-1282.
- Li, L., y Hamill, J. (2002). Characteristics of the vertical ground reaction force component prior to gait transition. *Research quarterly for exercise and sport*, 73(3), 229-237.
- Lianxin, Y., Tuning, X., Kuangen, Z., Ken, C., y Chenglong, F. (2021). Allowing the Load to Swing Reduces the Mechanical Energy of the Stance Leg and Improves the Lateral Stability of Human Walking. *IEEE TRANSACTIONS ON NEURAL SYSTEMS AND REHABILITATION ENGINEERING*, 29.
- Milenković, B. (2022). Kinematic and dynamic analysis of cam and follower using matlab. *Proceedings on Engineering Sciences*, 4(3), 379–384.
- Mills, J., Notash, L., y Fenton, R. (1993). Optimal design and sensitivity analysis of flexible cam mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 563-581.
- Mishra, R., y Bhowmik, D. (2021). A brief description designing, modelling, and materials of cam-follower mechanism. *School of Mechanical Engineering*.
- Nguyen, T. T., Duong, T. X., y Nguyen, V. S. (2021). Design general Cam profiles based on finite element method. *Applied Sciences*, 11(3), 6052.
- Norton, R. L. (2013). *Diseño de Maquinaria*. México D.F: McGraw - Hill.
- Orosio, J., y Valencia, M. (2013). Bases para el entendimiento del proceso de la marcha humana. *Archivos de medicina*, 13(1), 88-96.
- Pérez, C., Mendoza, J., Carranza, S., y Ritchie, D. (2008). El cluster de calzado de El Porvenir, La Libertad. *Revista Internacional de Investigación y aplicación del método de casos*.
- Pleguezuelos González, M., Sánchez Sánchez, M., Pedrero Moya, J. I., y Castejón López, M. (2022). Proyecto colaborativo para la mejora de la docencia en el análisis cinemático y dinámico de levas mediante hojas de cálculo. *UNED - Universidad Nacional de Educación a Distancia*.
- Pridgen, B. (2011). Comparison of polynomial profiles and input shaping for industrial applications. *Georgia Institute of Technology*.
- Racic, V., y Pavic, A. (2008). Human Walk and Running Forces: Novel Experimental Characterization and Application in Civil Engineering Dynamics. *ResearchGate*.
- Salinas, J. G., y Rodríguez, R. A. (2021). Gestión humana e innovación en las mypes de calzado en la ciudad de Trujillo-Perú en 2019. *Journal Management & Business Studies*, 2(1), 1–16.
- Todorović, M., Bulatović, R., Marković, G., Bošković, M., y Savković, M. (2022). Cam profile optimization for minimal jerk. *Mathematical Institute SANU*, 107-108.

Yousuf, L. (2021). Nonlinear dynamics phenomena in globoidal cam with roller follower mechanism. *Chaos, Solitons and Fractals*, 150.

Zhang, C., Yang, J., y Chang, Z. (2022). *Machinery Dynamics*. Academic Press.

ANEXOS:

ANEXO A

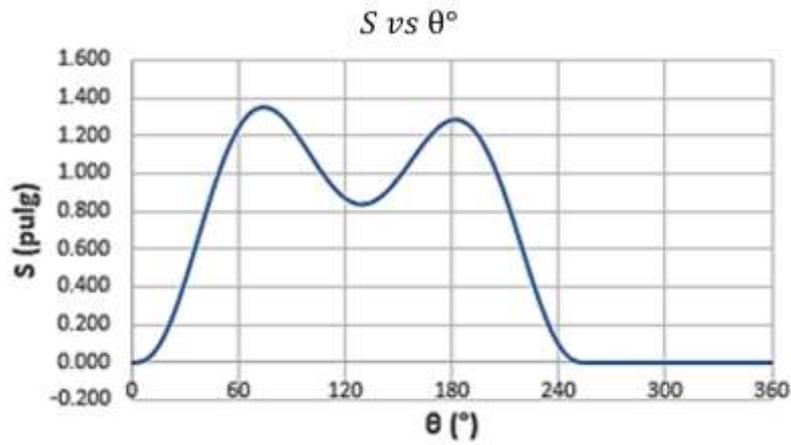


Figura A1. Curva de desplazamiento para una vuelta completa

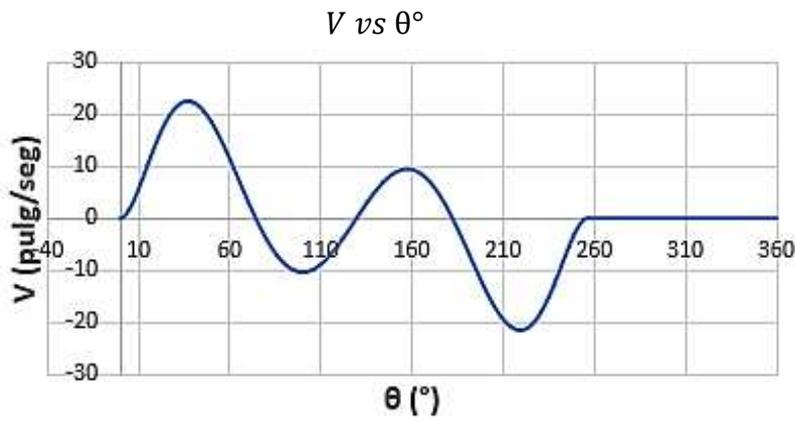


Figura A2. Curva de velocidad para una vuelta completa

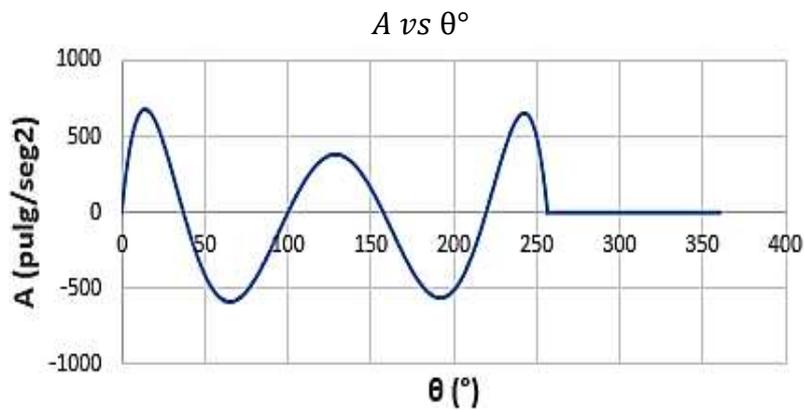


Figura A3. Curva de aceleración para una vuelta completa

$$J \text{ vs } \theta^\circ$$

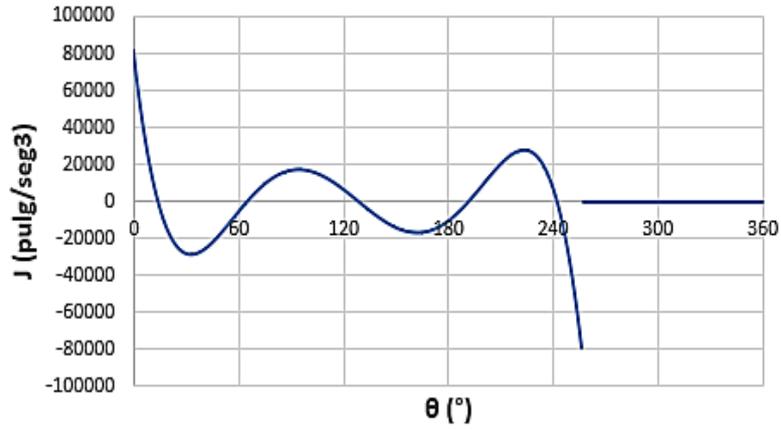
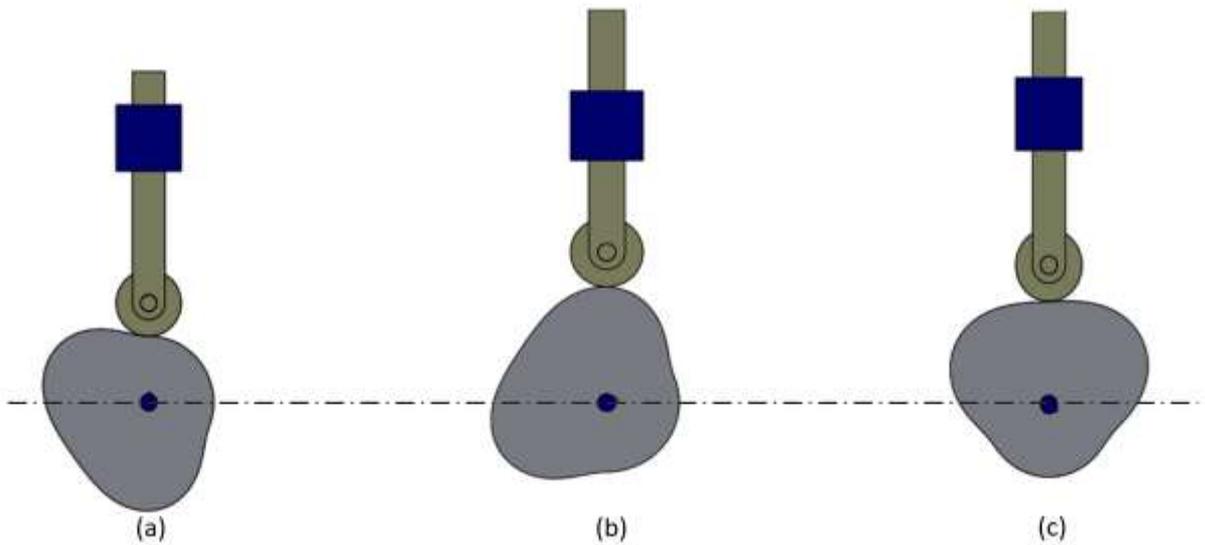


Figura A4. Curva de sobrealceleración para una vuelta completa

## ANEXO B

Modelamiento del sistema leva-seguidor en SolidEdge.



La leva se encuentra en el punto más bajo (a), cuando gira 74° (b) el seguidor se encuentra en el punto más alto (1.347''), cuando gira 135° el seguidor se encuentra a 0.835'' respecto a (a).