

Maximización de La Ecuación de Weizsacker-Williams en la Aniquilación Electron-Positrón, y probabilidad de creación de quarks pesados

Maximization of the Weizsacker-Williams Equation in Electron-Positron Annihilation, and probability of creation of heavy quarks

Carlos G. Moya Egoavil^{1,*}; Antonio I. Rivasplata Mendoza²

1 Escuela de posgrado, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n – Ciudad Universitaria, Trujillo, Perú,
2 departamento de Física, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n – Ciudad Universitaria, Trujillo, Perú,
antrivas@unitru.edu.pe

* Autor correspondiente: cmoya@unitru.edu.pe (C. Moya)

DOI: [10.17268/rev.cyt.2021.04.14](https://doi.org/10.17268/rev.cyt.2021.04.14)

RESUMEN

En el presente trabajo se determinó y simuló la ecuación para la creación de quarks pesados obtenidos por la aniquilación de partícula-antipartícula, exactamente electrón positrón en hadrones. El método utilizado para determinar la formulación ha sido maximizando la ecuación de Weizsacker-Williams, una aproximación de la sección eficaz para varios eventos dados por colisiones leptónicas relativistas; se aplicó la técnica de Altarelli-Parisi, que nos proporciona la función de densidad probabilística para generar un par de quarks $q - \bar{q}$, en el estado final del sistema y se simuló con la obtención del código de programación en MatLab. El programa computacional permitió diagramar la curva de densidad de probabilidad, bajo la sección eficaz de dicha producción. El presente trabajo considera variables cinemáticas y dinámicas relativistas en toda colisión de leptones a altas energía, así como los principios de conservación energía-momento evidenciando la generación de nuevas partículas elementales pesadas.

Palabras clave: quarks; Weizsacker-Williams; Altarelli-Parisi; sección eficaz.

ABSTRACT

The present work was determined and simulated the equation for the creation of heavy quarks obtained by the annihilation of particle-antiparticle, exactly electron positron in hadrons. The method used to determine the formulation has been by maximizing the Weizsacker-Williams' equation, an approximation of the cross section for various events given by relativistic leptonic collisions; The Altarelli-Parisi technique was applied, which provides us with the probability density function to generate a pair of quarks $q - \bar{q}$, in the final state of the system and it was simulated by obtaining the programming code in MatLab. The computer program made it possible to diagram the probability density curve, under the cross section of said production. The present work considers kinematic variables and relativistic dynamics in all collisions of leptons at high energy, as well as the principles of energy-moment conservation evidencing the generation of new heavy elementary particles.

Keywords: quarks; Weizsacker-Williams; Altarelli-Parisi; effective section and dispersion.

1. INTRODUCCIÓN

En estos días el modelo Estándar (ME) se encuentra en constante experimentación para la búsqueda incesante del conocimiento y comportamiento de la naturaleza en física de partículas asimismo para dar respuesta a fenómenos suscitados en la aniquilación de partícula – antipartícula. La física de partículas (denominada física de altas energías) es la disciplina científica que tiene por finalidad determinar cuáles son los constituyentes básicos o elementales de la materia y las propiedades de las fuerzas que intervienen en sus interacciones. En los últimos 30 años, el progreso del conocimiento sobre las propiedades de los constituyentes fundamentales de la materia y sus fuerzas ha dado lugar al Modelo Estándar de la física de partículas (exceptuando la gravitación, que tiene insignificante influencia en el mundo de las partículas).

El ME consiste en una teoría que describe las interacciones electrodébiles y fuertes (no incluye la interacción gravitacional). No solo describe de manera rigurosa los resultados experimentales; también ocurre que algunas

de predicciones, como la existencia de los bosones mediadores de las interacciones débiles y la relación entre sus masas, fueron ya corroboradas con buena precisión.

Uno de los fenómenos de estudio es la creación de partículas elementales nuevas y muy energéticas luego del proceso de aniquilación de leptones, obedeciendo las leyes de conservación de momento-energía en el régimen perturbativo de la QCD. En este límite la constante de acoplamiento cuántico contribuye considerablemente en el proceso de tres eventos, los hadrones y emisión de gluon, que son partículas mediadoras o intercambio en la interacción fuerte de color en los quarks. El cálculo de la probabilidad de producir un gluon con momento fraccional y un momento transversal en el proceso de $\gamma^*q \rightarrow qg$ representara nuestro modelo para sección eficaz transversal, maximización y aproximación de la ecuación de William – Weizsäcker.

El objetivo principal del presente trabajo fue determinar un modelo aproximado, en el régimen perturbativo de la QCD, para la función de densidad probabilística respecto a la sección eficaz en la creación de quarks generados por la absorción de altas energías utilizando la maximización de la ecuación de Weizsäcker y con la aproximación de la sección eficaz usando la técnica de Altarelli. La simulación de la curva característica de este fenómeno se hizo con el lenguaje de programación MatLab teniendo como variables la energía y la probabilidad de generación.

2. MODELO ESTANDAR

En la búsqueda de las componentes fundamentales de la materia y de las interacciones que surgen entre sus naturaleza ha fortalecido el desarrollo de la Física de altas energías, y con ellos ha generado modelos que predice y explican las observaciones experimentales. En especial, el modelo que ha tenido mayor importancia en el siglo XXI, es el Modelo Estándar (ME) de las partículas elementales, teoría que describe las interacciones de las fuerzas electrodébiles y fuertes (el modelo no incluye la interacción gravitacional). Sin embargo, el ME no solo describe teóricamente los resultados experimentales; sino ocurre que algunas de sus predicciones, como la existencia del bosón de Higgs Φ y mediadores de las interacciones débiles y la relaciones entre sus masas (Halzen; Martin, 1984:225-226).

2.1 Partículas Elementales

Entendemos por partículas fundamentales a los contribuyentes puntuales de la materia, es decir, aquellas que no comprenden de una subestructura, particularmente conocida por debajo del umbral o límites experimentales del orden de magnitud 10^{-18} - 10^{-19} . Las partículas se subclasifican; partículas materiales e intermedias o de interacción. Las partículas elementales del modelo, son los llamados Fermiones que presentan $spin = 1/2$ tales como los leptones y quarks. El electrón e^- , muon μ , tau τ y los neutrinos ν_e , ν_μ y ν_τ son parte de la clasificación leptónica (ver tabla 1). Los leptones con carga tienen sus antipartículas correspondientes, tal como el electrón e^- cuya antipartícula es el positron e^+ ambos son comunes por su masa pero diferenciables por su carga opuesta. En el ME existen 6 leptones cargados y para el caso de los neutrinos, cuya característica es su carga neutra surgen dos probabilidades: en principio podrían comportarse como sus antipartículas o en todo caso cada neutrino presentaría su antipartícula (estos constituyen los fermiones de Dirac). Como bien se sabe los neutrinos en el ME existe evidencia experimental que confirma la existencia de poseer masa diferente de cero, esto enriquece el fenómeno de interacción de las partículas e implica la generación de oscilaciones, ángulos de mezclas, violaciones de números cuánticos, etc. Esta información de la detección de masas en los neutrinos es una de las primeras observaciones de la física más allá del ME (Halzen; Martin, 1984:123-124).

Tabla 1. Partículas elementales fermionicas.

Leptón	Masa (MeV/c ²)	Vida media (s)	carga
Electrón	0,511	∞	-1
Neutrino electrónico	0	∞	0
Muon	105,658	$2,197 \times 10^{-6}$	-1
Neutrino muónico	0	∞	0
Tau	1777	$291,0 \pm 1,5$	-1
Neutrino muónico	0	∞	0

Hoy en día existen diversos modelos que tienden a describir el comportamiento ondulatorio de los neutrinos, por otra parte tenemos los quarks se clasifican por sus 6 sabores denominados: up (u), down (d), charm (c),

strange (s), top (t) y bottom (b); y cada una de ellas tienen sus correspondiente antipartículas. De manera experimental es imposible contar con la presencia de quarks total o aproximadamente “libres”, todas estas partículas se encuentran ligadas formando los hadrones. Los hadrones a su vez se clasifican en mesones [estados ligados de quark-antiquark, (q q̄)] y bariones [estados ligados de tres quarks, (q q' q'')], estas descripciones estructurales son productos de los resultados experimentales de la dispersión extremadamente inelástica, que demuestran las valencias de dos quarks para los mesones y de tres para los bariones. Cabe resaltar que los hadrones conforman los estados altamente complejos de interacciones entre quarks y partículas de intercambio (Fernández; Ramón, 2018).

Uno de los tipos de partículas denominadas partículas de interacción o mediadoras, bosones, tales como el fotón γ , los bosones débiles W^- ; W^+ y Z , mediadores de la interacción Electro débil (interacción electromagnética y la débil vinculadas entre sí), los gluones, partículas mediadoras de la interacción fuerte, y el bosón de Higgs Φ , que tiene como fin dotar de masa a las partículas ya mencionadas (Halzen; Martin, 1984:125-126; Quigg, 1997, 156).

2.2 Sección de colisión de eficaz

La sección eficaz σ de captación de nuevos observables (quarks) producto de la interacción e^-e^+ (aniquilación electron-positron) representa el área efectiva de una partícula, el cual es el blanco, vista de un observador externo. Suponiendo que en el blanco se tiene N_B partículas y que la superficie de colisión es A . Por tanto escribiremos la probabilidad de impacto como (Cottingham, 2007:52):

$$\text{probabilidad de colisión} = \frac{N_B \sigma}{A} \tag{1}$$

La amplitud de probabilidad para la transición de un estado inicial $|\Psi_i\rangle$ de N_i partículas libres que ingresan en el tiempo $t_i = -\infty$ al estado final $|\Psi_f\rangle$ de N_f partículas libres salientes en el tiempo $t_f = +\infty$ está dado por:

$$A_{i,f} = -2\pi i \delta^4(p_i - p_f) M_{i,f} \tag{2}$$

Donde p_i y p_f son el total de los cuadru-momentos del grupo de estados inicial y final de partículas, respectivamente, y $M_{i,f}$ son los elementos de la matriz $\langle \Psi_f | | \Psi_i \rangle$. La probabilidad de transición es proporcional a la amplitud al cuadrado.

$$P_{i \rightarrow f} = \frac{1}{V_i V_f} |A_{i,f}|^2 \tag{3}$$

Con la constante de proporcionalidad $1/V_i V_f$ definido por la normalización propia de los estados inicial y final a un volumen finito en el espacio físico de momentos de multipartículas (Quigg, 1997:89).

2.3 Técnica de Altarelli-Parisi y la fórmula de Weizsäcker-William

Es una técnica que simplifica el cálculo de la probabilidad de producir un gluon con momento fraccional $1-z$ y un momento transversal P_T en el proceso $\gamma^*q \rightarrow qg$. Donde la sección transversal eficaz queda escrita como una integral doble (ver Figura 1):

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dz dp_T^2} = (e_i^2 \hat{\sigma}_0) \gamma_{qq}(z, p_T^2) \tag{4}$$

Con:

$$\gamma_{qq}(z, p_T^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{p_T^2} P_{qq}(z) . \tag{5}$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dz dp_T^2} =$$

Figura 1: La sección transversal eficaz para $\gamma^*q \rightarrow qg$.

Esta técnica no es especial para quarks y gluones (QCD). En efecto, fue introducido por el estudio de Weizsäcker-William en 1934, que es aplicado fuertemente en leptones y fotones (QED).

3. ANIQUILACION DE ELECTRON - POSITRON

3.1. Sección transversal de colisión electron-positron e^-e^+

Fotones de alta resolución también se pueden preparar por colisión de electrones y positrones de alta energía. El poder excepcional de esta técnica experimental se ilustra por la galería de diagramas de colisión e^-e^+ se puede utilizar para estudiar la electrodinámica cuántica QED, interacciones débiles, quarks y gluones y también para estudiar o buscar quarks y leptones pesados. Por otra parte, e^-e^+ aniquilación es un proceso "limpio" en el en el sentido de que los leptones aparecen en el estado inicial (Figura 2) (Feynman, 1977:58).

La mayor parte de los hadrones producido por aniquilación e^-e^+ son fragmentos de un quark y antiquark producido por el proceso de $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$. La sección transversal para el proceso $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$. Fue obtenida:

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+) = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} \tag{6}$$

Aquí parameros de masa-energía al cuadrado:

$$s = Q^2 = 4E_b^2 \tag{7}$$

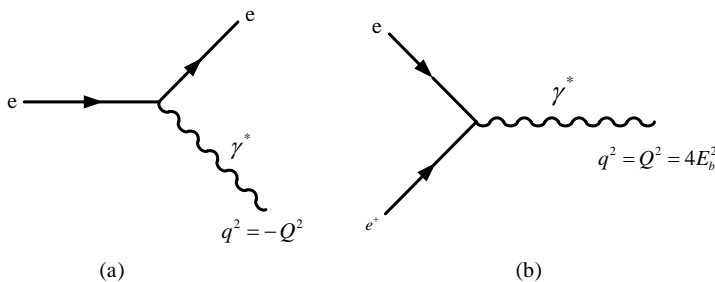


Figura 2. El siguiente diagrama representa un fotón virtual generado en (a) colisión elástica profunda y (b) diagrama de una colisión frontal de electrón y positrón cada uno con energía E_b .

3.2. Tres eventos de interacción: $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$

Desde el punto de vista de la QCD perturbativa, solo se considera la contribución principal de $O(\alpha^2)$ en la $\sigma(e^-e^+ \rightarrow \text{hadrones})$. En orden α^2 y α_s ; los quarks q \bar{q} pueden emitir un gluon (Cieza; Cortez; Tonasse; 2008).

Introduciremos las variables cinemáticas para describir dicho fenómeno (Tres-jet). Los vectores momento de q , \bar{q} y g ; el cual son producidas por un fotón virtual (γ^*) en reposo; se muestran en la Figura 3.

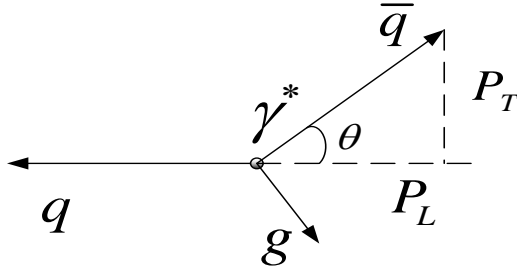


Figura 3. Proceso $e^-e^+ \rightarrow \gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$; en el sistema de referencia del centro de masa.

Tomando análogamente las relaciones de (3.10) se tiene las siguientes variables cinemáticas:

$$x_q = \frac{2E_q}{Q}, x_{\bar{q}} = \frac{2E_{\bar{q}}}{Q}, x_g = \frac{2E_g}{Q} \quad (8)$$

$$x_L = \frac{2P_L}{Q}, x_T = \frac{2P_T}{Q} \quad (9)$$

En las ecuaciones de (8) y (9) se trabaja con las energías, y con las cantidades del movimiento longitudinal y transversal, relacionándolas con la energía del haz de (e^- y e^+).

$$\begin{aligned} P_q &= (x_q; 0, 0, -x_q) \\ P_{\bar{q}} &= (x_{\bar{q}}; x_T, 0, x_L) \\ P_g &= (x_g; -x_T, 0, x_q - x_L) \end{aligned} \quad (10)$$

Las variables se definen en relación con el jet más energético. En el jet q ; su dirección, está referida en el sentido positivo del eje. Los q ; \bar{q} y g son coplanares, en el plano $y = 0$. La conservación de la energía introduce el requerimiento adicional (Cieza; Cortez; Tonasse; 2002):

$$x_q + x_{\bar{q}} + x_g = 2 \quad (11)$$

Por considerar la masa cero de $x_{\bar{q}}$ y x_g lleva a las nuevas restricciones principales:

$$x_{\bar{q}}^2 - x_T^2 - x_L^2 = 0 \quad (12)$$

$$x_g^2 - x_T^2 - (x_L - x_q)^2 = 0 \quad (13)$$

De las ecuaciones (11) y (12) se tiene que:

$$x_T^2 = \frac{4}{x_{\bar{q}}^2} \cdot (1 - x_q) \cdot (1 - x_{\bar{q}}) \cdot (1 - x_g) \quad (14)$$

Si introducimos el ángulo θ entre las direcciones de q y \bar{q} :

$$x_{\bar{q}} = \frac{2(1-x_q)}{(2-x_q-x_q \cos \theta)} \quad (15)$$

3.3. Cálculo de la sección transversal de $e^-e^+ \rightarrow \gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$

Para este fenómeno el quark \bar{q} emitirá un gluon más suave; por lo que se tendrá la siguiente condición:

$$x_q \geq x_{\bar{q}} \geq x_g \quad (16)$$

El quark \bar{q} es producido con el momento fraccional transversal x_T respecto a la dirección del quark.

La cantidad observable relevante es por tanto $\frac{d\sigma}{dx_T^2}$. Esta sección transversal se obtendrá usando **la técnica probabilística de Weizsacker-Williams**.

$$\frac{d^2\sigma}{dx_{\bar{q}}dP_T^2} = \sigma(e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}) \cdot \gamma_{\bar{q}\bar{q}}(x_{\bar{q}}; P_T^2) \quad (17)$$

La sección transversal σ da la probabilidad para la producción de un par $q\bar{q}$. Además $\gamma_{\bar{q}\bar{q}}$ es la probabilidad de que el \bar{q} posteriormente emita un gluon con la fracción $(1 - \bar{q})$ de su momento y un momento transversal $|P_T|$.

Esta técnica nos predice que $\gamma_{q\bar{q}}$ depende de las variables z y P_T^2 como se muestra lo siguiente ecuación:

$$\gamma_{q\bar{q}}(z, P_T^2) = \frac{2\alpha_s}{2\pi} \cdot \frac{1}{P_T^2} \cdot P_{q\bar{q}}(z) \quad (18)$$

Definamos las variables para la creación de quarks $q\bar{q}$, ya que el diagrama probable para la aniquilación de e^-e^+ , el antiquark genera un gluon suave, por tanto describamos el movimiento referente al momento de \bar{q} y para sección transversal con el momento transversal:

$$\begin{aligned} z &\rightarrow x_{\bar{q}} \\ P_T^2 &\rightarrow x_T^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Por tanto relacionando las ecuaciones (16), (17) y (18) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx_{\bar{q}}dP_T^2} &= \sigma(e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}) \cdot \gamma_{\bar{q}\bar{q}}(x_{\bar{q}}; x_T^2) \\ \frac{d^2\sigma}{dx_{\bar{q}}dP_T^2} &= \gamma_{\bar{q}\bar{q}}(x_{\bar{q}}; x_T^2) \\ \frac{d^2\sigma}{dx_{\bar{q}}dP_T^2} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_T^2} \cdot P_{\bar{q}\bar{q}}(x_{\bar{q}}) \end{aligned} \quad (20)$$

Asumiendo la aproximación para $P_{\bar{q}\bar{q}}$:

$$P_{\bar{q}\bar{q}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{(1+x_{\bar{q}}^2)}{(1-x_{\bar{q}})} \quad (21)$$

Comparando las ecuaciones (20) y (21)

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d^2\sigma}{dx_{\bar{q}}dP_T^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha_s}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_T^2} \cdot \frac{(1+x_{\bar{q}}^2)}{(1-x_{\bar{q}})} \quad (22)$$

Para la simulación y calcular de la sección eficaz debemos despejar de (22), integrando todas las posibles energías de \bar{q} de fracciones $x_{\bar{q}}$. Integramos la ecuación diferencial respecto a la variable $x_{\bar{q}}$:

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dx_T^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha_s}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_T^2} \cdot \int_{(x_{\bar{q}})min}^{(x_{\bar{q}})max} \frac{(1+x_{\bar{q}}^2)}{(1-x_{\bar{q}})} dx_{\bar{q}} \quad (23)$$

Para un diagrama de creación de quarks q y \bar{q} son igualmente probables $q \leftrightarrow \bar{q}$, por tanto se adiciona el factor 2.

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dx_T^2} = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha_s}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_T^2} \cdot \int_{(x_{\bar{q}})min}^{(x_{\bar{q}})max} \frac{(1+x_{\bar{q}}^2)}{(1-x_{\bar{q}})} dx_{\bar{q}} \quad (24)$$

Analizando la ecuación integro-diferencial, la función diverge cuando $x_{\bar{q}} \rightarrow 1$, a la vez $x_{\bar{q}}$ toma su máximo valor según la ecuación (24) $x_{\bar{q}} \rightarrow x_q$. Por tanto toma su máximo valor permitido:

$$(x_{\bar{q}}) max = x_q \quad (25)$$

Con esta aproximación se aprovechara que el gluon sea emitido suavemente, ver Figura. 4, por tanto:

$$x_g = x_T \quad (25)$$

De la relación de las ecuaciones (11) y (25) se tiene:

$$(x_{\bar{q}}) min \approx (x_{\bar{q}}) max \approx (1 - \frac{x_T}{2}) \quad (26)$$

$$(x_{\bar{q}}) min \rightarrow 0 \quad (27)$$

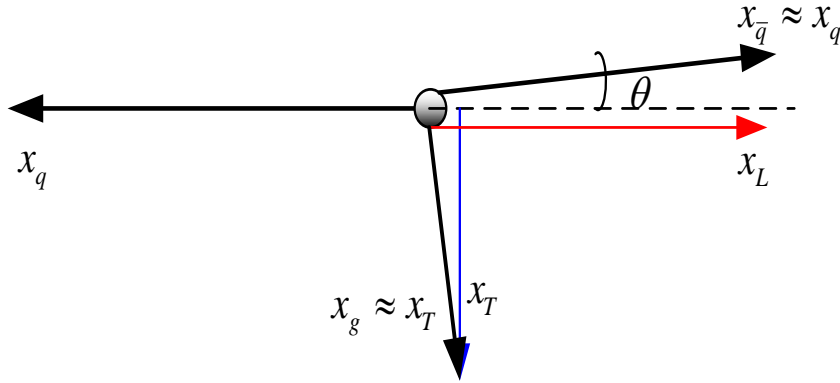


Figura 4. Esquema de las variables dinámicas aproximadas, para la creación de los quarks, aplicando el método de Weizsacker.

Mediante los límites de integración podemos escribir la ecuación integro-diferencial.

$$\frac{1}{q} \cdot \frac{d\sigma}{dx_T^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha_s}{\pi} \cdot \frac{1}{x_T^2} \cdot \int_0^{(1+\frac{x_T}{2})} \frac{2}{(1-x_q)} \cdot dx_q \tag{28}$$

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dx_T^2} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{1}{x_T^2} \left(1.4 + \ln\left(\frac{1-x_q}{x_T^2}\right) \right) \tag{29}$$

Finalmente la ecuación diferencial (29) es la expresión aproximada de la técnica William – Weizsäcker para la densidad de probabilidad en la predicción de producción de quark altamente energéticos.

3.4. Producción de quark pesados

Hay similitud entre aniquilación e^+e^- y la leptoproducción, en la leptoproducción, u, d y s quarks tienen el papel dominante ya que son abundantes en el interior del nucleón. Los quarks encanto ocurren en aproximadamente uno cada diez eventos. La sección transversal se eleva abruptamente y fácilmente alcanza una fracción considerable de su valor asintótico. (Halzen, F.; Martin, A. 1984)

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La solución de la ecuación (29) utilizando aproximaciones matemáticas mediante uso de sección eficaz usando la técnica de alterelli-parisi

$$\sigma(x_T^2) = 2,718^{-0,5} \left[\ln^2\left(\frac{1}{x_T^2}\right) \right] \tag{30}$$

Donde:

σ : Sección transversal de colisión eficaz

X_T : parámetro observable de la colisión

Utilizando el Matlab R2020 para simular la curva de producción en una determinada sección eficaz σ variando el parámetro x_T^2 .

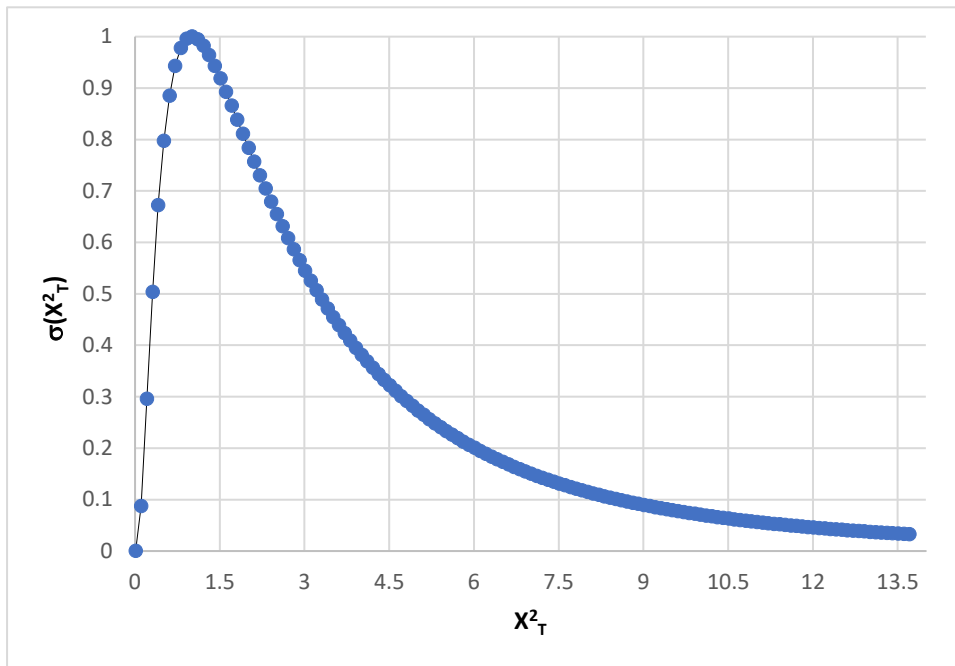


Figura 5. Densidad de probabilidades de creación de Quarks pesados bajo la maximización Weizsacker.

5. CONCLUSIONES:

La función característica que representa la probabilidad de creación de nuevos observables X_T , luego de la interacción e^-e^+ , tiene una tendencia asintótica positiva hacia las probabilidades cercanas a 0 de encontrar algún observable x_T (quark pesado) durante todo el proceso de producción de nuevas partículas elementales.

La probabilidad de producción de quarks altamente energéticos es mínima, tal como muestra la curva, la energía umbral en el proceso de creación, no evidencia una producción significativa de quark y/o observables.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Halzen, F.; Martin, A. 1984. Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics. Edited John Wiley & Sons, Inc. New York. 394 pp.
- Quigg, C. 1997. Gauge Theories of the Strong, Weak, And Electromagnetic Interactions. Edited Westview Press. 278 pp.
- Feynman, F. 1977. In Weak and Electromagnetic Interactions at High Energy. Edited by R. Balian and C. H. Llewellyn Smith, North-Holland. Amsterdam. 279 pp.
- Cottingham, W. 2007. An Introduction to the Standard Model of Particle Physics: Weak Interactions-low energy phenomenology. 2da Edición. Editorial Cambridge University Press. New York. 93 pp.
- Fernández, R.; Ramón, M. 2018. Partículas elementales. Edición Pirámide. España. 304 pp.
- Cieza, J. E.; Cortez, N.; Tonasse, M.D. 2008. Probing doubly Higgs bosons in e^+e^- colliders at the ILC and the CLIC in a 3-3-1 model. Phys. Rev. D 78: 116003.
- Cieza, J. E.; Cortez, N.; Tonasse, M.D. 2002. Pairs of charged leptones heavy from an $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ model at CERN LHC. Nuclear Physics B 623: 325-341.