

Síntesis mediante algoritmos genéticos de mecanismos articulados de seis barras rígidas para prótesis de rodilla

Synthesis by means of genetic algorithms of articulated mechanisms of six rigid bars for knee prostheses

Edward Javier León Lescano; Nelson Ayala Dionicio; Emerson Asto Rodriguez; Eddy Urbano Ramos
Edward Javier León Lescano *

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n – Ciudad Universitaria, Trujillo, Perú.

* Autor correspondiente: eleon@unitru.edu.pe (E. León)

DOI: [10.17268/rev.cyt.2021.04.06](https://doi.org/10.17268/rev.cyt.2021.04.06)

RESUMEN

Usando el método de algoritmos genéticos se desarrolla el proceso de síntesis de un mecanismo plano de seis barras tipo Watt I y se aplica al diseño de una prótesis policéntrica de rodilla para garantizar la estabilidad en la fase de extensión y flexión total de la rodilla durante el ciclo de marcha de una persona. Se seleccionaron seis puntos de precisión de la trayectoria del centro instantáneo de rotación del eslabón acoplador, con una población de mil individuos formados con las longitudes de eslabones y ángulos de movimiento del mecanismo. La función de aptitud se obtuvo con la ecuación de Freudenstein aplicada a dos mecanismos de cuatro barras que conforman la prótesis y las restricciones de diseño fueron: dimensiones mínimas y máximas de las barras, criterio de Grashof, relaciones angulares para elementos ternarios, ángulo de transmisión y juntas instantáneas inactivas.

Palabras clave: Algoritmos genéticos; mecanismo Watt I; prótesis de rodilla.

ABSTRACT

Using the method of genetic algorithms, the synthesis process of a Watt I type six-bar flat mechanism is developed and applied to the design of a polycentric knee prosthesis to guarantee stability in the extension and total flexion phase of the knee during the knee gait cycle of a person. Six precision points of the trajectory of the instantaneous center of rotation of the coupling link were selected, with a population of one thousand individuals formed with the lengths of links and angles of movement of the mechanism. The fitness function was obtained with the Freudenstein equation applied to two four-bar mechanisms that make up the prosthesis and the design restrictions were: minimum and maximum bar dimensions, Grashof criterion, angular relationships for ternary elements, transmission angle and instantaneous inactive joints.

Keywords: Genetic algorithms; Watt I mechanism; knee replacement.

1. INTRODUCCIÓN

La síntesis de mecanismos y sus aplicaciones responden a ciertos requisitos específicos: ubicación de pivotes fijos, longitudes adecuadas de los eslabones, guiado de cuerpos por posiciones definidas, limitaciones de espacio de trabajo, etc. Esto hace que no sea posible tener una metodología de diseño general. La mayoría de métodos de síntesis, son de elevada complejidad numérica y necesitan el aporte del cálculo computacional, más aún si el número de elementos del mecanismo articulado es de seis barras o más (Lugo González, 2012).

La rodilla de una persona es la articulación más grande en la que se unen 3 huesos: el fémur, la tibia y la rótula es de suma importancia para la marcha y la carrera, soporta todo el peso del cuerpo en el despegue y la recepción de saltos. Su mecánica articular resulta muy compleja, ha de poseer una gran estabilidad para soportar el peso corporal sobre un área relativamente pequeña; al mismo tiempo debe estar dotada de la movilidad necesaria para la marcha y la carrera y para orientar al pie en relación con las irregularidades del terreno (Góngora García et al., 2003).

Radcliffe (1994) determinó el uso de los centros instantáneos de velocidad de los eslabones como criterio de diseño para un mecanismo de cuatro barras usado como prótesis de rodilla, en el que las líneas de carga de la fuerza de apoyo del pie deben pasar por el centro instantáneo de velocidad de los eslabones fijo y acoplador del mecanismo a sintetizar

Jin et al., (2003) demostró que dado a que existen más juntas inactivas instantáneas en un mecanismo de seis barras que en uno de cuatro barras, un mecanismo de seis barras es más capaz de mantener la estabilidad en fase de reposo bajo interferencia, además la trayectoria de la articulación del tobillo y el movimiento de la pierna puede estar más próximos a lo esperado en una articulación de cuatro barras.

Pucheta & Cardona, (2003) emplearon algoritmos genéticos como método de búsqueda de un mecanismo óptimo, dividiendo cada configuración en lazos, definiendo tipo de cuerpos y uniones, evaluando criterios y restricciones preestablecidas, tales como, máxima y mínima longitud de barras, ángulos de transmisión de esfuerzos y espacio permitido.

En esta investigación se propone aplicar el método de algoritmos genéticos para obtener la longitud de los eslabones de un mecanismo de seis barras para una prótesis de rodilla, que permita garantizar la estabilidad durante el ciclo de marcha de una persona.

La síntesis comprende la determinación de las dimensiones de los eslabones del mecanismo que hacen que se cumplan las condiciones pre establecidas, como el rango de los valores que pueden encontrarse, la dimensión de los eslabones, los ángulos de entrada θ_2 y el cumplimiento de las condiciones de Grashof, así como el cálculo del ángulo correspondiente al movimiento de la biela y el ángulo que genera el movimiento de salida.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1 Objeto de estudio

Mecanismo articulado de seis barras Watt I para prótesis de rodilla.

- Las líneas que unen las articulaciones del mecanismo se consideran como barras rígidas.
- La síntesis consiste en determinar la longitud de las líneas (barras rígidas).
- El análisis realizado es para conseguir una trayectoria deseada.

2.2 Mecanismo de seis barras para prótesis de rodilla

2.2.1 Criterios de estabilidad de prótesis de rodilla

El movimiento que realiza la rodilla humana como se muestra en la figura 1, son: rotación de 0° a 10° , oscilación de 10° a 20° y deslizamiento de 20° a 120° . También es posible observar que a partir de este análisis biomecánico el CIR cambia su posición con base en la posición de la rodilla (Lugo González, 2012). La correcta ubicación del CIR permite que el paciente tenga un control completo de la prótesis, permitiendo un ciclo de marcha más natural (Radcliffe, 1977).

2.2.2 Centro instantáneo de rotación (CIR) en una prótesis policéntrica

Radcliffe, (1977) señala que el CIR, en una prótesis policéntrica, es un punto donde por muy pequeños cambios en el ángulo de flexión de la rodilla, la sección del muslo rota sobre un punto en extensión con la pantorrilla, la cual aparece temporalmente fija. Para pequeños ángulos, la rotación relativa de los CIR podría imaginarse como una bisagra que une una sección del muslo con la pantorrilla, para grandes ángulos, los CIR cambiarían de ubicación y será necesario imaginar una nueva posición.

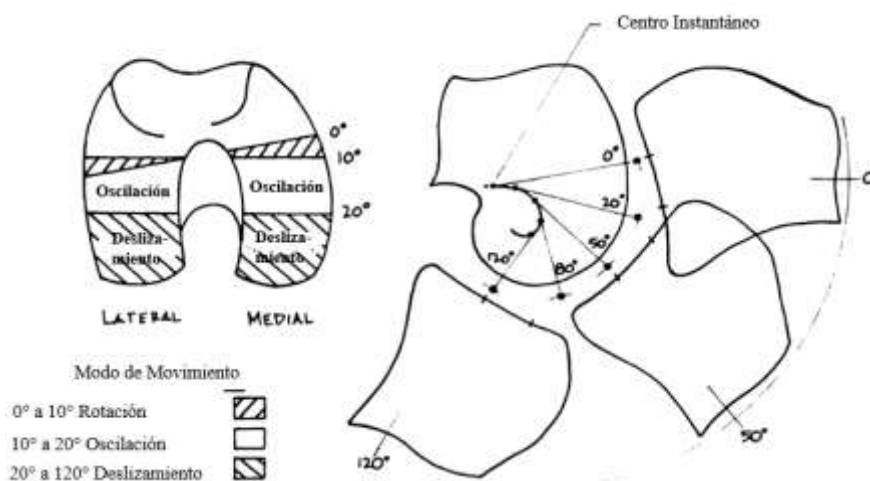


Figura 1. Descripción del movimiento de la rodilla (Gunston, 1973).

Para determinar la estabilidad y el grado de movilidad se considera que el mecanismo de rodilla policéntrica es un dispositivo en el que el CIR cambia de posición conforme el ángulo de flexión de la rodilla incrementa o decrecienta. Cinemáticamente, todos los dispositivos policéntricos tienen la estabilidad controlada por la localización del CIR.

2.2.3 Juntas instantáneas inactivas (JII) y diseño de estabilidad de mecanismo para prótesis de rodilla

Si dos eslabones conectados por una junta de rotación tienen la misma velocidad angular en el mismo instante y posición (sin movimiento relativo entre ellos), a la junta se le conoce como Junta Instantánea Inactiva (JII). Cuantas más JII existan, más estable será el mecanismo. En la cadena cinemática de cuatro barras, solo puede existir una JII. Sin embargo, dependiendo del diseño, una cadena cinemática de seis barras puede tener hasta cuatro JII (Choudhary et al., 2014). Así pues, debido a que pueden existir más Juntas Instantáneas Inactivas en mecanismos de seis barras, la estabilidad en la fase de reposo puede garantizarse incluso bajo algunas perturbaciones (Afshari et al., 2012). Por ejemplo, cuando los eslabones 2 y 3 de la cadena cinemática de seis barras mostrada en la figura 2 son colineales, el sistema articulado conformado por las barras 1, 2, 3 y 4, forman un triángulo, donde el lado $1(P_{12}P_{14})$ es tierra, siendo este triángulo estable las juntas P_{14} , P_{16} , P_{45} y P_{56} del sistema formado por las barras 1, 4, 5 y 6 son juntas instantáneas inactivas (JII). Por lo tanto, cuando el eslabón 1 es fijo, el mecanismo será estable a pesar de cualquier alteración aplicada en los eslabones 4, 5 o 6 (Jin et al., 2003).

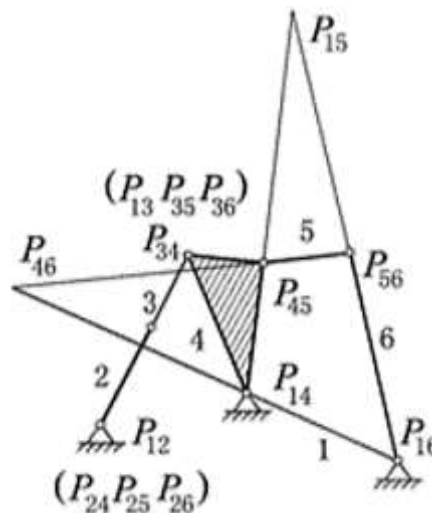


Figura 2. Junta instantánea inactiva de mecanismo de seis barras. Donde P indica el centro de velocidad instantáneo y los subíndices representan el número de barras (Jin et al., 2003).

2.3 Métodos y técnicas

La investigación es aplicada, y se desarrolló según el procedimiento siguiente:

- Determinar las posiciones prescritas por las cuales los centros instantáneos de rotación (CIR) del acoplador deberá pasar, tal que garanticen la estabilidad de la prótesis.
- Establecer la forma del mecanismo de seis barras Watt I que imita el movimiento de flexión y extensión de la rodilla humana durante el ciclo de marcha de una persona.
- Formular las ecuaciones de Freudenstein para la síntesis de mecanismos articulados de cuatro barras y las condiciones de diseño para obtener la función de optimización.
- Realizar la optimización por algoritmos genéticos de la síntesis del mecanismo para prótesis de rodilla humana, elaborando el código de programación.
- Comparar los parámetros de salida, con los parámetros deseados (posiciones de trayectoria deseada).
- Realizar una simulación del movimiento del mecanismo obtenido.

2.4 Diseño óptimo en la síntesis de mecanismos

El objetivo fue minimizar el error entre la trayectoria deseada y la trayectoria generada por el mecanismo sintetizado, modificando parámetros del algoritmo genético (AG) como la probabilidad de mutación y de cruce,

el número de individuos y el máximo número de generaciones, tal como se muestran en el anexo B. Adicionalmente se puede agregar una penalización para recuperar los individuos que no cumplan con las restricciones iniciales, como son las condiciones de Grashof, longitudes máximas y mínimas, error máximo, etc. En base a la función objetivo de la ecuación B.6 se puede analizar el error de cada individuo en cada posición.

$$F = \frac{1}{N} \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left[(c_{xd}^i(v) - c_{xg}^i(v))^2 + (c_{yd}^i(v) - c_{yg}^i(v))^2 \right]}{n_i}} \quad (1)$$

Donde:

- F: Error encontrado para cada individuo
- C_{xd}, C_{yd} : Coordenadas de los puntos deseados
- C_{xg}, C_{yg} : Coordenadas de los puntos generados
- N: Número de puntos de precisión
- v: individuo = $r_1, r_2, r_3, r_4, r_{cx}, r_{cy}, \theta_1, x_0, y_0, \theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_2^N$ (°)
- n_i : Número de individuos

3. RESULTADO Y DISCUSION

3.1 Determinación de los puntos de precisión prescritos

Se tomó como referencia la trayectoria del CIR (poloide) de una prótesis policéntrica para rodilla (ver figura 3) del artículo de Radcliffe, (1977). De la poloide de referencia se consideró seis puntos de precisión los cuales se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Puntos de precisión del mecanismo para prótesis de rodilla

Punto Precisión	x_d^i [mm]	y_d^i [mm]
P_d^1	73,04	385,53
P_d^2	146,74	291,91
P_d^3	190,56	174,39
P_d^4	194,54	78,78
P_d^5	186,58	-36,75
P_d^6	96,94	-172,2

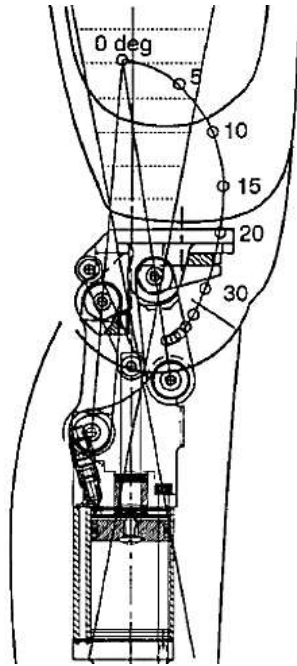


Figura 3. Mecanismo de control voluntario (Radcliffe, 1977).

3.2 Mecanismo de seis barras Watt I para prótesis de rodilla

En la Figura 4, se aprecia el esquema vectorial equivalente que se utilizó para la aplicación de las ecuaciones de Freudenstein al mecanismo formado por r_1, r_2, r_3, r_4 y mecanismo formado por r_5, r_6, r_7 y r_8

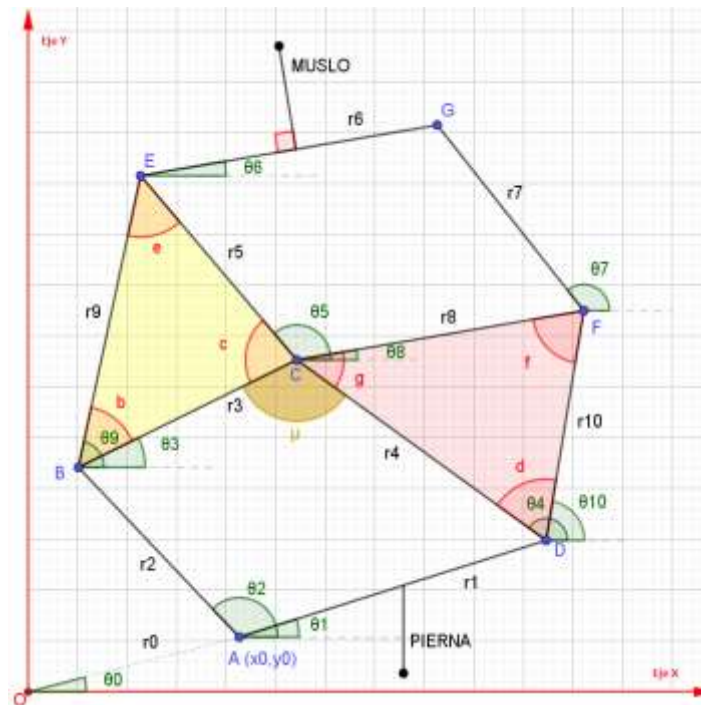


Figura 4. Esquema vectorial del mecanismo para prótesis de rodilla (Ayala Dionicio, 2018)

3.3 Aplicación de las ecuaciones de Freudenstein para el arreglo del mecanismo de seis barras para prótesis de rodilla humana

3.3.1 Análisis del mecanismo de 4 barras inferior ABCD

Del mecanismo de cuatro barras inferior ABCD de la figura 4, se tiene:

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_4$$

Y usando las ecuaciones de Freudenstein (Anexo A):

$$\theta_{4,1,2} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right)$$

$$\theta_{3,1,2} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D} \right)$$

3.3.2 Análisis del mecanismo de 4 barras inferior CEEG

Del mecanismo de cuatro barras CEEG de la figura 4, se tiene:

$$\vec{r}_5 + \vec{r}_6 = \vec{r}_8 + \vec{r}_7$$

Y usando las ecuaciones de Freudenstein (Anexo A):

$$\theta_{7,1,2} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-BB \pm \sqrt{BB^2 - 4AACC}}{2AA} \right)$$

$$\theta_{6,1,2} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-EE \pm \sqrt{EE^2 - 4DDFF}}{2DD} \right)$$

3.4 Población inicial

Para la creación de la población inicial se identificó las variables de salida, siendo mostradas en la tabla 2. Se establecieron las restricciones de límites máximos y mínimos permisibles que pueden tener los ligamentos cruzados, además de lo propuesto por (Jin et al., 2003), respecto a la construcción de prótesis para miembro inferior (Lugo González, 2012).

A partir de las restricciones, se procedió a codificar los genes mediante la ecuación B.1 (Anexo B). Esto determinó el número de bits necesarios, teniendo en cuenta un número de precisión de decimales de p=6. La tabla 2, muestra el resumen de lo que se obtuvo.

Con la ecuación B.2 se calculó el número de bits totales que tendrá cada uno de los individuos (longitud de cromosoma), siendo este $longcr = 358$ bits. El número de individuos fue de 1000. Una vez generado la población se decodificó cada cromosoma de binario a decimal, usando la ecuación B.3

3.5 Restricciones de diseño del mecanismo de prótesis de rodilla

3.5.1 Criterio de Grashof

Para asegurar el movimiento continuo se incluyó el criterio de Grashof como restricciones del diseño. Esta restricción se expresa en las ecuaciones (2) y (3). En la configuración establecida, se desea que r_2 gire libremente, a velocidad angular constante de θ_2 .

$$r_2 < r_3 < r_4 < r_1 \tag{2}$$

$$r_1 + r_2 < r_3 + r_4 \tag{3}$$

Tabla 2. Variables del mecanismo para prótesis de rodilla

Variable	Definición	Und. Medi.	Limite Min	Limite Max.	Nro Bits
r_1	Eslabón 1	mm	0	60	25
r_2	Eslabón 2	mm	0	60	25
r_3	1er lado eslabón 3	mm	0	60	25
r_4	1er lado eslabón 4	mm	0	60	25
r_5	2do lado eslabón 3	mm	0	60	25
r_6	Eslabón 6	mm	0	60	25
r_7	Eslabón 5	mm	0	60	25
r_8	2do lado eslabón 4	mm	0	60	25
r_9	3er lado eslabón 3	mm	0	60	25
r_{10}	3er lado eslabón 4	mm	0	60	25
x_0	Coord. X de A	mm	-50	50	26
y_0	Coord. Y de A	mm	-50	50	26
θ_1	Ang. Eslabón 1	rad.	0	360°	28
θ_2^i	Ang. Eslabón 2 para cada $i=1,2,3,4,5,6$	rad.	0	360°	28

3.5.2 Estructuras triangulares

Se agregó una restricción para asegurar que la suma de los ángulos internos de las estructuras triangulares marcadas en la figura 4, con las letras BCE y CDF, sea π radianes. Esta restricción se expresa con las ecuaciones (4) y (5), donde los ángulos interiores de la estructura triangular se obtuvieron haciendo uso de la ley de cosenos. Se obtienen dos restricciones de desigualdad cada una, con el propósito de no ser estrictos y permitir aproximaciones decimales (Pantoja-García et al., 2017).

Teniendo $tol = 10^{-4}$ como el valor de tolerancia de la restricción de igualdad:

$$\pi - tol < b + c + e < \pi + tol \quad (4)$$

$$\pi - tol < d + f + g < \pi + tol \quad (5)$$

Donde:

$$b = \cos^{-1} \left(\frac{r_3^2 + r_9^2 - r_5^2}{2r_3r_9} \right)$$

$$c = \cos^{-1} \left(\frac{r_3^2 + r_5^2 - r_9^2}{2r_3r_5} \right)$$

$$e = \cos^{-1} \left(\frac{r_5^2 + r_9^2 - r_3^2}{2r_5r_9} \right)$$

$$d = \cos^{-1} \left(\frac{r_4^2 + r_{10}^2 - r_8^2}{2r_4r_{10}} \right)$$

$$f = \cos^{-1} \left(\frac{r_8^2 + r_{10}^2 - r_4^2}{2r_8r_{10}} \right)$$

$$g = \cos^{-1} \left(\frac{r_4^2 + r_8^2 - r_{10}^2}{2r_4r_8} \right)$$

3.5.3 Transmisión de movimiento

El ángulo de transmisión, es una medida que indica la efectividad con la cual, el movimiento del eslabón de entrada del mecanismo, se transmite hacia el eslabón de salida. En el mecanismo de cuatro eslabones ABCD, el ángulo de transmisión μ es el ángulo formado entre el eslabón acoplador 3 y el eslabón balancín 4, como se observa en la figura 4. Este ángulo se recomienda que se encuentre en el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]rad$ (Pantoja-García et al., 2017).

$$\mu = \cos^{-1} \left(\frac{r_3^2 + r_4^2 - (r_1 - r_2)^2}{2r_3 r_4} \right) \quad (6)$$

3.5.4 Movimiento cinemático válido

La restricción de movimiento cinemático válido involucra que los n desplazamientos angulares de la manivela θ_2 de la figura 4, los cuales producen las n posiciones del mecanismo para cubrir la trayectoria deseada, presenten un movimiento cinemático real o válido, es decir, que el radicando de las expresiones (A.7) y (A.14) resulten en un valor positivo.

$$B^2 - 4AC \geq 0 \quad (7)$$

$$E^2 - 4DF \geq 0 \quad (8)$$

3.5.5 Condición de extensión total y máxima flexión de la rodilla durante el ciclo de marcha

De la figura 4, se observa que el ángulo θ_6 es el que define el grado de flexión que tendrá la rodilla durante el ciclo de marcha, es decir, representa la inclinación que tendrá el muslo respecto a la pierna que tiene la dirección del eje Y, del sistema de coordenadas establecido. Además, como ya se especificó, el ángulo θ_2 es el que gobierna las posiciones por las que el elemento acoplador del mecanismo debe pasar. Los valores de referencia para el movimiento se tomaron de Nordin & Frankel, (2004).

La extensión total de la rodilla es la que corresponde a la primera posición del mecanismo, es decir al primer punto de precisión (Tabla 1)

$$\theta_2 = \theta_2^1 \Rightarrow \theta_6 = \theta_6^1 = 0^\circ \quad (9)$$

La flexión máxima de la rodilla es la que corresponde a la sexta posición del mecanismo, es decir al sexto punto de precisión (Tabla 1). Entonces:

$$\theta_2 = \theta_2^6 \Rightarrow \theta_6 = \theta_6^6 = 65^\circ \quad (10)$$

Las restricciones (9) y (10) deben aceptar tolerancias, por lo que se transformaron en las inecuaciones (11) y (12), donde $tol = 10^{-4}$.

$$0^\circ - tol < \theta_6^1 < 0^\circ + tol \quad (11)$$

$$65^\circ - tol < \theta_6^6 < 65^\circ + tol \quad (12)$$

3.5.6 Juntas instantáneas inactivas (JII) para estabilidad en la fase de apoyo durante el ciclo de marcha

Debido a que las JII garantizan la estabilidad durante la fase de apoyo en el ciclo de marcha, interesa que las juntas E y G de la figura 4 (las cuales definen el muslo) se conviertan en JII cuando el mecanismo se encuentre en la posición de extensión total de la rodilla, y también, en la posición de flexión máxima de la rodilla con el fin de “detener” el movimiento de flexión en esa posición y comenzar un nuevo ciclo hacia la posición de extensión total. Por tanto, tomando como referencia la figura 2 y los parámetros en la figura 4, para la extensión total de la rodilla (fase de apoyo) se tiene la restricción 13

$$\theta_2 = \theta_2^1 \Rightarrow \theta_9 = \theta_9^1 = \theta_2^1 \quad (13)$$

Y para la flexión máxima de la rodilla se tiene la restricción 14

$$\theta_2 = \theta_2^6 \Rightarrow \theta_9 = \theta_9^6 = \theta_2^6 \quad (14)$$

Geoméricamente, las restricciones (13) y (14) se refieren a que en ambas posiciones r_2 y r_9 serán colineales.

3.6 Análisis complejo del mecanismo para prótesis de rodilla

Se realiza el análisis complejo para cada eslabón del mecanismo, y se repite el procedimiento con cada punto de precisión necesario para cubrir la trayectoria especificada, es decir, repetir el siguiente procedimiento, para cada posición prescrita tomando como base el ángulo θ_2 :

1. El cálculo de los ángulos $\theta_3, \theta_4, \theta_6, \text{ y } \theta_7$ para los mecanismos de cuatro barras inferior ABCD y superior CEFG de la figura 4, como se muestra en la sección 3.3.
2. La posición de cada eslabón, con ayuda de la Figura 4:

$$R_0 = r_0 e^{i\theta_0} = (x_0, y_0)$$

$$R_1 = R_0 + r_1 e^{i\theta_1}$$

$$R_2 = R_0 + r_2 e^{i\theta_2}$$

$$R_3 = R_2 + r_3 e^{i\theta_3}$$

$$R_4 = R_1 + r_4 e^{i\theta_4}$$

$$R_5 = R_3 + r_5 e^{i\theta_5}$$

$$\text{Con: } \theta_5 = \text{angle}(R_5 - R_3) = \text{angle}(r_5 e^{i(\theta_3+b)} - r_3 e^{i\theta_3})$$

$$R_6 = R_5 + r_6 e^{i\theta_6}$$

$$R_7 = R_8 + r_7 e^{i\theta_7}$$

$$R_8 = R_4 + r_8 e^{i\theta_8}$$

$$\text{Con } \theta_8 = \text{angle}(R_{10} - R_4) = \text{angle}(r_{10} e^{i(\theta_4-d)} - r_4 e^{i\theta_4})$$

$$R_9 = R_2 + r_9 e^{i\theta_9}$$

$$\text{Con: } \theta_9 = \theta_3 + b$$

$$R_{10} = R_1 + r_{10} e^{i\theta_{10}}$$

$$\text{Con: } \theta_{10} = \theta_4 - d$$

3.7 Evaluación con la función objetivo

Dado que la trayectoria deseada (Figura 3), es para prótesis policéntricas de mecanismos de 4 barras, se limita el análisis a la localización del CIR del mecanismo de 4 barras inferior del mecanismo de 6 barras (Figura 5). La performance de la simulación del movimiento de la prótesis obtenida, determina la validez de esta consideración.

Así pues, de la figura 5, y considerando los ángulos de la figura 4, se identificó el punto P_i (CIR) por las siguientes expresiones algebraicas (Sancisi et al., 2009):

$$P_i = (x_{cir}^i, y_{cir}^i), i = 1,2,3,5,6 \tag{15}$$

Donde:

$$x_{cir} = x_0 + \frac{\tan \theta_4 \cos \theta_1 - \sin \theta_1}{\tan \theta_4 - \tan \theta_2} r_1 \tag{16}$$

$$y_{cir} = y_0 + \frac{\tan \theta_2 (\tan \theta_4 \cos \theta_1 - \sin \theta_1)}{\tan \theta_4 - \tan \theta_2} r_1 \tag{17}$$

Por lo tanto, el cálculo de la función objetivo se desarrolló para los 6 puntos de precisión, resultando las siguientes funciones:

$$F_i = (x_d^i - \text{real}(P_i))^2 + (y_d^i - \text{imag}(P_i))^2, \text{ para } i=1,2,3,4,5 \text{ y } 6 \tag{18}$$

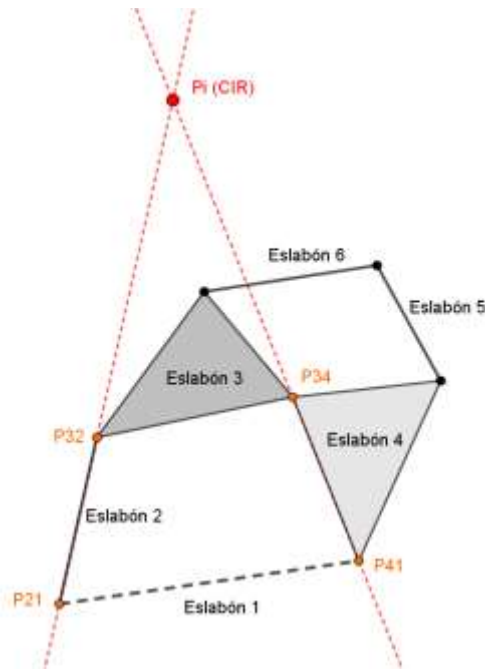


Figura 5. Ubicación del CIR del mecanismo de 4 barras inferior considerado para el diseño.

En donde los puntos P_i , para $i=1,2, 3,4, 5, 6$ representan las posiciones del CIR, los cuales tendrán como objetivo los puntos deseados (x_d^i, y_d^i) , de la poloide (Tabla 1), la función objetivo es:

$$F_{op} = \frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6}{n_i}} \tag{19}$$

La función de evaluación (*evalfit*), crece de forma normalizada mientras el error de distancia se reduce:

$$evalfit = \frac{1}{F_{op}} \tag{20}$$

3.8 Condiciones de convergencia

Las condiciones de convergencia y los otros parámetros utilizados para la configuración del AG se sintetizan en la Tabla 3. Por otra parte, los resultados de la ejecución del AG, se muestran en la Tabla 4, siendo los puntos de precisión logrados por el mecanismo sintetizado mostrados en la Tabla 5.

Tabla 3. Parámetros utilizados en el algoritmo genético para la síntesis del mecanismo de seis barras para prótesis de rodilla humana.

Restricción	Definición	Valor
$n_{i_{max}}$	Número de individuos	1000
p	Precisión de decimales de números	6
maximogen	Número máximo de generaciones	1000
rege	Regeneración	0,5
Prbc	Probabilidad de cruce	0,85
Prbm	Probabilidad de error	0,85
minimoerror	Mínimo valor de error	0,001

Tabla 4. Resultados de síntesis del mecanismo para prótesis de rodilla mediante algoritmos genéticos.

Variable	Dimensión	Unid. Med.
r_1	26,0165	mm
r_2	13,2542	mm
r_3	17,062	mm
r_4	23,0065	mm
r_5	12,162	mm
r_6	20,0452	mm
r_7	11,625	mm
r_8	11,367	mm
r_9	18,021	mm
r_{10}	15,506	mm
x_0	-13,6797	mm
y_0	-13,6797	rad
θ_1	0,1573	rad
$\theta_2^{mejorindividuo}$	1,0475	rad
Error	0,51582	---
Tiempo de solución	560,3051	s

Tabla 5. Puntos generados por el mecanismo de prótesis de rodilla obtenido por algoritmos genéticos.

Pto. Precisión	x_{CIR}^1 [mm]	y_{CIR}^1 [mm]
P_1	72,033	385,125
P_2	147,24	290,017
P_3	189,294	174,315
P_4	195,705	79,13
P_5	185,026	-35,41
P_6	97,301	-173,209

3.9 Construcción del mecanismo para prótesis de rodilla humana

Se puede apreciar en la Figura 6a, la comparación entre la trayectoria deseada (rojo) y la trayectoria generada (representada en varios colores), por el mecanismo sintetizado. El error final entre dichas trayectorias fue de 0,51582, y se observa que se mantiene la forma característica deseada de la poloide (Radcliffe, 1977) para una prótesis de rodilla. Para visualizar el comportamiento del mecanismo, se simuló en SolidWorks las conexiones que esta tendría con el muslo y la pierna. El resultado se muestra en la figura 7, donde es posible ver, la trayectoria descrita durante el ciclo de marcha.

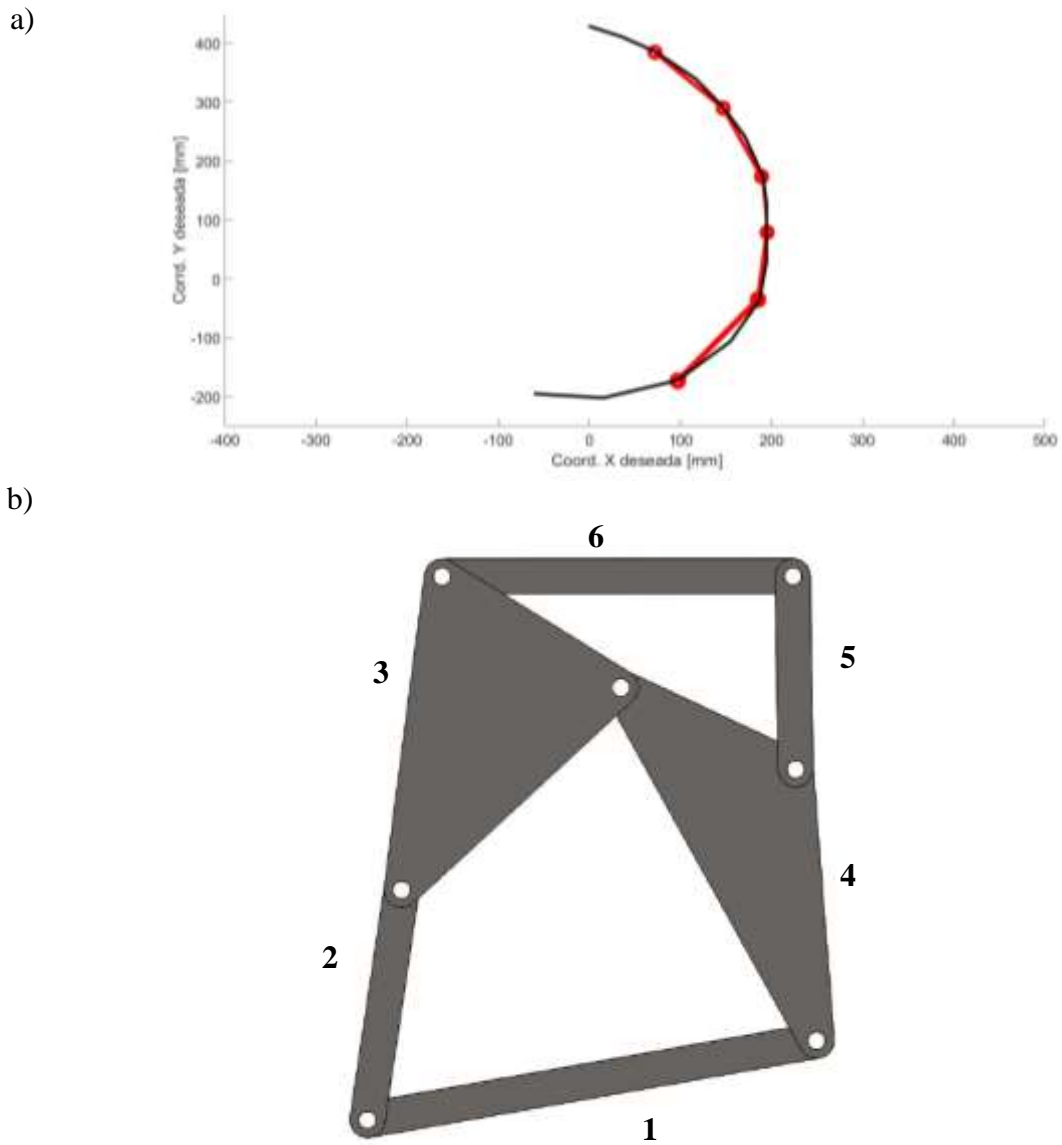


Figura 6. a) Puntos generados (curva poloide). b) Mecanismo de prótesis para generar curva poloide de la CIR en 1) extensión total y 2) flexión total.

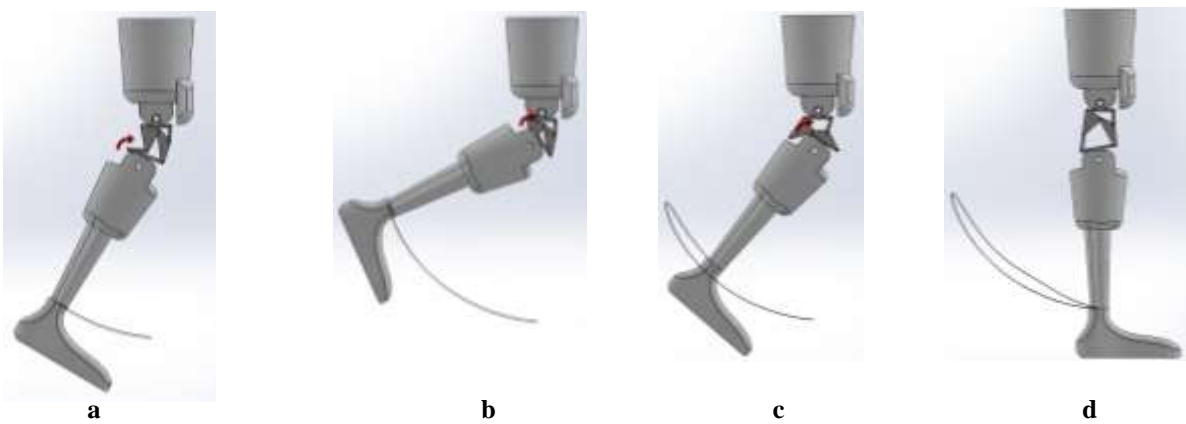


Figura 7. Simulación de la prótesis de rodilla. a) Inicio flexión de la rodilla. b) Flexión máxima. c) Fase extensión. d) Fase extensión total.

4. CONCLUSIONES

Se obtuvieron las dimensiones de los eslabones de un mecanismo de seis barras tipo Watt I, para una prótesis de rodilla humana, a partir de seis puntos de precisión de los CIR durante el ciclo de marcha de una persona y se garantizó la estabilidad en la configuración de JII en la fase inicial y final del ciclo de marcha.

Partiendo de las posiciones angulares deseadas desde el eslabón 1 (tibia), de las relaciones geométricas para las cadenas cinemáticas del mecanismo Watt I, y usando restricciones de diseño, como: dimensiones mínimas y máximas de las barras, criterio de Grashof, relaciones angulares para los elementos ternarios, ángulo de transmisión y JII, se encontraron las posiciones reales de los centros instantáneos de rotación dentro usando mil individuos y mil generaciones para cada posición deseada.

El algoritmo genético fue implementado en el software MatLab.

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento especial a todas las personas que colaboraron directa o indirectamente con la realización de este trabajo de investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Afshari, J.; Nazari, F.; Baghalian, S.; Malihi, S.;. 2012. Applying genetic algorithm for optimization of six-bar mechanism of prosthetic knee joint. *International Journal of Engineering & Applied Sciences (IJEAS)*,4(1): 9-16.
- Ayala, N. 2018. Optimización de la síntesis de un mecanismo de seis barras con aplicación en prótesis de rodilla humana, garantizando la estabilidad en el ciclo de marcha, mediante algoritmos genéticos. Tesis para título de ingeniero mecánico, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú.
- Chen, Y. 2005. Extending the Scalability of Linkage Learning Genetic Algorithms. In *Extending the Scalability of Linkage Learning Genetic Algorithms*. Springer-Verlag,190(1), <https://doi.org/10.1007/b102053>
- Choudhary, P.; Mishra, P.; Ranjan, V. 2014. A Proprioceptive Discussion on Mechanism Used for Knee Joint from 2000-2012: A Literature Review. *International Journal of Scientific and Research Publications*, 4(5). www.ijsrp.org
- Erkaya, S.; Uzmay, I. 2008. A neural-genetic (NN-GA) approach for optimising mechanisms having joints with clearance. *Multibody System Dynamics*, 20(1): 69–83. <https://doi.org/10.1007/s11044-008-9106-6>
- Góngora, L.; Rosales, C.; González, I.;Pujals, N. 2003. Articulación de la rodilla y su mecánica articular. *Medisan*. 7(2), 100-109, <https://www.imbiomed.com.mx/articulo.php?id=23528>
- Gunston, F. 1973. Polycentric Knee Arthroplasty: Prosthetic Simulation of Normal Knee Movement. *Clinical Orthopaedics and Related Research*, 94: 128–135.
- Jin, D.; Zhang, R.; Dimo, H. ; Wang, R.; Zhang, J. 2003. Kinematic and dynamic performance of prosthetic knee joint using six-bar mechanism. *Journal of Rehabilitation Research and Development*, 40(1): 39–48. <https://doi.org/10.1682/JRRD.2003.01.0039>
- Lugo , E. 2012. Diseño de mecanismos utilizando algoritmos genéticos con aplicación en prótesis para miembro inferior. Tesis para obtención de grado de doctor en ciencias, Instituto Politecnico Nacional, Mexico D.F. Mexico
- Nordin, M., & Frankel, V. H. 2004. *Biomecánica básica del sistema musculoesquelético*,3ra Edición. Editorial McGraw-Hill.Madrid, España, 324 pp.
- Pantoja, J.; Villarreal, M.; González, J.; Sepúlveda , G. 2017. Síntesis óptima de un mecanismo para la marcha bípeda utilizando evolución diferencial. *Revista Internacional de Metodos Numericos Para Calculo y Diseno En Ingenieria*, 33(1–2): 138–153. <https://doi.org/10.1016/j.rimni.2016.04.004>
- Pucheta, M.; Cardona, A. 2003. Síntesis de tipo y dimensional de mecanismos utilizando algoritmos genéticos y ecuaciones algebraicas exactas. *Mecánica Computacional*, 22(1): 1200–1216.
- Radcliffe, C. W. 1977. The knud jansen lecture Above - Knee prosthetics. *Prosthetics and Orthotics International*, 1(3): 146–160. <https://doi.org/10.3109/03093647709164629>
- Sancisi, N., Caminati, R., & Parenti-Castelli, V. 2009. Optimal Four-Bar Linkage for the Stability and the Motion of the Human Knee Prostheses. Em *Atti del XIX CONGRESSO dell' Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata*, Ancona. 2009. p. 1-10

ANEXOS

Anexo A: Síntesis de mecanismos con algebra compleja

La síntesis comprende la determinación de las dimensiones de los eslabones del mecanismo que hacen que se cumplan las condiciones pre establecidas, como el rango de valores que pueden encontrarse la dimensión de los eslabones, los ángulos de entrada θ_2 y el cumpli-

miento de las condiciones de Grashof, así como el cálculo del ángulo θ_3 correspondiente al movimiento de la biela y el ángulo θ_4 que genera el movimiento de salida (ver figura A.1).

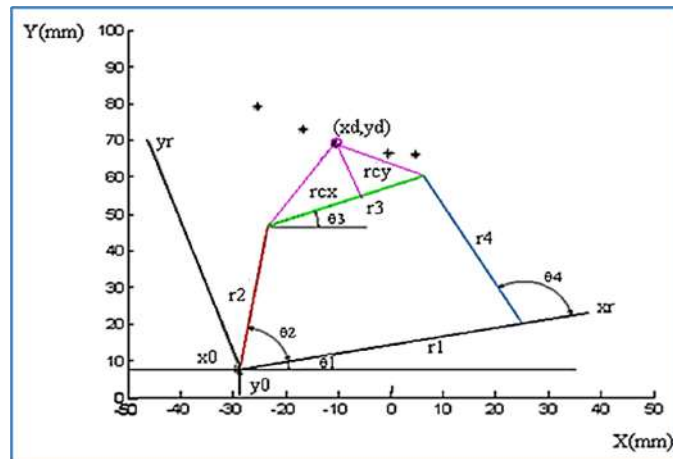


Figura A.1. Mecanismo de cuatro barras (Lugo González, 2012)

La ecuación de Freudenstein muestra la relación entre los ángulos de los elementos de entrada y salida de un mecanismo articulado. Se obtiene a partir de la ecuación vectorial de cierre y aplicando algebra compleja.

$$K_1 \cos \theta_4 - K_2 \cos \theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4) \tag{A.1}$$

Donde:

$$K_1 = \frac{r_1}{r_2}, K_2 = \frac{r_1}{r_4} \text{ y } K_3 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2}{2r_2r_4} \tag{A.2}$$

Se puede reducir la complejidad de la ecuación A.1, empleando identidades trigonométricas del ángulo mitad, obteniendo:

$$A \tan^2 \left(\frac{\theta_4}{2} \right) + B \tan \left(\frac{\theta_4}{2} \right) + C = 0 \tag{A.3}$$

Donde:

$$A = \cos \theta_2 - K_1 - K_2 \cos \theta_2 + K_3 \tag{A.4}$$

$$B = -2 \sin \theta_2 \tag{A.5}$$

$$C = K_1 - (K_2 + 1) \cos \theta_2 + K_3 \tag{A.6}$$

De la ecuación cuadrática A.3, se puede obtener θ_4

$$\theta_{4,1,2} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right) \tag{A.7}$$

Nótese que la ecuación 7 tiene soluciones que pueden ser reales iguales, reales distintas y complejas conjugadas. Si estas son complejas conjugadas, los eslabones con esas longitudes no se conectan (no forman una cadena cinemática cerrada) para algún valor de θ_2 seleccionado. Excepto en esta situación, la solución por lo general será real y desigual, lo cual significa que existen dos valores de θ_4 que correspondan a cualquier valor de θ_2 . Estas 2 soluciones se conocen como las configuraciones cruzadas (positiva) y abierta (negativa) del mecanismo y también como los dos circuitos del mecanismo.

La ecuación para el ángulo θ_3 , se deriva de forma similar a θ_4 , despejando para este caso θ_4 , de tal manera que se anule. La expresión resultante es:

$$K_1 \cos \theta_3 - K_4 \cos \theta_2 + K_5 = \cos(\theta_2 - \theta_3) \tag{A.8}$$

Donde K_1 es la misma que para θ_4 , K_4 y K_5 son:

$$K_4 = \frac{r_1}{r_3} \text{ y } K_5 = \frac{r_4^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2}{2r_2r_3} \tag{A.9}$$

Reduciendo la ecuación A.8 a la forma cuadrática se obtiene:

$$D \tan^2 \left(\frac{\theta_3}{2} \right) + E \tan \left(\frac{\theta_3}{2} \right) + F = 0 \tag{A.10}$$

Donde:

$$D = \cos \theta_2 - K_1 + K_4 \cos \theta_2 + K_5 \tag{A.11}$$

$$E = -2 \sin \theta_2 \tag{A.12}$$

$$F = K_1 + (K_4 - 1) \cos \theta_2 + K_5 \tag{A.13}$$

A partir de la ecuación 11 es posible obtener el valor de θ_3 :

$$\theta_{3,1,2} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D} \right) \tag{A.14}$$

Nótese que θ_3 también tiene dos soluciones, que corresponden a los circuitos cruzados y abierto del mecanismo. Los signos de cada configuración pueden elegirse según la tabla A.1:

Tabla A.1. Configuración de mecanismos (Lugo González, 2012)

Configuración	θ_3	θ_4
Abierta	$+\sqrt{\quad}$	$-\sqrt{\quad}$
Cruzada	$-\sqrt{\quad}$	$+\sqrt{\quad}$

La posición de un punto P sobre el eslabón acoplante (figura A.1) se puede calcular una vez que se tienen los ángulos θ_3 y θ_4 dado que el marco de referencia se encuentra localizado en x_0 y y_0 :

$$r_p = r_2 e^{j\theta_2} + r_{cx} e^{j\theta_3} + r_{cy} e^{j(90+\theta_2)} \tag{A.15}$$

Análiticamente, al determinar las ecuaciones de Freudenstein, se observa que si la trayectoria a seguir por el punto (x_d, y_d) pasa por cuatro puntos, por ejemplo, resultaría que las 8 condiciones de restricción se convertirían en 32 ecuaciones. En este caso, se tendrían 32 ecuaciones y 33 incógnitas, lo que genera la necesidad de plantear una optimización. Es necesario, predeterminar la longitud de algún eslabón, para reducir el problema a un sistema de 32 ecuaciones con 32 incógnitas, que en general tendría una solución única (Lugo González, 2012).

Anexo B: Algoritmos genéticos para la síntesis de mecanismos

Los individuos son evaluados por la función objetivo. La población evolucionará, a lo largo de las generaciones sucesivas, de tal manera que irán convergiendo hacia una solución óptima (Chen, 2005). Cuando al menos un 95% de los individuos de la población comparten el mismo valor para un gen, se dice que el algoritmo ha convergido.

Población inicial

Se crea aleatoriamente y es codificada dentro del cromosoma de un arreglo de longitud variable. La codificación puede hacerse en una representación binaria, calculándose la cantidad de bit según las siguientes ecuaciones:

$$nbits_i = \frac{\log[(r_{i_{max}} - r_{i_{min}})10^p]}{\log 2} \tag{B1}$$

Donde:

$nbits_i$: Número de bits por variable

$r_{i_{max}}$: Límite máximo de la variable

$r_{i_{min}}$: Límite mínimo de la variable

p : Número de dígitos de precisión en la parte decimal

$$longcr = \sum_{i=1}^n nbits_i \tag{B2}$$

Donde:

$longcr$: Longitud del cromosoma

La población debe evaluarse decodificando los genes del cromosoma, para convertirse en una serie de soluciones factibles al problema, para cada solución se utiliza la siguiente ecuación:

$$x_i = r_{i_{min}} + \left(\sum_{j=0}^{nbits_i} b_j \times 2^j \right) \times \left(\frac{r_{i_{max}} - r_{i_{min}}}{2^{nbits_i - 1}} \right) \tag{B3}$$

Donde:

x_i : La variable decodificada

b_j : Bit de la cadena

Función objetivo en algoritmos genéticos para la síntesis de mecanismos

Para el análisis y la síntesis de mecanismos la función objetivo se enfoca en el error de la trayectoria deseada vs la trayectoria generada por el mecanismo. Erkaya & Uzmay, (2008), plantean el uso de la distancia euclidiana entre los puntos deseados C_d^i , y los puntos generados C_x^i , como función objetivo F_o . Esta función representada en el plano xy es:

$$F_o = \sum_i^N \left[(C_{xd}^i - C_{xg}^i)^2 + (C_{yd}^i - C_{yg}^i)^2 \right] \tag{B4}$$

Donde N es el número de puntos a ser sintetizados C_d^i , es un conjunto de puntos específicos indicados por el diseñador y C_g^i son los puntos generados por el acoplador del mecanismo, establecidas por las ecuaciones de Freudenstein para la cadena cinemática abierta. Para cubrir los requerimientos de la función objetivo, se debe considerar además las siguientes restricciones:

- Condiciones de Grashof
- La consecuencia de los ángulos de entrada
- El rango para el diseño de variables
- El rango de variación para la entrada de los ángulos
- La relación entre el aumento de la entrada de un ángulo y la posición adyacente del punto de acoplamiento.

Tomando como base los puntos antes mencionados, la ecuación resultante es:

$$F = \sum_i^N \left[\left(C_{xd}(v) - C_{xg}(v) \right)^2 + \left(C_{yd}(v) - C_{yg}(v) \right)^2 \right] \tag{B5}$$

Donde:

$$v = r_1, r_2, r_3, r_4, r_{cx}, r_{cy}, \theta_1, x_0, y_0, \theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_2^N$$

Los ángulos $\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_2^N$ son el valor de la variable del ángulo θ_2 que es la posición.

Para optimizar esta función Erkaya & Uzmay (2008) proponen la ecuación;

$$F = \frac{1}{N} \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left[(C_{xd}^i(v) - C_{xg}^i(v))^2 + (C_{yd}^i(v) - C_{yg}^i(v))^2 \right]}{n_i}} \quad (\text{B6})$$

Donde N es el número de puntos de precisión, ni= numero de individuos.