Revista CIENCIA Y TECNOLOGÍA V.17 N.3

ISSN 1810-6781 Rev. Cienc. Tecnol. 17(3): 91-99, (2021)

Ecuaciones diferenciales fraccionarias, algunos resultados y ejemplos

Fractional differential equations some results and examples

Jesús Pascual Avalos Rodríguez*

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas,, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n – Ciudad Universitaria, Trujillo, Perú.

* Autor correspondiente: javalos@unitru.edu.pe (J. Avalos)

DOI: 10.17268/rev.cyt.2021.03.08

RESUMEN

La presente investigación tuvo como finalidad mostrar algunos resultados de condiciones de existencia y unicidad y ejemplos sobre la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias, mostrando con ellos diferentes métodos de solución. Para ello se presenta algunos aspectos generales de definiciones y resultados básicos del cálculo fraccionario.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales fraccionarias; derivada fraccionaria; integral fraccionaria; Cálculo fraccionario.

ABSTRAC

The present research aimed to show some results of conditions of existence and uniqueness and examples on the solution of fractional differential equations, showing with them different solution methods. For this, some general aspects of definitions and basic results of the fractional calculation are presented.

Keywords: Fractional differential equations; fractional derivative; fractional integral; Fractional Calculus.

1. INTRODUCCIÓN

El Cálculo Fraccionario ha tenido un notorio avance en los últimos días (Baleanu, 2019), desde un punto de vista de derivadas e integrales fraccionarias aplicadas a funciones de una variable, como en el caso de varias variables en diferentes contextos aplicados y teóricos (Atangana, 2016) .

Desde sus inicios esta área en 1695 esta área no fue popular por diversos motivos, como la falta de interpretación física y geométrica que se considera a la fecha como un problema abierto de las matemáticas (Kilbas, 2006). La primera mención de la posibilidad de extender el significado de la expresión d^n/dx^n para el caso de n no entero, se encuentra en la correspondencia entre Leibniz y L'Hospital y hasta el siglo XIX era un tema que fue tratada por matemáticos eminentes como Euler, Fourier, Laplace, Liouville, Riemann y Abel entre otros (Podlubny, 1999) y (Tarasov, 2019).

El cálculo fraccionario ha sido empleado con bastante éxito en diferentes áreas aplicadas de la ciencia e ingeniería, como ciencia de materiales, teoría del caos, fractales, dispositivos electrónicos, física teórica y cuántica (Hermann, 2011), (Lonescu, 2017), (Sun, 2018) y (West, 2016).

A la fecha existen diversas formulaciones para la integral y derivada de orden fraccionario o no entero (Podlubny, 1999) y (Kilbas, 2006). La que se usará en el presente artículo es la integral y derivada del tipo Riemann-Liouville, que se definen de la siguiente manera:

En primer lugar considérese la integral fraccionaria de Riemann-liouville con orden de integración $\alpha > 0$

$$I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{1}$$

Mientras que para definir la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es necesario considerar la integral fraccionaria en su definición; es decir

Autor Responsable: Jesús Pascual Avalos Rodríguez Fecha de envío: 23-05-2021 Fecha de aprobación: 01-06-2021

$$D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt, \tag{2}$$

donde n es el menor entero mayor que α (es decir, $n = \lceil \alpha \rceil$). Esta expresión que define la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se puede reescribir también como

$$D_x^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_x^{n-\alpha} f(x).$$

Lo cual evidencia que es necesario considerar hacer un estudio de algunas funciones especiales que se vinculan con la definición de estos operadores, como la función Gamma y otras (Kilbas, 2006), (Podlubny, 1999) y (West, 2016), que se verá más adelante.

Una de las diferencias notorias entre estos operadores que generalizan la noción de derivada e integral clásicas u ordinarias es, sobre la localidad de dicho operador; es decir, mientras que la derivada ordinaria tiene un concepto local; es decir, se analiza puntualmente, la derivada fraccionaria necesita de un pasado histórico, que se refleja en la integral sobre el intervalo de $[a, x]$, que está presente en la definición (2), y se muestra en la siguiente Figura 1 (Fernandez, 2019).

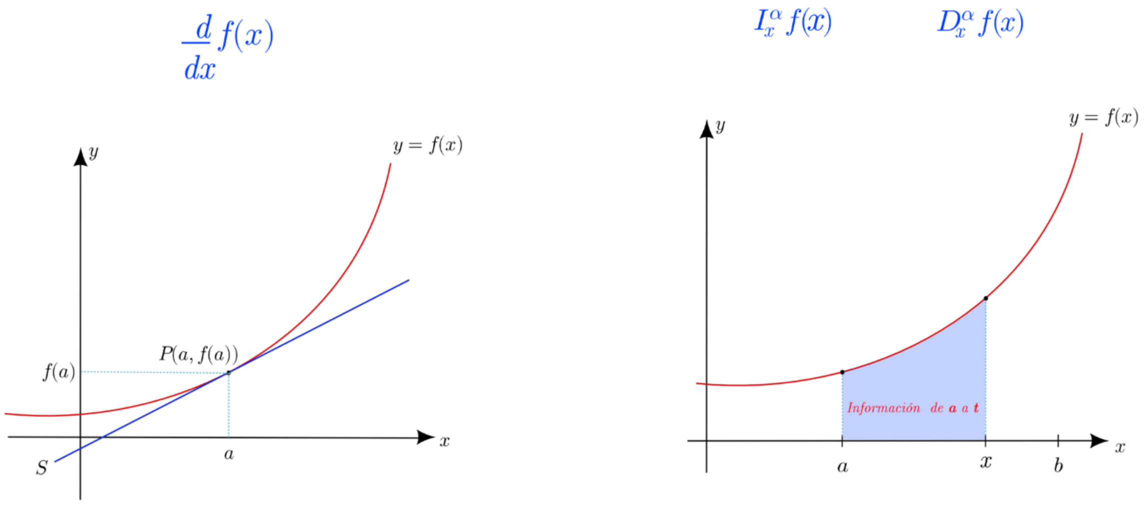

Figura 1

El hecho de que para este tipo de operadores se necesite de información de la función sobre un intervalo, es precisamente la característica que hace que estos operadores sean apropiados para modelar fenómenos que necesitan de un pasado histórico o llamados también fenómenos con memoria, como por ejemplo materiales viscoelásticos (West, 2016).

En el ámbito de las ecuaciones diferenciales fraccionarias se han hecho muchos estudios con respecto a diferente tipos de operadores llegando a resultados muy importantes que han puesto el área del Cálculo Fraccionario en realce en las últimas décadas (Sun, 2018).

2. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1 Objeto de estudio

El objeto de estudio que se considera en el presente trabajo es la ecuación diferencial fraccionaria, en el cual se analiza resultados de existencia y unicidad.

2.2 Métodos y Técnicas

Se presentará algunas funciones especiales notables que aparecen en el cálculo fraccionario que son indispensables para abordar el análisis de las ecuaciones diferenciales.

Función Gamma. Una de las funciones básicas del cálculo fraccionario, la cual generaliza el concepto de la función factorial de un número entero no negativo.

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\,,z>0.$$

Función Beta. En muchos casos aparece la función Beta definida como $B: R\times R\to R$, tal que

$$B(z,w)=\int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{w-1}ds, z>0, w>0.$$

Una propiedad importante que relaciona la función Gamma con la función Beta es

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(\mathrm{z}+\mathrm{w})}, z>0, w>0.$$

Función de Miller-Ross. Sean $v>-1,\ a\in R\ y\ \ t\in\ R$, tal que

$$E_t(v,a)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at)^k}{\Gamma(v+k+1)}.$$

Esta función generaliza la función exponencial cuando $v=0$.

Ecuaciones Diferenciales fraccionarias

Sea la ecuación diferencial fraccionaria lineal con coeficientes variables, para ello considere $0<t<T<\infty$,

$$D_t^{\sigma_n}y(t)+\sum_{j=1}^{n-1}p_j(t)D_t^{\sigma_{n-j}}y(t)+p_n(t)y(t)=f(t). \tag{3}$$

Con condiciones iniciales

$$\left[D_t^{\sigma_{k-1}}y(t)\right]_{t=0}=b_k, \qquad k=1,\dots,n. \tag{4}$$

Donde $D_t^{\sigma_{k-1}}=D_t^{\sigma_{k-1}}D_t^{\sigma_{k-2}}\dots D_t^{\sigma_1}$ y $f\in L_1[0,T]$; es decir

$$\int_0^T|f(t)|dt<\infty.$$

Por simplicidad se asume $f(t)\equiv 0, \forall t>T$.

Para considerar cómo sería una ecuación diferencial fraccionaria de este caso, se puede considerar la ecuación con condiciones iniciales en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Para ello sea $\sigma_n=2.7$, con lo cual $\lceil\sigma_n\rceil=3$, entonces la ecuación (3) tendrá tres condiciones iniciales, y la expresión queda de la siguiente manera

$$D_t^{2.7}y(t)=f(t)$$

$$D_t^{1.7}y(t)|_{t=0}=b_3$$

$$D_t^{0.7}y(t)|_{t=0}=b_2$$

$$I_t^{0.3}y(t)|_{t=0} = b_1.$$

Más adelante se expresará los pasos de solución de una ecuación diferencial fraccionaria, ahora considere el siguiente teorema de existencia y unicidad siguiente cuya demostración se puede hallar en (Podlubny, 1999).

Teorema 1. Sea $f(t) \in L_1[0,T]$, entonces la ecuación

$$D_0^{\sigma_n}y(t) = f(t)$$

Tiene una única solución $y(t) \in L_1[0,T]$, que se expresa como

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^t (t-s)^{\sigma_n - 1} f(s)ds + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i - 1} \tag{5}$$

la cual satisface las condiciones iniciales de la ecuación (3).

Como siguientes propiedades importante en este artículo, son dos teoremas que abordan la existencia y unicidad de la solución de ecuaciones diferenciales no lineales, estos se pueden hallar (Avalos, 2013), (Delbosco, 1996), (Diethlem, 2010) y (Pucheta 2018).

Teorema 2. (Existencia de solución). Asuma $D = [0, x^*] \times [b_1 - l, b_1 + l]$ con algún $x^* > 0$ y $l > 0$, y sea $f: D \to R$ una función continua. Además de eso, defina

$$x = \min\{x^*, \left(\frac{l\Gamma(\sigma_n+1)}{|f|_\infty}\right)^{1/\sigma_n}\}.$$

Entonces existe una función $y: [0, x] \to R$ que satisface el problema de valor inicial

$$D_t^{\sigma_n}y(t) = f(t, y) \tag{6}$$

$$\left[D_t^{\sigma_{k-1}}y(t)\right]_{t=0} = b_k, \qquad k = 1,2, \dots, n. \tag{7}$$

Teorema 3. (Unicidad de solución). Asuma que $D: [0, x^*] \times [b_1 - l, b_1 + l]$ con algún $x^* > 0$ y $l > 0$. Además de eso, sea $f: D \to R$ una función limitada en D que satisface la condición de Lipschitz con respecto a la segunda variable; es decir,

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y - z|$$

con alguna constante $L > 0$ independiente de t, y y z. Entonces, denotando x definido en el teorema anterior, existe una única función $y: [0, x] \to R$ que satisface el problema de valor inicial (6)-(7).

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación se presentan como resultados de este trabajo ejemplos de ecuaciones diferenciales fraccionarias, en el cual se muestra el proceso de solución, y se determina la existencia y unicidad basados en los teoremas previos de la sección anterior.

Ejemplo 2. Considere el siguiente problema de valor inicial

$$D_t^{\alpha}y(t) = t^2,$$

$$D_t^{\alpha-1}y(t)|_{t=0} = 2,$$

donde $\alpha \in (0,1)$.

Solución.

En la ecuación diferencial dada se observa que la función $f(t) = t^2$ es una función que pertenece al espacio $L_1[0, T]$, con $T \in R$, con lo cual se tiene la existencia de solución que se garantiza de acuerdo al Teorema 1.

Además note que la condición inicial es una integral fraccionaria de orden $1 - \alpha$, pues el orden en la condición inicial es $\alpha - 1 < 0$.

Por el Teorema 1, la solución se puede expresar como (5), con lo cual se obtiene

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha-1} s^2 ds + \frac{2}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$$

$$= I_t^{1-\alpha} t^2 + \frac{2}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$$

$$= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3+\alpha)} t^{2+\alpha} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}.$$

Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial dado es la función

$$y(t) = \frac{2}{\Gamma(3+\alpha)} t^{2+\alpha} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}.$$

Esta función satisface la condición inicial del problema dado cuando $t = 0$; esto es, si se considera la integral de orden $1 - \alpha$, se tiene

$$I_t^{1-\alpha} y(t) = I_t^{1-\alpha} \left(\frac{2}{\Gamma(3+\alpha)} t^{2+\alpha} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \right)$$

$$= I_t^{1-\alpha} \left(\frac{2}{\Gamma(3+\alpha)} t^{2+\alpha} \right) + I_t^{1-\alpha} \left(\frac{2}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \right)$$

$$= \frac{2}{\Gamma(2+\alpha)} I_t^{1-\alpha}\, t^{2+\alpha} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)} I_t^{1-\alpha} t^{\alpha-1}$$

$$= \frac{2}{\Gamma(3+\alpha)} \frac{\Gamma(3+\alpha)}{\Gamma(4)} t^3 + \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)} t^0$$

$$I_t^{1-\alpha} y(t) = \frac{1}{3} t^3 + 2;$$

y considerando $t = 0$, se obtiene $D_t^{\alpha-1} y(0) = I_t^{1-\alpha} y(0) = 2$.

A continuación se presenta la representación de todas las soluciones cuando los valores de α varía de 0 hasta 1, en la Figura 2, modeladas con el software Wolfram Mathematica ©.

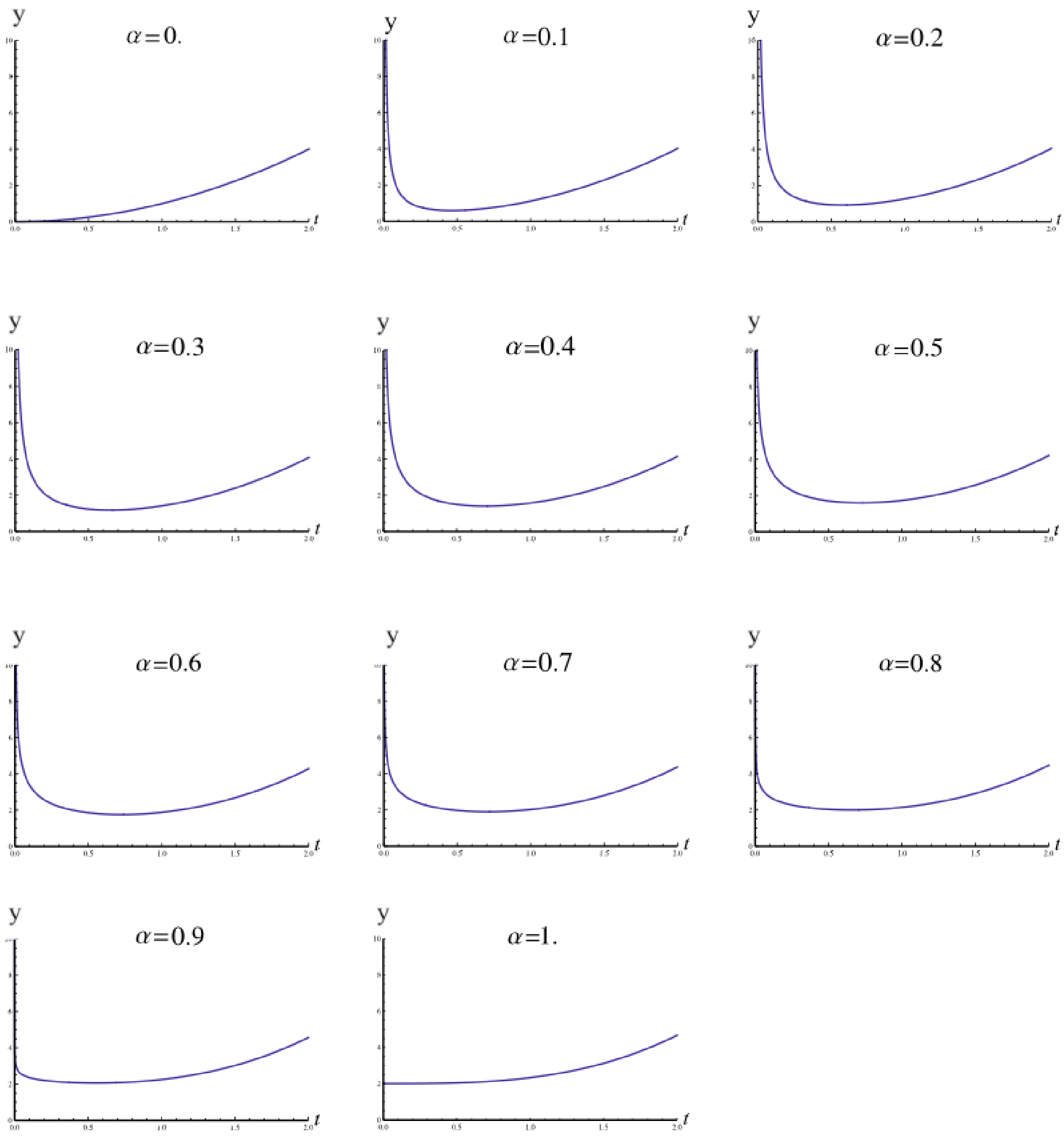

Figura 2

Ejemplo 3. Considere la siguiente ecuación diferencial fraccionaria

$$D_t^{\alpha} y(t) = \mathrm{t}^{\beta}, \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad 0 < \beta < 1, \tag{8}$$

$$y(0) = 0. \tag{9}$$

Observe que la función $f(t) = t^{\beta}$ es continua en todos los reales, pero no satisface la condición de Lipschitz. Obviamente la función $y \equiv 0$ satisface el problema de valor inicial (8)-(9), sin embargo, la función $y(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} t^{\alpha+\beta}$ es también una solución de la ecuación diferencial.

En efecto.

$$\mathrm{D}_{\mathrm{t}}^{\alpha}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}t^{\alpha+\beta}\right)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}D_t^{\alpha}(t^{\alpha+\beta})$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)}\ t^{\alpha+\beta-\alpha}$$

$$=t^{\beta},$$

la cual también satisface la condición inicial.

Por lo tanto, el problema de valor inicial (8)-(9) no presenta unicidad de solución, debido a que la función $f(t)=t^{\beta}$ no cumple con la condición de Lipschitz.

Ahora veamos que se puede resolver una ecuación diferencial fraccionaria con procesos alternativos, como se muestra continuación con la siguiente ecuación lineal.

Ejemplo 4. Considere la siguiente ecuación diferencial fraccionaria

$$D_t^{\frac{1}{2}}y(t)+y(t)=0 \tag{10}$$

Solución.

Método 1. Usando ecuaciones diferenciales ordinarias.

En primer lugar, se puede derivar a ambos lados de la ecuación (10), y considere la propiedad de leyes de exponentes para operadores fraccionarios, la cual indica que al operar simultáneamente a una función con dos o más derivadas fraccionarias, los órdenes se suman, y además por la linealidad de la derivada fraccionaria, se tiene

$$D_t^{\frac{1}{2}}\left(D_t^{\frac{1}{2}}\,y(t)+y(t)\right)=0$$

$$D_t^{\frac{1}{2}}\left(D_t^{\frac{1}{2}}y(t)\right)+D_t^{\frac{1}{2}}\big(y(t)\big)=0$$

$$D_t^{1}y(t)-ct^{\frac{3}{2}}+D_t^{\frac{1}{2}}y(t)=0, c\in R$$

Con el dato de la ecuación original (10): $D_t^{\frac{1}{2}}y(t)=-y(t)$

$$D_t^{1}y(t)-ct^{\frac{3}{2}}-y(t)=0$$

Lo cual ya es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, cuya solución es

$$y(t)=k\left(e^{t}\,Erfc\big(\sqrt{t}\big)-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right), k\in R.$$

donde $Erfc(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}e^{-s^2}ds.$

Método 2. Usando autofunciones.

Considere la función de Miller-Ross definida en la sección 2, que generaliza la función exponencial $y=e^{t}$

Se tiene,

$$D\ E_t(0,a)=E_t(-1,a)=aE_t(0,a),$$

Lo cual significa que $E_t(0,a)=e^{at}$ es la autofunción de D con autovalor a. Similarmente se tiene para

$$D_t^{\frac{1}{2}} E_t(0,a) = E_t\left(-\frac{1}{2}, a\right)$$

$$D_t^{\frac{1}{2}} E_t\left(-\frac{1}{2}, a\right) = E_t(-1,a) = AE_t(0,a)$$

o

$$D_t^{\frac{1}{2}}\left(E_t\left(-\frac{1}{2}, a\right) + \mathrm{aE_t}(0,\mathrm{a}^2)\right) = \mathrm{a}\left(E_t\left(-\frac{1}{2}, a\right) + \mathrm{aE_t}(0,\mathrm{a}^2)\right)$$

Por tanto, la función $y = E_t\left(-\frac{1}{2}, a^2\right) + aE_t(0,a^2)$ es una autofunción de $D_t^{1/2}$ con autovalor a. Con lo cual dicha autofunción sería además la solución de la ecuación diferencial dada.

La representación de la solución se puede considerar en la **Figura *3***, elaborada con Wolfram Mathematica ©, considerando el valor de la constante $k = -1$.

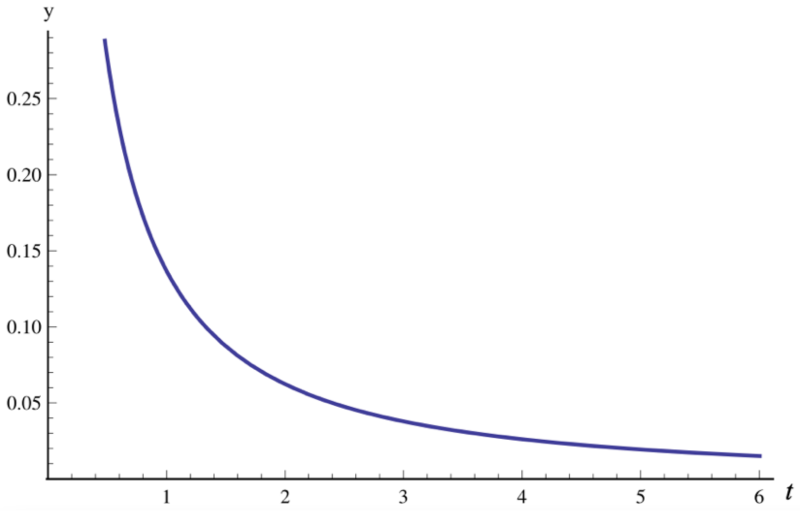

Figura 3

4. CONCLUSIONES

Las conclusiones del presente artículo se direcciona en la presentación de más de una forma de resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias, usando los teoremas de existencia y unicidad, desde un punto de vista de problema de valor inicial y considerando la solución general de la ecuación diferencial, abordado con el método de transformar una ecuación diferencial en una ecuación diferencial ordinaria y también abordada desde el contexto de autofunciones; además teniendo en cuenta que la derivada fraccionaria necesita de información de la función sobre un intervalo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Atangana, A. 2016. Derivative with a New Parameter. Elsevier Ltd p166.

Avalos, J. 2013. Existencia e Unicidade das Equações Diferenciais Fracionárias, Disertación de maestría, Universidade Federal de Goiás – Brasil: 107pp.

Baleanu, D.; Mendes Lopes, A. (Eds), 2019. Handbook of Fractional Calculus with Applications. l7: 259 pp.

Delbosco, D.; Rodino, L. 1996. Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equations. Mathematical Analysis and Applications. 204: 609-625.

Diethlem, K. 2010. The Analysis of Fractional Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin: 262 pp.

Fernandez, A.; Ali Özarslan, M.; Baleanu, D. 2019. On fractional calculus with general analytic kernels. Elsevier. Applied Mathematics and computation. Vol 354: pp 248-265.

Hermann, R. 2011. Fractional Calculus. An Introduction for Physicists. World Scientific: 274pp.

Kilbas, A.; Trujillo, J. 2006. Theory and Applications of Fractional Differential equations. Elsevier, UK: 541pp.

Lonescu, C.; Lopes, A.; Copot, D.; Machado, J.; Bates J. 2017. The role of fractional calculus in modeling biological phenomena: A review. Elsevier. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol 51: Pp 144-159.

Podlubny, I. 1999, Fractional differential equations. Mathematics in Science and Engineering, 198: 366pp.

Pucheta, P. 2018. Existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias, Extensionismo, innovación y transferencia tecnológica – Claves para el desarrollo, 4: 339-351.

Sun, H.; Zheng, Y.; Balenau, D. ; Chen, W.; Chen, Y. 2018. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. Elsevier, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 64: 213-231.

Tarasov, V. 2019. On History of Mathematical Economics: Application of Fractional Calculus. Mathematics - MDPI. https://doi.org/10.3390/math7060509.

West, B. 2016. Fractional Calculus view of Complexity. Tomorrow's science}, CRC Press Taylor & Francis Group, LLC: 300pp.