Revista CIENCIA Y TECNOLOGÍA V.17 N.3
ISSN 1810-6781 Rev. Cienc. Tecnol. 17(3): 81- 89, (2021)

Optimización matemática para los agentes económicos

Mathematical optimization for economic agents

Rosa María Requelme Ibáñez; Carlos Abel Reyes Alvarado*; Jorge Luis Lozano Cervera

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann, Av. Miraflores S/N, Tacna Perú.

*Autor correspondiente: creyesa@unjbg.edu (C. Reyes) DOI: 10.17268/rev.cyt.2021.03.07

RESUMEN

El presente artículo pretende poner a disposición de los agentes económicos herramientas matemáticas para fortalecimiento de sus actividades. En los últimos años, las técnicas de optimización, tan útiles en la teoría microeconómica, se han ampliado para incorporar métodos topológicos y diferenciales más potentes. Estos métodos han dado lugar a nuevos resultados sobre el comportamiento cualitativo de los sistemas económicos y políticas generales. La forma más simple y común de describer la tecnología de una empresa es la función de producción. Sin embargo, existen otras formas de describir las tecnologías de la empresa que son más generales y más útiles en determinados entornos. En este sentido, la rapidez con que se producen los cambios en nuestra sociedad, son aditivos que nos inmersa en la era de la automatización, por ejemplo la técnica de producción “just in time”, está implantando en el sector empresarial la cultura de la “calidad total”. La necesidad de mejorar costes para crecer conduce a aplicar herramientas matemáticas. Es así, que proponemos en esta investigación herramientas: (i) El teorema de Kuhn – Tucker, (ii) El teorema del máximo, (iii) El teorema de la envolvente, junto a una aplicación de estos.

Palabras clave: Optimización matemática; Herramienta matemática; Agentes económicos.

ABSTRAC

This article aims to make mathematical tools available to economic agents to strengthen their activities. In recent years, optimization techniques, so useful in microeconomic theory, have been expand to incorporate more powerful differential and topological methods, these methods have led to new results on the qualitative behavior of general economic and political systems. The simplest and most common way to describe a company's technology is the production function. However there are other ways of describing company technologies that are more general and more useful in certain settings. In this sense, the rapidity with which changes are taking place in our society are additives that immerse us in the era of automation, for example the "just in time”, production technique is implanting in the business sector the culture of "total quality". The need to improve costs to grow leads to the application of mathematical tools. Thus, in this research we propose tools: (i) The Kuhn - Tucker theorem, (ii) The maximum theorem, (iii) The envelope theorem, together with an application of these.

Keywords: Mathematical Optimization; Mathematical Tool; Economic Agents.

1. INTRODUCCIÓN

En años recientes el uso de las matemáticas en las ciencias sociales se está expandiendo tanto en amplitud como en profundidad a un ritmo creciente se ha producido una globalización de mercados, en consecuencia el incremento de la competencia. Como puede evidenciarse Leal, L. (2007); Cordón, E. (2007); Chease, J. (2001); Schofield, N. (2014) entre otros. Paralelamente, se pone un mayor énfasis en una gestión eficaz, al mismo tiempo que se trabaja en pro de un mejoramiento de la calidad de los productos, y una maximización del valor para los clientes de acuerdo a Heizer, J. (2001). Por supuesto, la formulación de las cuestiones de las ciencias sociales debe preceder a la construcción de modelos y la destilación de estos modelos a problemas matemáticos, ya que de lo contrario los supuestos podrían ser inapropiados. Los avances tecnológicos y la rapidez con que se producen los cambios en nuestra sociedad, hacen que los productos tengan un ciclo de vida cada vez más reducido por ejemplo, el uso de recursos por encima del mínimo teórico necesario (mano de obra, equipos, tiempo, espacio, energía) y conocer el proceso de trabajo derivado de las premisas del modelo cultural de

Autor Responsable: Rosa María Requelme Ibáñez Fecha de envío: 26-01-2021 Fecha de aprobación: 17-06-2021

mejora y su relación con la percepción del colaborador la cual a su vez repercute en el logro de los objetivos y metas organizacionales a través de sus estándares y lineamentos de calidad y productividad. En este sentido, se hace imperante que las teorías matemáticas se orienten en el uso de herramientas útiles enmarcadas en el cálculo, la teoría de la medida, métodos de topología diferencial y análisis funcional, en la presente investigación se presentan bases teóricas para atender la constante incertidumbre que el sector productivo enfrenta cuando desea enfocar sus estrategias competitivas. Como lo afirman evidencias de los autores Leal, L. (2007); Cordón, E. (2007); Chease, J. (2001) entre otros. Una consecuencia para la aplicación de las matemáticas en las ciencias sociales es porque se está expandiendo tanto en amplitud como en profundidad a un ritmo creciente. Ha pasado de la economía a las demás ciencias sociales, a menudo acompañada por la misma controversia que arrasó la economía en la década de 1950. Y su uso se ha profundizado desde el cálculo hasta la topología y la teoría de la medida hasta los métodos de topología diferencial y análisis funcional. Las razones de esta expansión son varias. Primero, y quizás más importante, las matemáticas hacen que la comunicación entre investigadores sea concisa y precisa. En segundo lugar, ayuda a aclarar los supuestos y modelos; esto pasa por alto los argumentos en el campo que son el resultado de diferentes supuestos implícitos. En tercer lugar, las pruebas son rigurosas, por lo que las matemáticas ayudan a evitar errores en la literatura. En cuarto lugar, su uso a menudo proporciona más información sobre los modelos. Y finalmente, los modelos se pueden aplicar a diferentes contextos sin repetir el análisis, simplemente cambiando el nombre de los símbolos (Schofield, 2014). En consecuencia de nuestra investigación es mostrar la importancia de todas estas teorías mencionadas, con el propósito que a través del uso de herramientas matemáticas como métodos cuantitativos, ofrezcan un horizonte más claro cuando se desea optimizar las actividades de los agentes económicos.

Después de la información planteada, nos planteamos los siguientes objetivos: a) Determinar las bases de la Optimización Matemática para los Agentes Económicos que buscan el valor óptimo de sus variables, b)

Aplicar métodos numéricos en el diseño de modelos matemáticos que se van a optimizar, c) Identificar en qué estado se encuentra las investigaciones referentes a modelos matemáticos para los agentes económicos. Y nos planteamos el siguiente problema ¿Existen las bases teóricas en la Optimización Matemática para que los Agentes Económicos alcancen el valor óptimo de sus variables?, para ello no planteamos la hipótesis: Existen aplicaciones en las teorías matemáticas para dar explicación a muchos de las actividades económicas de la sociedad, una de ellas la optimización matemática en donde se profundiza el análisis mediante el estudio de las derivadas parciales de un modelo matemático.

Una vez expresada en términos matemáticos el problema que pretendemos resolver, nos preguntamos si tiene solución y en caso afirmativo, cuál es su método, cuando tenemos un programa matemático con dos variables de decisión, su resolución grafica puede darnos la respuesta a las dos cuestiones anteriores, permitiéndonos además, discernir si la solución encontrada es local o global.

Dada la limitación que presenta el método de resolución gráfica cuando el número de variables de decisión es mayor que dos, es por ello que conviene disponer de criterios generales que garanticen la existencia de solución óptima proporcionado por un programa matemático (Excel o Matlab). Los teoremas de Weierstrass presentados en (Cerdá, 2013) son fundamento de la programación convexa proporcionando condiciones suficientes de existencia de óptimos globales y de globalidad de las soluciones de un programa matemático.

La importancia de esta investigación radica en presentar las herramientas matemáticas y la utilidad en un software amigable como lo es excel, la teoría básica enmarcada en el cálculo, la teoría de la medida, métodos de topología diferencial y análisis funcional junto a un ejemplo didáctico en el que se pueden abordar la implementación del método para fortalecer las estrategias desde el método cuantitativo de Excel, y la teoría fundamental, que permitirá a los agentes económicos de nuestra región analizar aquellos fenómenos económicos que perturban la planificación de su gestión.

2. MATERIAL Y MÉTODOS

La investigación corresponde a un estudio de carácter básico, con aplicación del método numérico en excel.

Como base de análisis se consideró bibliografía especializada, libros, artículos científicos y tesis referentes al objeto de la investigación, etc. Información que será determinante para el logro de los objetivos, porque, fundamentará una serie de proposiciones, así mismo, la discusión u observaciones serán analizados tomando las propiedades que deben satisfacer las restricciones para asegurar que las condiciones de Kuhn-Tucker sean condiciones necesarias de optimalidad local (Herrera & G., 2019), encontrando razones o causas que fundamenten la argumentación de cada herramienta matemática junto a una aplicación práctica del caso analítico, el que será implementado en excel para una aproximación del modelo que se desea optimizar.

El método numérico que se aplica en el presente estudio para optimizar variables, es una aproximación de las variables mediante la implementación de valores numéricos usando el lenguaje de programación que ofrece la hoja de cálculo de Microsoft Excel.

La forma más simple y común de describir las variables de una empresa, es la función de producción, que generalmente se estudia con propósitos de optimización. Sin embargo, existen otras formas de describir las variables de la empresa que son objeto de mejora continua por los agentes económico, y más útiles en determinados entornos. En este sentido, analizaremos herramientas matemáticas para optimizar las variables económicas, que bajo ciertas restricciones pueden representar las posibilidades de producción óptima de la empresa.

2.1. Teorema de Kuhn-Tucker.

Sean $f(X)$ y $g^j(X)$, $j = 1,\dots,m$ funciones continuas de valor real definidas sobre algún *dominio* $D \subset \mathcal{R}^n$. *Sea* X^* un punto interior de D y supongamos que X^* maximiza $f(X)$ en D sujeta a las restricciones $g^j(X) \leq 0$, $j = 1,\dots,m$, y que f y cadag^j son continuamente diferenciable en un conjunto abierto que contiene X^*. Si los vectores gradiente $\nabla g^j(X^*)$ asociados a las restricciones j que se unen a X^* son linealmente independientes, entonces hay un vector único $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathcal{R}^n$, tal que (X^*, λ^*) satisface las condiciones de Kuhn-Tucker (Herrera & G., 2019)]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(X^*,\, \lambda^*)}{\partial X_i} = \frac{\partial f(X^*)}{\partial X_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \left(\frac{\partial g^j(X^*)}{\partial X_i} \right) = 0\,, \qquad i = 1,\ \ldots, n.$$

$$\lambda_j^* \geq 0, \qquad g^j(X^*) \leq 0, \qquad \lambda_j^*\, g^j(X^*) = 0, \qquad j = 1,\ \ldots, m$$

Demostración

Sin pérdida de generalidad, supongamos que las primeras restricciones $K \geq 0$ son vinculantes y el resto no lo son. Defina $\lambda_j^* = 0$ para $j = K+1,\dots,m$. Por lo tanto, independientemente de los valores de $\lambda_1^*,\ \ldots, \lambda_k^*$, será el caso de que $\lambda_j^*\, g^j(X^*) = 0$, $j = 1,\dots,m.$ Definamos, $B = \left\{ b \in \mathcal{R}^n | b = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* \nabla g^j(X^*)\,,\ para\ algún\ \lambda_1 \geq 0,\dots,\lambda_k \geq 0 \right\}$, donde B es definido como convexo y cerrado.

Si $\nabla f(X^*) \in B$, entonces

$$\nabla f(X^*) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* \nabla g^j(X^*) = 0 \qquad (1)$$

Para algunos $\lambda_1^* \geq 0,\ \ldots, \lambda_k^* \geq 0$. Además, los λ_j^* son únicos ya que si existen otros también se cumplirán

$$\nabla f(X^*) - \sum_{j=1}^{k} \hat{\lambda}_j^* \nabla g^j(X^*) = 0 \qquad (2),$$

de (1) obtenemos,

$$\nabla f(X^*) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* \nabla g^j(X^*) \qquad (3)$$

Ahora reemplazando (3) en (2) y asociando obtenemos, $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* \nabla g^j(X^*) - \sum_{j=1}^{k} \hat{\lambda}_j^* \nabla g^j(X^*) = 0$

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j^* - \hat{\lambda}_j^* \right) \nabla g^j(X^*) = 0 \qquad (4)$$

La independencia lineal de $\nabla g^1(X^*), \nabla g^2(X^*),\ \dots, \nabla g^k(X^*)$ implica $\lambda_j^* = \hat{\lambda}_j^*$ para $j = 1,\ \ldots, k$. Por lo tanto, es suficiente mostrar que $\nabla f(X^*) \subset B$.

Para ello denotamos $a^* = \nabla f(X^*)$ y supongamos, a *modo de contradicción*, que $a^* \notin B$. Luego los dos conjuntos convexos cerrados $A = \{a^*\}$ y B son disjuntos, por el teorema de separación, existe $p \in \mathcal{R}^n$ tal que,

$$p.a^* > p.b \qquad (5)$$

$\forall\, b \in B$. En particular, $p.a^* > 0$ pero $0 \in B$, también, $p.\nabla g^j(X^*) \leq 0$ para cada $j = 1,\ \dots, k$, ya que si esto falla para algunos j, sería contradictorio a (5), al establecer, $b = \lambda \nabla g^j(X^*)$ para $\lambda > 0$ lo suficientemente grande. Por lo tanto,

$$\nabla f(X^*).p > 0 \ \text{ y } \ \nabla g^j(X^*).p \leq 0, \ \text{para cada} \ \ j = 1,\ \dots, k. \qquad (6)$$

Como $\nabla g^1(X^*), \nabla g^2(X^*),\ \dots, \nabla g^k(X^*)$ son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$, la matriz G de orden $k \times n$, cuya fila j es $g^j(X^*)$ tiene un rango igual a todos los de $\mathbb{R}^k$. En particular, si $w \in \mathcal{R}^k$ es el vector de columna $(-1, -1, \dots, -1)$, existe $z \in \mathcal{R}^n$ tal que $Gz = w$. Entonces, en particular,

$$g^j(X^*).z < 0 \ \text{para cada} \ j = 1,\ \ldots, k. \qquad (7)$$

Por (6) podemos elegir $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño para establecer

$$\nabla f(X^*).(p + \delta z) > 0. \qquad (8)$$

Como X^* está en el interior de D, $f\ (X^* + \varepsilon\ (p + \delta z))$ está bien definida como una función de ε siempre que $|\varepsilon|$ sea lo suficientemente pequeño. Además, todas las restricciones no vinculantes $j = K+1,\dots,m$ se satisface para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño por continuidad, y todas las restricciones de enlace $j = 1,\dots,K$ se satisfacen para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño porque para cada uno de estos j, (6) y (7) implican,

$$\frac{dg^j(X^* + \varepsilon(p + \delta z)}{d\,\varepsilon} = \nabla g^j(X^*).(p + \delta z) < 0.$$

En consecuencia, para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente; pequeño, $X^* + \varepsilon(p + \delta z)$ es factible y, por lo tanto, debe arrojar un valor que no sea mayor que el valor máximo $f(X^*)$. Por lo tanto, debemos tener,

$$\left.\frac{dg^j(X^* + \varepsilon(p + \delta z)}{d\,\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \leq 0.$$

Pero de acuerdo a (8).

$$\left.\frac{dg^j(X^* + \varepsilon(p + \delta z)}{d\,\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \nabla f(X^*).(p + \delta z) > 0, \qquad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

De donde verificamos que este último resultado es una contradicción, por lo tanto $a^* = \nabla f(X^*) \in B$, y se verifica

$$\nabla f(X^*) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* \nabla g^j(X^*) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(X^*,\ \lambda^*)}{\partial X_i} = \frac{\partial f(X^*)}{\partial X_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \left(\frac{\partial g^j(X^*)}{\partial X_i}\right) = 0\,, \qquad i = 1,\ \dots,n. \qquad \blacksquare$$

2.2.Teorema de optimización.

Consideremos el problema de maximización,

$$\max_{X\in\mathcal{R}^n} f(X,a)$$
$$\mathit{sujeta\ a} \quad g^j(X,a) \leq 0, \quad j = 1,\ \dots,m \tag{9}$$

Sea $\boldsymbol{S}$ un conjunto compacto, $f: D \longrightarrow \mathcal{R}$ es continua, donde la restricción-continuidad es satisfecha (Karlsson, Ygge, & Andersson, 2007). Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones

i. La solución (9) existe para cada $a \in A$, y por lo tanto la función de valor $V(a)$ es definida sobre todo A.
ii. La función de valor $V: A \longrightarrow \mathcal{R}$, es continua.
iii. Supongamos que (X^k, a^k) es una sucesión en $\mathcal{R}^n \times A$ convergiendo a $(X^*, a^*) \in \mathcal{R}^n \times A$. Si para cada k, X^k es una solución de (O) cuando $a = a^k$, entonces X^* es una solución a (O) cuando $a = a^*$.
iv. Si para cada $a \in A$ la solución a (9) es única y es dada por la función $X(a)$, entonces $X: A \longrightarrow \mathcal{R}^n$ es continua.

Demostración.

Parte (i)

Se sigue inmediatamente del teorema Weierstrass (Schofield, 2014) (Existencia de valores extremos) porque la compacidad de S y la continuidad de g^j implica que para cada $a \in A$ el conjunto de $X \in \mathcal{R}^n$ satisfaciendo las m restricciones, $g^1(X,a) \leq 0,\ \dots, g^m(X,a) \leq 0$, es compacto y porque hemos asumido que no está vacío.

Parte (ii)

Supongamos que $\{a^k\}_{k\in I}$ es una sucesión en A convergente a $a^* \in A$. Será suficiente demostrar que $V(a^k)$ converge a $V(a^*)$. Supongamos por contradicción, que $V(a^k)$ no converge a $V(a^*)$. Entonces para algunos $\varepsilon > 0$, hay un subconjunto infinito $I' \subset I$ tal que para cada $k \in I'$, $V(a^k)$ no puede estar dentro del ε de $V(a^*)$. Para cada $k \in I'$, hay una solución X^k de (O) cuando $a = a^k$ tal que $V(a^k) = f(X^k, a^k)$. Porque cada (X^k, a^k) está en el conjunto compacto S. Como cada sucesión limitada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente, implica que la sucesión $\{(X^k, a^k)\}_{k\in I'}$ tiene una subsucesión convergente $\{(X^k, a^k)\}_{k\in I''}$, convergiendo a, digamos $(\hat{X}, \hat{a})$, dónde $I'' \subset I'$. Porque $\{a^k\}_{k\in I} \longrightarrow a^*$, la subsucesión $\{a^k\}_{k\in I''} \longrightarrow a^*$. Por consiguiente, $\{V(a^k) = f(X^k, a^k)\}_{k\in I''} \longrightarrow f(\hat{X}, a^*)$ por la continuidad de f para cada $k \in I''$ cada X^k es solución de (O) cuando $a = a^k$, por lo tanto, $V(a^*) = f(\hat{X}, a^*)$, de lo cual concluimos que $\{V(a^k)\}_{k\in I''} \longrightarrow V(a^*)$. Pero esto contradice el hecho que $V(a^k)$ no puede estar dentro de $\varepsilon > 0$ de $V(a^*)$ para cada $k \in I' \supseteq I''$. Es decir, que $V(a^k)$ converge a $V(a^*)$, probando así la continuidad de la función de valor V.

Parte (iii)

Supongamos, por contradicción, que (iii) es absurdo. Entonces X^* no es una solución para (O) cuando $a = a^*$. Esto significa que hay algunos $\hat{X} \in \mathcal{R}^n$ tal que $(\hat{X}, a^*) \in S$ y $f(\hat{X}, a^*) > f(X^*, a^*)$. Porque a^k converge a^*, la

restricción-continuidad aplicada a $(\hat{X}, a^*)$ implica que hay una sucesión $\hat{X}^k$ en $\mathcal{R}^n$ convergiendo a $\hat{X}$ tal que $(\hat{X}^k, a^k)$ satisface las restricciones para cada k. La continuidad de f implica que $f(\hat{X}^k, a^k)$ converge a $f(\hat{X}, a^*)$ y que $f(X^k, a^k)$ converge a $f(X^*, a^*)$. Consecuentemente, porque $f(\hat{X}, a^*) > f(X^*, a^*)$ tendremos $f(\hat{X}^k, a^k) > f(X^k, a^k)$, para todos k lo suficientemente grande.
Pero esto contradice el hecho de que X^k resuelve (O) cuando $a = a^k$, y esta resultado completa la prueba de la parte (iii).
Parte (iv)
Supongamos que $\{a^k\}_{k\in I}$ es una sucesión en A convergiendo a $a^* \in A$. En este parte solo será suficiente mostrar que $X(a^k)$ converge a $X(a^*)$. Supongamos por mediante contradicción, que $X(a^k)$ no converge a $X(a^*)$. Entonces para algún $\varepsilon > 0$, hay un subconjunto infinito I' de I tal que para cada $k \in I'$, $X(a^k)$ no puede estar dentro ε de $X(a^*)$. Definiendo $a^k = X(a^k)$ para cada k, la prueba es similar al procedimiento realizado en la parte (ii).

2.3. Teorema de la envolvente.

Consideremos el problema (9) cuando hay solo una restricción y supongamos que la función objetivo f y la función restricción g son continuamente diferenciables en (X, a) en un subconjunto abierto $W \times U$ de $\mathcal{R}^n \times A$. Para cada $a \in U$, supongamos que $X(a) \in W$ resuelve únicamente (9) y que la restricción $g(X(a), a)$ es vinculante para cada $a \in U$. Sea $\mathcal{L}(X, a, \lambda)$ la función Lagrangiana asociada al problema y $\mathcal{L}(X(a), \lambda(a))$ la solución, si $V(a)$ el problema asociado a la función de valor. Entonces, el teorema de la envolvente nos dice que para cada $a \in U$,

$$\frac{\partial V(a)}{\partial a_j} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j}\right|_{(X(a),\lambda(a))} \qquad j = 1, \ . \ . \ . \ , m.$$

Donde el lado derecho denota la derivada parcial de la función Lagrangiana (Varian, 1992) con respecto al parámetro a_j evaluado en el punto $(X(a), \lambda(a))$.
Demostración.
Primero, formemos el Lagrangiano para el problema de maximización:

$$\mathcal{L} = f(X, a) - \lambda[g(X, a)].$$

Por hipótesis, $X(a)$ y $\lambda(a)$ satisfacen la condición de primer orden del Teorema Kuhn-Tucker. Por lo tanto, $\forall\ a \in U$, y debido a lo vinculante de la restricción se tiene,

$$\frac{\partial f\big((X(a), a)\big)}{\partial x_i} - \lambda(a)\frac{\partial g(X(a), a)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, \dots, n \tag{10}$$

$$g(X(a), a) = 0.$$

La derivada parcial $\mathcal{L}$ de con respecto al parámetro a_j sería

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j} = \frac{\partial f\big((X, a)\big)}{\partial a_j} - \lambda(a)\frac{\partial g(X, a)}{\partial a_j}.$$

Si evaluamos esta derivada en el punto $(X(a), \lambda(a))$, obtendremos

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j}\right|_{(X(a),\lambda(a))} = \frac{\partial f\big((X(a), a)\big)}{\partial a_j} - \lambda(a)\frac{\partial g(X(a), a)}{\partial a_j}. \tag{11}$$

Si demostramos que la derivada parcial de la función de valor máximo con respecto a a_j es igual al lado derecho de (11), habremos demostrado el teorema.
Comenzamos diferenciando directamente $V(a)$ con respecto a a_j. Debido a que a_j afecta f directa e indirectamente a través de su influencia en cada variable $X_i(a)$, y usando la regla de la cadena. Obtenemos

$$\frac{\partial V(a)}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\frac{\partial f\big((X(a), a)\big)}{\partial x_i}\right]\frac{\partial x_i(a)}{\partial a_j}}_{Regla\ de\ la\ cadena} + \frac{\partial f\big((X(a), a)\big)}{\partial a_j}.$$

Ahora, considerando la condición (T_1). Obtenemos

$$\frac{\partial f\big((X(a), a)\big)}{\partial x_i} \equiv \lambda(a)\frac{\partial g(X(a), a)}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \dots, n$$

Sustituyendo en el término entre corchete, obtenemos la derivada parcial de $V(a)$,

$$\frac{\partial V(a)}{\partial a_j} = \lambda(a)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial g(X(a), a)}{\partial x_i}.\frac{\partial x_i(a)}{\partial a_j}\right] + \frac{\partial f\big((X(a), a)\big)}{\partial a_j}. \tag{12}$$

El "*truco*" final es volver nuevamente a la condición (10) y observar la segunda identidad en el sistema. Debido a que $g(X(a), a) \equiv 0$, podemos diferenciar ambos lados de esta identidad con respecto a los a_j y deben ser iguales. Como la derivada de la constante cero es cero, obtenemos

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial g(X(a),a)}{\partial x_i}.\frac{\partial x_i(a)}{\partial a_j}\right]}_{Regla\ de\ la\ cadena}+\frac{\partial g\big((X(a),a)\big)}{\partial a_j}\equiv 0$$

Reordenando esta última expresión, obtenemos

$$\frac{\partial g\big((X(a),a)\big)}{\partial a_j}\equiv -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial g(X(a),a)}{\partial x_i}.\frac{\partial x_i(a)}{\partial a_j}\right]$$

Moviendo el signo menos entre paréntesis, podemos sustituir el lado izquierdo de esta identidad por el término de suma completo en (12) para obtener

$$\frac{\partial V(a)}{\partial a_j}=-\lambda(a)\frac{\partial g\big((X(a),a)\big)}{\partial a_j}+\frac{\partial f\big((X(a),a)\big)}{\partial a_j}. \tag{13}$$

El lado derecho de (13) es el mismo que el lado derecho de (11). Así,

$$\frac{\partial V(a)}{\partial a_j}=\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j}\right|_{(X(a),\lambda(a))}$$ ■

2.4. Método analítico

En la siguiente aplicación del método analítico supongamos que una determinada empresa desea maximizar la utilidad de su inversión (*para efecto didáctico supongamos que está en soles)* que en términos financieros está regida por el modelo matemático $f(X_1,X_2)=9.6X_1-0.06{X_1}^2+10X_2$, (*función de dos variables*) el cual refleja la cantidad de productos X_1 y X_2 que se tienen que producir para alcanzar el máximo deseado, además de esto los productos se encuentran sujeta a la restricción $3{X_1}^2+2{X_2}^2\leq 13{,}950$, éste problema de optimización se traduce en términos algebraicos como

$$max\ f(X_1,X_2)=9.6X_1-0.06{X_1}^2+10X_2$$
$$sujeta\ a:$$
$$3{X_1}^2+2{X_2}^2\leq 13{,}950.$$
$$X_1\geq 0,\qquad X_2\geq 0$$

Solución

Es decir, se nos da el problema

$$\max_{X_1,X_2}\big(9.6X_1-0.06{X_1}^2+10X_2\big)$$
$$sujeta\ a: g(X_1,X_2)\equiv 3{X_1}^2+2{X_2}^2-13{,}950$$

Equivalentemente, para efecto de análisis podemos suponer $a=13{,}950$

$$\max_{X_1,X_2}\ \big(9.6X_1-0.06{X_1}^2+10X_2\big)$$
$$sujeta\ a: g(X_1,X_2)\equiv 3{X_1}^2+2{X_2}^2-a$$

Construyendo el Lagrangiano (Bonifaz & R., 2013),

$$\mathcal{L}(X_1,X_2,\lambda)=9.6X_1-0.06{X_1}^2+10X_2-\lambda\big[3{X_1}^2+2{X_2}^2-a\big]$$
$$\mathcal{L}(X_1,X_2,\lambda)=\frac{48}{5}X_1-\frac{3}{50}{X_1}^2+10X_2-\lambda\big[3{X_1}^2+2{X_2}^2-a\big]$$

Calculando las derivadas parciales de $\mathcal{L}$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X_1}=\frac{48}{5}-\frac{3}{25}X_1-6\lambda X_1=\ 0. \tag{14}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X_2}=10-4\lambda X_2=0. \tag{15}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=a-3{X_1}^2-2{X_2}^2=\ 0. \tag{16}$$

Trabajando algebraicamente cada una de las ecuaciones (14) (15) (16), tenemos

$$\frac{48}{5}-\frac{3}{25}X_1-6\lambda X_1=\ 0\Longrightarrow X_1=\frac{80}{1+50\lambda} \tag{17}$$

$$10-4\lambda X_2=\ 0\ \Longrightarrow X_2=\frac{5}{2\lambda} \tag{18}$$

$$a-3{X_1}^2-2{X_2}^2=\ 0\Longrightarrow a=3\left(\frac{80}{1+50\lambda}\right)^2+2\left(\frac{5}{2\lambda}\right)^2 \tag{19}$$

Donde los valores para X_1 y X_2 están dados por $X_1(a)=\frac{80}{1+50\lambda}$ y $X_2(a)=\frac{5}{2\lambda}$. Como se observa en la ecuación (19) no es tan fácil obtener $\lambda(a)$. Para esto recurriremos a los métodos numéricos, implementando estas ecuaciones en el programa excel, luego realizaremos un análisis desde los datos obtenidos y aterrizar este resultado en notas que servirán de insumo para la concreción de nuestra investigación.

Tabla 1: Método numérico de la aplicación para evidenciar la metodología.

n	**Fijamos "a" (s/.)**	λ	**Variación "a"**	$X_1(a)$	$X_1(a)$	$V(a)$ **(s/.)**	**Restricción (s/.)**
1	13,950.00	0,03333283	13,950.39	30,0002831	75,00113252	984,01302	13,950.39
2		**0,03333333**	**13,950.00**	**30,0000019**	**75,0000075**	**984,00009**	**13,950.00**
3		0,03333383	13,949.61	29,9997206	74,99888252	983,98715	13,949.61
4		0,03333433	13,949.23	29,9994394	74,99775757	983,97421	13,949.23
5		0,03333483	13,948.84	29,9991581	74,99663265	983,96128	13,948.84
6		0,03333533	13,948.45	29,9988769	74,99550777	983,94834	13,948.45
7		0,03333583	13,948.06	29,9985957	74,99438292	983,93540	13,948.06
8		0,03333633	13,947.67	29,9983145	74,99325811	983,92247	13,947.67
9		0,03333683	13,947.29	29,9980333	74,99213333	983,90953	13,947.29
10		0,03333733	13,946.90	29,997752	74,99100858	983,89660	13,946.90
11		0,03333783	13,946.51	29,9974708	74,98988386	983,88366	13,946.51
12		0,03333833	13,946.12	29.9971896	74,98875918	983,87073	13,946.12
13		0,03333883	13,945.73	29,9969084	74,98763454	983,85780	13,945.73
14		0,03333933	13,945.35	29,9966273	74,98650993	983,84486	13,945.35
15		0,03333983	13,944.96	29,9963461	74,98538535	983,83193	13,944.96
16		0,03334033	13,944.57	29,9960649	74,9842608	983,81900	13,944.57
17		0,03334083	13,944.18	29,9957837	74,98313629	983,80606	13,944.18
18		0,03334133	13,943.79	29,9955025	74,98201182	983,79313	13,943.79
19		0,03334183	13,943.41	29,9952214	74,98088737	983,78020	13,943.41
20		0,03334233	13,943.02	29,9949402	74,97976296	983,76727	13,943.02

En la Tabla 1, podemos observar que el método numérico empleado en excel (De Levie, 2004) es una aproximación significativa para la restricción del problema planteado.

De los resultados obtenidos producto de esta aplicación se puede afirmar que el uso de las herramientas matemáticas desde la aplicación concreta a través de los métodos cuantitativos nos acerca a la función de valor deseada.
Los agentes económicos quienes tienen que competir en un mercado que exige calidad total en bienes o servicios deben recurrir constante a un ajuste de costes para garantizar su competitividad, por lo que, se hace necesario contar con un fundamento teórico que garantice su planificación en lo que a ajustar las restricción de sus modelos se refiere.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1. Demostración del teorema Kuhn-Tucker

Se presentó la demostración detallada del teorema de Kuhn-Tucker, que es un requerimiento necesario y suficiente para agentes económicos que desean afrontar problemas de optimización, este teorema garantiza que cualquier perturbación de los parámetros considerados en costes tiene consecuencias, lo que permitirá una toma de decisiones en los niveles que estime conveniente favoreciendo su competitividad.

3.2. Demostración del teorema optimización

En esta demostramos evidenciamos un instrumento de análisis para buscar regiones del posible óptimo de cualquier modelo matemático que un agente económico pretenda optimizar con la finalidad de ajustar sus costes lo más aproximadamente posible, permitiéndole ser competitivo dentro del mercado.

3.3. Demostración del teorema de la envolvente

En esta parte la demostración del teorema garantiza que la variación del parámetro objeto de nuestro problema es equivalente a la variación de la función de valor, claro está, que en esta parte se desea garantizar que las restricciones del problema a optimizar cumplan con lo deseado por los agentes económicos, quienes aplicando el método cuantitativo idóneo se permitan ajustar el modelo que están considerando.

3.4. Aplicación del método cuantitativo

Ante la afirmación líneas arriba siguiente:
Dada la limitación que presenta el método de resolución gráfica cuando el número de variables de decisión es mayor que dos, es por ello que conviene disponer de criterios generales que garanticen la existencia de solución óptima proporcionado por de un programa matemático (software). Como caso particular de las limitaciones presentemos el siguiente modelo matemático para la generación de nuevos productos: Un productor de cerveza está interesado en mezclar tres de sus productos actuales, marcas de fábrica que son la marca M_1, M_2 y M_3 para obtener tres nuevos productos de alta calidad, que vienen a ser P_1, P_2 y P_3, los que desea vender al precio de 8, 7 y 5 soles la botella respectivamente. Sólo puede importar 2000 botellas de M_1, 4000 botellas de M_2 y 1000 botellas de M_3, siendo el precio que debe pagar de 5, 3 y 2 por cada tipo de botella. El fabricante requiere que P_1 contenga como mínimo el 80% de M_1 y como máximo el 20% de M_3. P_2 deberá contener como mínimo el 20% de M_1 y no más del 80% de M_3. P_3 no podrá contener más del 70% de la M_3. Formule el modelo de programación lineal que permitirá al fabricante hallar las mezclas que le producirán el máximo beneficio.
Traduciendo al lenguaje matemático tendremos que la función utilidad:
$U = 3(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 4(X_{21} + X_{22} + X_{23}) + 3(X_{31} + X_{32} + X_{33})$
Sujeta a las restricciones de importación y requerimiento de cada producto, será
$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 2000$
$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 4000$
$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 1000$
$X_{11} - 4X_{21} - 4X_{31} \geq 0$
$X_{11} + X_{21} - 4X_{31} \geq 0$
$4X_{12} - X_{22} - X_{32} \geq 0$
$4X_{12} + 4X_{22} - X_{32} \geq 0$
$7X_{13} + 7X_{23} - 3X_{33} \geq 0$
$X_{i,j} \geq 0\ ;\ \ i = 1, 2, 3\ , j = 1, 2, 3$

Es evidente, que la complejidad de las variables y como optimizarlas para buscar la utilidad deseada no es tarea sencilla, así, podemos inferir que bajo ciertas condiciones para el caso no lineal se tendrá un tratamiento especial cuando los agentes económicos se enfrenten a optimizar modelos matemáticos. Por ello, la importancia de la presente investigación radica en que a partir de casos particulares podemos inducir modelos con más de dos variables.

Cuando se investigó la aplicación presentada en el método analítico, se prendió mostrar su equivalente en el que solo depende de un parámetro, tal como se muestra en $f(X_1, X_2) = 9.6\left(\frac{80}{1+50\lambda}\right) - 0.06\left(\frac{80}{1+50\lambda}\right)^2 + 10\left(\frac{5}{2\lambda}\right)$, donde el teorema de la envolvente garantiza que $V(a) = f(X_1(a), X_2(a))$. Este resultado es concordante con el método cuantitativo obtenido en la Tabla 1, es decir, al obtener un $\lambda = 0.03333333$, se evidencia que numéricamente la función valor, $V(a) = V(13{,}950.00)$, donde al reemplazar este valor tendremos $f(X_1(a), X_2(a)) = f(X_1(13{,}950.00), X_2(13{,}950.00))$, es decir, $V(13{,}950.00) = f\big(X_1(13{,}950.00), X_2(13{,}950.00)\big)$. En consecuencia, de la implementación de la función valor en excel generamos una recurrencia de datos numéricos, obteniéndose una función valor dada por: $V(13{,}950.00) = f\big(X_1(13{,}950.00), X_2(13{,}950.00)\big) = \text{S/}.\,984{,}00009$, el cuál es la contribución máxima de la función valor. En este contexto diremos que la empresa necesita producir aproximadamente 30 unidades del producto X_1 y 75 unidades del producto X_2 para alcanzar una utilidad máxima de $\text{S/}.\,984{,}00009$.

4. CONCLUSIONES.

En investigaciones de ciencias económicas es conocido el teorema de la envolvente así como su enorme utilidad y aun hoy en día aparecen nuevas aplicaciones junto a otras generalizaciones, es de esperar esto debido a que en la discusión 3.1 el teorema de Kuhn-Tucker contribuye a la toma de decisión, la que, de por si tiene niveles (operacional, táctico y estratégico) que están sujeta a cambios continuos, de ahí la importancia e interés por potenciar herramientas matemáticas para la didáctica de su comprensión.

En investigaciones sobre matemática y sobre todo en teorías de optimización para todas las ciencias e ingeniería este teorema no es utilizado, gran parte de ello se debe a su desconocimiento, porque involucra movilizar teorías al plano concreto, esto se refuerza en la discusión 3.2 porque al realizar una discución sobre el mercado de los agentes económicos hacemos referencia a una región con una dinámica propia y esto se evidencia en la teoría de topología diferencial.

En esta investigación se presenta un enfoque diferente en cuanto a su aplicación y como a partir de implementar métodos numéricos en la hoja de cálculo de excel la sensibilidad de una variable afecta a las otras, la discución 3.3 evidencia esto, debido a que la variación del parámetro objeto de nuestro problema es equivalente a la variación de la función de valor, y su análisis direcciona a una mejor decisión para enfrentar los fenómenos económicos.

Los resultados obtenidos en el ordenador nos sirven para comprobar que el teorema puede servir para realizar análisis de sensibilidad y facilitar el cálculo de soluciones óptimas y como consecuencia los agentes económicos orienten su decisión.

AGRADECIMIENTO

Un agradecimiento especial a todas las personas que colaboraron directa o indirectamente con la realización de este trabajo de investigación: Mg. Guillermo Ramírez Lara, Dr. José Díaz Leyva, Dr. Amado Méndez Cruz, Dra. Rosa moreno Pachamanco, Mg. Raúl Martínez Zocón, Dr. Javier Lozano Marreros, Dr. Valerio Chávez Bonifacio, Dr. Julio López Luis, Mg. Elmo Cruzado Oliva, Dr. Wilson Maco Vásquez, Ing. José Zavala Guevara, Ing. Carlos Alayo Ninaquispe.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Anton, H.; Rorres, C. 2013. El ejemplo del método numérico. Numerical Methods. Elementary Linear Algebra. Disponible en: https://www.academia.edu/33145536/_Howard_Anton_Chris_Rorres_Elementary_Linear_Alg_BookZZ_org_pdf?email_work_card=view-paper.

Bonifaz, F.; Lama, R. 2013. Optimización dinámica y teoría económica. 1era Edition. Editorial centro de Investigación de la Universidad del Pacífico. Lima, Perú. 217 pp.

Cerdá, J. 2013. Weierstrass i l'aproximació uniforme. Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques 85: 62-76.

Herrera, P.; Ballestero, G. 2019. Análisis de la cualificación de las restricciones en el teorema de Kuhn-Tucker. Revista de Investigación en Modelos Matemáticos aplicados a la Gestión y la Economía. 34: 26-39.

Herrera, P.; Ballestero, G. 2019. El ejemplo analítico. Revista de Investigación en Modelos Matemáticos aplicados a la Gestión y la Economía. Disponible en: http://www.economicas.uba.ar/wp-content/uploads/2016/04/Herrera-Ballestero.pdf.

Jehle G.; Philip R. 2011. Advanced Microeconomic Theory: Editorial British Library Cataloguing. 3era Edition. Ashford, Great Britain. 673 pp.

Karlsson, M.; Ygge, F.; Andersson, A. 2007. Market-based Approaches to Optimization. School of Mathematics and Systems Engineering. 21: 16-18.

Levie, R. 2004. Advanced Excel for Scientific Data Analysis: Editorial Congress Cataloging. New york, United States of America. 630 pp.

Varian, H. 1992. Microeconomic analysis: Editorial Congress Cataloging. 3ra Edition. Editorial Nortón & Company. New york, United States of America. 559 pp.

Schofield, N. 2013. Mathematical Methods in Economics and Social Choice: Editorial Saint Louis. 2da Edition. Missouri, United States of America. 269 pp.