

## Fundamentos de la Transposición Didáctica del Cálculo Fraccionario para su incorporación en el Plan de Estudios de la Escuela Profesional de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional de Trujillo

Fundamentals of the Didactic Transposition of Fractional Calculation for its incorporation in the Syllabus of the Professional School of Mathematics in the Faculty of Physical and Mathematical Sciences by the National Trujillo University

Higidia Rosa Moreno Pachamango\*

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n – Ciudad Universitaria, Trujillo, Perú.

\*Autor correspondiente: [rhmp61@gmail.com](mailto:rhmp61@gmail.com) (H. Moreno)

DOI: [10.17268/rev.cyt.2021.01.09](https://doi.org/10.17268/rev.cyt.2021.01.09)

---

### RESUMEN

La investigación tuvo como objetivo aplicar la metodología de la Transposición Didáctica en el Cálculo Fraccionario, para ser implementada como nueva experiencia curricular del plan de estudios de la escuela profesional de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional Trujillo. El método de investigación fue descriptivo aplicando la técnica, análisis documental, permitió analizar el estado de arte del Cálculo Fraccionario como conocimiento científico para ser considerado un saber a enseñar a través de la aplicación de la Transposición Didáctica. Como resultado, se estableció que el Cálculo Fraccionario es una teoría matemática científica sostenible para ser enseñada y aprendida en el pregrado de la escuela profesional de Matemáticas, por ende implementado en el plan de estudios correspondiente, debido a que el estudiante pueda establecer analogías entre el cálculo clásico y el cálculo fraccionario, potenciando su trabajo autónomo y una cultura investigativa, exigida en el perfil de egreso del licenciado en matemáticas y además por las múltiples aplicaciones que tiene esta teoría en las diversas áreas del conocimiento científico y tecnológico.

**Palabras clave:** Transposición Didáctica; Cálculo Fraccionario; Diseño curricular,

---

### ABSTRACT

The objective of the research was to apply the methodology of the Didactic Transposition in the Fractional Calculation, to be implemented as a new curricular experience of the syllabus of the professional school of Mathematics in the Faculty of Physical and Mathematical Sciences by the National Trujillo University. The research method was descriptive applying the technique, documentary analysis, that allowed to analyze the state of the art of Fractional Calculation as a scientific knowledge to be considered a knowledge to teach through the application of the Didactic Transposition. As a result, it was established that Fractional Calculation is a sustainable scientific mathematical theory to be taught and learned in the undergraduate of the professional school of Mathematics, therefore implemented in the corresponding curriculum, because the student can establish analogies between the Classic calculus and fractional calculus, improving their autonomous work and a research culture, required in the discharge profile of the graduate in mathematics and also by the multiple applications that this theory has in the various areas of scientific and technological knowledge.

**Keywords:** Didactic Transposition; Fractional Calculation; Curricular design

---

### 1. INTRODUCCIÓN

El Perú como país latinoamericano, en educación superior está pasando por un proceso lento de adaptación a la Ley Universitaria N° 30220 promulgada en el año 2014, donde el Ministerio de Educación (MINEDU), asume la rectoría de la política de aseguramiento de la calidad en la educación superior universitaria, creando la Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria (SUNEDU) e introduciendo el

licenciamiento obligatorio y renovable de las universidades. nacionales y particulares a nivel del estado peruano, obligando a todas las universidades adecuarse para responder a las expectativas de cambio actuales, que lleva entre otras acciones a realizar la revisión y actualización de currículos de las respectivas especialidades que las universidades ofertan.

La Universidad Nacional de Trujillo (UNT), en su proceso de adaptación de la gestión académica a la Ley Universitaria 30220, inicia su reforma curricular en el año 2015, con la formulación y presentación del Modelo Educativo de la UNT (MOEDUNT) (2016), documento misional que establece los fundamentos filosóficos y pedagógicos para la formulación, implementación y desarrollo del currículo basado en el enfoque por competencias para una formación integral del futuro profesional egresado de la Universidad Nacional de Trujillo. Esta reforma, trajo como consecuencia la revisión y reformulación del documento Currículo, en particular del Currículo de la Escuela Profesional de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, que pasó de ser un currículo por objetivos a un currículo con enfoque por competencias.

Investigar y proponer actualizaciones curriculares que respondan a las expectativas de formar al Licenciado en Matemáticas con fortalezas en áreas de la matemática, que constituyen pilares de esta ciencia, como la experiencia curricular Análisis Matemático, es competencia del docente universitario de esta especialidad, quien propone en este caso, la enseñanza, aprendizaje y los contenidos fundamentales de la teoría denominada Cálculo Fraccionario, como conocimiento factible de ser considerado en el plan de estudios, a fin de ser enseñado y aprendido por estudiantes de la especialidad de matemáticas o afines de pregrado de nuestra universidad, teoría matemática que representa un nuevo paradigma del conocimiento científico y es una generalización del cálculo clásico o cálculo de orden entero.

Según Tenreiro, J., Galhano, A., Trujillo, J. en su obra “Science metrics on fractional calculus development since 1966” (2013), señalan que el desarrollo y empleo del Cálculo Fraccionario es tan amplio y consideran que, en un futuro cercano, no existirá área científica donde no se involucre al Cálculo Fraccionario, sin embargo, en ámbitos académicos universitarios de pregrado, no hay referencias de experiencias curriculares que consideren este conocimiento en la formación de futuros profesionales en matemáticas o ciencias afines.

La incorporación del Cálculo Fraccionario como nuevo conocimiento a ser considerado en el currículo de la Escuela Profesional de Matemáticas, se sustenta a través de la Didáctica de la Matemática, la misma que cuenta con investigaciones en pleno desarrollo, siendo uno de ellos, el enfoque Antropológico de Chevallard, el cual sirve de marco teórico a la presente investigación por suponer una ruptura con el punto de vista clásico en didáctica, al exigir modelizar el conocimiento matemático que se enseña y aprende en una institución educativa. Así Artigue (1995) en su obra “La enseñanza de los Principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos”, desarrolla la teoría de la Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, y establece, en un esquema para la investigación e innovación de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, primero se tiene que conceptualizar científicamente los saberes matemáticos, y estos sistemáticamente deben pasar por procesos adaptativos para ser conceptos enseñados; además Chevallard (1997), en su obra “La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado”, como metodología de investigación y de enseñanza, fundamenta la legitimación de los contenidos de la enseñanza y la diferencia entre el saber enseñado y el saber científico, que permite seleccionar los objetos matemáticos a enseñar, así como analizar y describir las transformaciones que va sufriendo el conocimiento matemático cuando tiene que pasar del medio científico en donde fue concebido a un medio pedagógico donde debe ser enseñado.

Los autores Chevallard, Bosch y Gascón (1997), Chevallard (1999) y Font (2011), afirman que la Transposición Didáctica es un conjunto de transformaciones que sufre un saber con el fin de ser enseñado, es decir, es un proceso y no un método de enseñanza, es la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento a ser enseñado. Por otro lado, Vargas, C.; Isabel, M. (2000), mencionan que Yves Chevallard, en su obra transposición didáctica, establece otra característica de la transposición didáctica, la relación de tres aspectos importantes para la enseñanza de la matemática: estudiante, conocimiento y docente; hace hincapié de la labor docente en aula, al elaborar procesos inversos al que realiza el científico matemático, con el propósito de recontextualizar y adaptar el conocimiento a problemas de la realidad del estudiante.

Desde esta perspectiva, la Transposición Didáctica es una metodología idónea para el análisis didáctico e incorporación de los contenidos y aplicaciones científicas de la Derivada de Orden Fraccionario (Cálculo Fraccionario) en el currículo del programa de estudios de matemática, permitiendo proporcionar pautas para el análisis y evaluación de la propuesta en forma descriptiva de los contenidos o saberes a enseñar, dejando establecido que no representa únicamente el dominio de una lista de conceptos, técnicas y algoritmos; resulta muy trascendente y útil la construcción de estrategias didácticas cuya finalidad es interpretar de manera

reflexiva y crítica las herramientas que ofrece el Cálculo Fraccionario: Derivada Fraccionaria e Integral Fraccionaria.

Por lo que nuestra investigación se ubica dentro del enfoque de investigación descriptiva cuyo fin es realizar un análisis holístico de los objetos matemáticos del Cálculo Fraccionario a través de la Transposición Didáctica para dotarle de un formato didáctico con el propósito de ser enseñado por docentes de la especialidad de matemáticas y aprendidos por los futuros Licenciados en Matemáticas. En consecuencia, el enfoque de nuestro trabajo será la articulación de dos teorías: La Transposición Didáctica y el Cálculo Fraccionario, para tomar en cuenta las posibles modificaciones didácticas de la Derivada e Integral Fraccionaria, como generalización matemática de la Derivada de orden Entero. Ross, (1975).

Este análisis, justifica formular la importancia de incluir y desarrollar el nuevo conocimiento Cálculo Fraccionario a nivel del Proyecto Curricular de pregrado del Programa de Estudios de Matemáticas de nuestra universidad, es importante tener una concepción holística del mundo matemático, para proponer e incorporar el estudio de nuevos objetos matemáticos en el currículo de Matemáticas que respondan al perfil de egreso del Licenciado en Matemáticas, así mismo comprender los procesos de adaptabilidad del objeto matemático en estudio desde su concepción científica, hasta su formulación en el proceso de enseñanza aprendizaje, para entender la implicancia de dos conceptos esenciales en el desarrollo del Análisis Matemático: derivada entera y derivada fraccionaria y por ultimo contribuir a la mejora del documento curricular al poner en evidencia que los contenidos matemáticos si pueden caer en la obsolescencia y por tanto se requiere de su actualización o reformulación flexibilidad del Currículo a la evolución del conocimiento matemático.

Con la finalidad de orientar la presente investigación, se formula las siguientes interrogantes:

- ¿Cuáles son los elementos académicos-curriculares-técnicos que permitan tomar la decisión de incorporar el Cálculo Fraccionario como experiencia curricular en el plan de estudios del Programa de Estudios de Matemáticas?
- ¿Cuáles son las interpretaciones, adaptaciones y /o transformaciones didácticas que se deben formular al objeto matemático Derivada Fraccionaria, para ser objeto de aprendizaje – enseñanza en el Pregrado del Programa de Estudios de Matemáticas?

El Objetivo General fue aplicar la Metodología de la Transposición Didáctica en el Cálculo Fraccionario, para que los contenidos puedan ser considerada como experiencia curricular del Plan de Estudios de la Escuela Profesional de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, siendo los objetivos específicos: Identificar y describir los elementos académicos-curriculares-técnicos que permitan tomar decisiones para la incorporación de los contenidos (conocimientos) del Cálculo Fraccionario en el Currículo del Programa de Estudios de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional de Trujillo y describir las interpretaciones, adaptaciones y /o transformaciones didácticas que se deben formular al objeto matemático Derivada Fraccionaria, para ser objeto de Enseñanza-Aprendizaje en el Programa de Estudios de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional de Trujillo.

Dejamos establecido que la Didáctica de la Matemática, es la disciplina que nos acerca más a los propósitos de esta investigación, al tener una mirada epistemológica, didáctica y pedagógica de las implicancias de incorporar este objeto matemático como materia de enseñanza y aprendizaje a partir de la construcción del diseño curricular del programa de estudios de Matemáticas, fundamentado en teorías expuestas por Coll (1986), Pozo y Postig (1993), Zabalza (2012), Icarte y Labate (2015), Cammilloni (2017) entre otros.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

La investigación se basó en la aplicación de la Transposición Didáctica en el Cálculo Fraccionario: Derivada e Integral Fraccionaria, objetos de estudio y su incorporación en el Currículo de la especialidad de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. El estudio del Cálculo Fraccionario desde el punto de vista de la ciencia formal se hizo en base al método axiomático, por ser base para la construcción de cualquier conocimiento matemático, estableciendo un conjunto de reglas de razonamiento, enunciados y postulados; desde el punto de vista de la Didáctica de la Matemática como ciencia social se analizó el diseño curricular del programa de Estudios de Matemáticas y se complementó con los principios de la Transposición Didáctica, para enunciar y formular los contenidos a ser enseñados de la teoría del Cálculo Fraccionario. Por ello, la investigación realizada, está enmarcada en la metodología de investigación descriptiva tipo documental, con base en el método axiomático y los principios de la Transposición Didáctica.

De acuerdo a Vickery (1970), mencionado por Clauso, (1993), señala que: Los métodos de recuperación, entre lo que se cuenta el análisis documental, responden a tres necesidades informativas de los usuarios, en primer

lugar, conocer lo que otros pares científicos han hecho o están realizando en un campo específico, en segundo, lugar conocer segmentos específicos de información de algún documento en particular; y por último conocer la totalidad de información relevante que exista sobre un tema específico. Peña y Pirella, (2007), Así mismo, Pinto (1992), explica que el análisis documental es el “Complejo de operaciones que afectan al contenido y a la forma de los documentos originales, para transformarlos en otros documentos representativos de aquellos, que facilitan al usuario su identificación precisa, su recuperación y su difusión.

En este sentido, la investigación se realizó en función de la revisión documental de los fundamentos teóricos de la Transposición Didáctica, teoría propuesta por Ives Chevallard (1997), como también se consultó libros y documentos que evidencian la construcción de la teoría del Cálculo Fraccionario, donde muchos de sus resultados son muy actuales, toda vez que es una teoría que está en constante actualizaciones derivadas de sus múltiples aplicaciones en el ámbito social, económico y tecnológico, tal como los aportes de Tenreiro, Galhano, Trujillo, (2013); Tenreiro, Kiryakovab., Mainardini, (2011); Tenreiro, Trujillo, (2013). Así mismo se revisaron documentos propios del Programa de Estudios de Matemáticas, como el Currículo, para evaluar contenidos y propuestas metodológicas establecidas en su respectivo plan de estudios para la enseñanza y aprendizaje de sus experiencias curriculares señaladas.

El trabajo conllevó a realizar actividades a través de las siguientes fases:

1. Fase Exploratoria, en la cual se dieron los siguientes procesos
  - Identificación del problema
  - Planteamiento de la(s) pregunta(s) de investigación
  - Revisión de las perspectivas teóricas (Investigación documental): Transposición Didáctica, Cálculo Fraccionario y Diseño Curricular.
2. Fase de Planificación, donde se:
  - Redefinió el problema y las preguntas de investigación
  - Seleccionó la estrategia de investigación (Investigación documental, descriptiva de corte cualitativa).
3. Fase de recogida y análisis de información:
  - El Currículo del Programa de Estudios de Matemáticas, su proceso de construcción y elaboración, donde se obtuvo los puntos problemáticos que presentaba este documento.
  - Análisis de la información del Cálculo Fraccionario y de la Transposición Didáctica.
  - El rigor del análisis intensivo de la información y las conclusiones
4. Fase de elaboración del informe; en esta fase se estructuró el informe a presentar y se efectuó la redacción del mismo.

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### 3.1. El Diseño Curricular

Tomemos en cuenta el Primer Objetivo específico de la presente investigación: *O<sub>1</sub>: Identificar y describir los elementos académicos-curriculares-técnicos que permitan tomar decisiones para la incorporación del Cálculo Fraccionario en el Currículo del Programa de Estudios de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional de Trujillo.*

Una variante de gran trascendencia para el logro de los objetivos en nuestra investigación, fue el *diseño curricular*, considerado por Álvarez de Zaya (1997) como el documento que ha sido reflexionado, pensado y adecuado al enfoque educativo que la Institución Educativa desea aplicar para su gestión académica. Así mismo Álvarez de Zaya, expresa que el diseño curricular es el primer paso de todo proceso formativo, en él se traza el modelo a seguir y se proyecta la organización, planificación del modelo a seguir y se proyecta la planificación, organización, ejecución y evaluación, buscando que este sea flexible y adaptable al perfil del egresado que se desea alcanzar.

Según Sutcliffe et al (2005), mencionado por Icarte y Lávate (2016), señala que el Currículo basado en competencias se materializa en un conjunto de asignaturas que tiene como objetivo desarrollar en los estudiantes una serie de capacidades solicitadas por la sociedad en la cual se desenvolverá y cuyo desempeño va a ser evaluado. Este enfoque permite expresar mejor las capacidades que deben disponer los egresados al momento de culminar su formación para luego insertarse en el ámbito laboral, en la medida que los empleadores tienen mayor información de lo que los egresados son capaces de hacer bajo la garantía de la institución que los formó.

Según Barros (2008), menciona que Vargas e Isabel (2008), determinan que el análisis de un modelo de diseño curricular debe partir de la realidad para establecer sus bases en función de condiciones económicas, estructura

social, políticas educativas y tradiciones culturales, de donde se obtendrá los fundamentos pedagógicos, filosóficos, socio cultural, psicológico y epistemológicos del mismo. Todos estos elementos ubicados en un momento histórico, determinan los fines de la educación y el modelo de hombre que buscamos formar. Las bases del Currículo son concebidas como las aspiraciones de formación humana dentro de un contexto social de donde se obtiene las competencias deseadas.

El diseño curricular es eminentemente investigativo de corte cualitativo, se inicia y termina en el perfil de egreso, los cuales se formulan como producto de los objetivos educacionales, que viene a ser los rasgos que tiene un profesional evaluado en función de sus desempeños en el campo laboral. del perfil de egreso se obtienen las competencias generales y específicas y en función de ellas se diseñan las experiencias curriculares como respuesta a las necesidades que la sociedad plantea a la comunidad académica y es en este proceso donde surge la necesidad de incorporar nuevos contenidos (conocimientos) al mundo académico acorde a los avances de la tecnología y la ciencia, procesos que se establecen en la siguiente propuesta de diseño de un currículo con enfoque por competencias. Ycarte y Lávate (2016).

El Modelo Educativo de la Universidad Nacional de Trujillo (2016), asume un diseño curricular con enfoque por competencias, dejando atrás el modelo por objetivos cuya epistemología tradicional asumía el conocimiento desde el ámbito únicamente cognitivo; el diseño actual asume el conocimiento desde el enfoque complejo que lo aborda como un proceso a la vez biológico, cerebral, espiritual, lógico, cultural, social e histórico, el cual se enlaza con la vida humana y su desenvolvimiento en la sociedad, Morin (1994), Tobón (2017). Desde esta concepción, la construcción del conocimiento debe tener en cuenta al ser humano y su relación con la vida, el mundo y la sociedad.

En la configuración del *diseño curricular*, según Díaz (2002). se distinguen los elementos fundamentales: Objetivos Educacionales, Perfiles (Egreso e Ingreso), Competencias (Generales y Específicas), Mapa Curricular, Planes de Estudio y Matriz de Articulación entre Experiencias Curriculares y Competencias, que permiten la construcción del currículo con enfoque por competencias, construcción que se caracteriza por ser eminentemente participativo tanto de la comunidad universitaria como de representantes de la sociedad, buscando tener un alto grado de integración entre teoría y práctica. Por otro lado, la configuración del *diseño curricular*, es una construcción con fundamento sistémico (procesos), donde todos los elementos curriculares se integran en un todo, teniendo en cuenta sus interacciones reciprocas en una constante retroalimentación a través de planes de mejora.

### 3.2. Significado referencial de la Transposición Didáctica

Entendemos por significado referencial o análisis documental, las investigaciones realizadas acerca de la Transposición Didáctica y del Cálculo Fraccionario desde el aspecto teórico y aplicativo, que nos sirvió como marco para elaborar el sustento epistemológico, pedagógico y didáctico de considerar el estudio del Cálculo Fraccionario como componentes del Currículo del Programa de Estudios de Matemáticas.

Para nuestra investigación, el significado referencial, forma parte del significado holístico del objeto matemático y la metodología didáctica aplicado en el objeto matemático referido, el cual se construye tomando como base el estudio histórico, epistemológico, así como el estudio de los diferentes contextos donde es aplicado.

De la mayoría de los documentos revisados rescatamos el aspecto histórico, epistemológico del Cálculo Fraccionario, lo cual nos permitió particularizar el aspecto holístico del mismo para la generalización de la Derivada Fraccionaria y evidenciar las publicaciones que muestran la tendencia de esta teoría en el futuro.

Para la Transposición Didáctica, se procedió de la misma manera que se trabajó el objeto matemático, se consideró investigaciones acerca de la aplicación a otras áreas del conocimiento y el impacto de la Transposición Didáctica en la educación superior universitaria, lo que permitió establecer los aportes (nuevos contenidos) acordes a las nuevas tendencias de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en ámbitos universitarios.

#### 3.2.1. Primer acercamiento al Cálculo Fraccional

A través de la historia del Cálculo Fraccionario, Miller and Ross, B. (1993), la idea de generalizar la integral y la derivada de orden entero para integrales y derivadas de orden arbitrario, surgió con el nacimiento de la propia derivada clásica. Fue el propio Leibniz al inventar la notación de la  $n$ -ésima derivada  $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , esto motivo la inquietud del Marques L'Hospital al preguntarle: ¿qué sucedería en el caso de ser sustituida  $n$  por  $\frac{1}{2}$ ?, años más tarde sucede la misma inquietud con la integral  ${}_a I_x^n$  para finalmente, en el ambiente matemático ampliarse las preguntas anteriores a la interrogante: ¿Puede ser extensible los valores de  $n$  al conjunto de los números racionales, irracionales e incluso complejos?. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, de allí que la denominación de Cálculo Fraccionario comprende el campo de los reales o complejos, por ello también es

denominado Cálculo de Orden no Entero. Según Guía et al (2015), esta es un área del análisis matemático que se ha constituido en soporte teórico de gran potencial por sus aplicaciones, demostrados en numerosos campos de la ciencia y de ingeniería al proporcionar varias herramientas potencialmente útiles para la solución de ecuaciones diferenciales e integrales y otros problemas que implican funciones especiales tanto de la matemática como de la física. Kilbas, Srivastava, Trujillo (2006).

En la Universidad Nacional de Trujillo, los estudiantes de Ciencias Físicas y Matemáticas y de Ingeniería de nivel de pregrado, conocen los operadores diferenciales  $\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, \frac{d^3}{dx^3}, \dots$  y operadores integrales  $I^1 f, I^2 f, I^3 f, \dots$  y muestran mucha extrañeza cuando se les habla del orden de diferenciación e integración no entero de estos operadores ¿Por qué no operar con un operador diferenciación de orden  $\frac{1}{2}$ , esto es,  $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}, I^{\frac{1}{2}}$ , o  $\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}, \frac{d^{\sqrt{2}}}{dx^{\sqrt{2}}}, I^{\sqrt[3]{2}} f$ ? Responder a la pregunta es tomar en cuenta el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, con ello nos encontramos que  $\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}$  es la notación de una integral indefinida. Por otro lado, los docentes muy acostumbrados como estamos a representar la derivada o integral como pendientes de rectas tangentes o áreas, nos encontramos que en el Cálculo Fraccionario el operador diferenciación aún no tiene representación geométrica, por lo tanto, este pasa a ser considerado como un problema abierto para la matemática. De esta manera, docentes y estudiantes que estén dispuestos a prescindir de una representación geométrica de estos operadores, pronto nos daremos cuenta que los operadores fraccionarios son tan reales como los de orden entero, y por lo tanto una nueva dimensión en matemáticas surge cuando el orden  $n$  del operador  $\frac{d^n}{dx^n}$ , se transforma en un parámetro arbitrario, ya sea real o complejo, Oldham & Spanier (1970).

De acuerdo a lo expuesto, dar valores reales al índice de iteraciones  $n$  del operador derivada  $D = \frac{d}{dx}$  y del operador integral  $\int f$ , fueron punto de inicio para construir las definiciones fundamentales del Cálculo Fraccionario. Para llevar a cabo este proceso de generalización en primer lugar debemos de tener en cuenta que la  $n$ -ésima derivada de una función  $f$  está definida recursivamente por

$$D^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^n(x) \tag{1}$$

$$D^n f(x) = D[D^{n-1} f(x)], n \in \mathbb{Z}^+ \tag{2}$$

En el mismo sentido definimos la  $n$ -ésima Integral a través de una integral iterada la cual es múltiples veces evaluada sobre una misma variable.

$${}_a I_x^n f(x) = \int_a^x {}_a I_x^{n-1} f(x) \tag{3}$$

Donde  $D^0 f(x) = I^0 f(x)$ .

Si nos remitimos a la historia del Cálculo Fraccionario, Cauchy mostró que la integral iterada de orden  $n$  se puede representar mediante una única integral dada por

$${}_a I_x^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \forall n \geq 1 \tag{4}$$

Conocida como la fórmula de Cauchy para una integral iterada de orden  $n$  y esta ecuación permite generalizar la noción de Integral Iterada de orden  $n$ , natural a Integral fraccionaria de orden  $\alpha \in \mathbb{R}^+$

### 3.2.2. Tendencias e Importancia del Cálculo Fraccionario

De acuerdo a Tenreiro, Galhano, Trujillo (2013) en el paper Science Metrics On Fractional Calculus Development Since 1966 (2013), dan el número de investigadores en el área utilizando indicadores de medida de ciencia y tecnología propuestas por Gordon E. Moore y las leyes de Alfred J. Lotka, dan a conocer las tendencias en cuanto a frecuencia de publicaciones científicas y producciones de hardware para la industria utilizando Cálculo Fraccionario. Desde 1966 hasta 2012, la tendencia de producción bibliográfica de Cálculo Fraccionario de libros con autor y libros editados es de comportamiento exponencial y se sustenta en considerar la producción de libros en intervalos de tiempos de 10 años, salvo el último intervalo que es de 7 años y está dada por

$$D_a = e^{(0.0633912t-125.831)}; D_e = e^{(0.0987265t-197.821)}$$

donde  $D_a$  denota la densidad del número de libros con autor publicado por año y  $D_e$  la densidad del número de libros con editor por año que aun teniendo diferentes tasas de crecimiento la tendencia exponencial revela un buen índice de Correlación

$$R_1 = 0.95 \text{ y } R_2 = 0.93$$

Esta ligera diferencia muestra que tales índices describen por un lado las manifestaciones parciales de la realidad, y por otro lado ambos índices apoyan con firmeza la idea inspiradora de que el Cálculo Fraccionario es una teoría de futuro prometedor en la matemática y en aplicaciones a otras ramas de la ciencia.

En cuanto a la tendencia o frecuencia de conferencias y tertulas especiales en Cálculo fraccionario, es más complicado, pues se presentan más problemas sobre el proceso de cuantificar el número de conferencias y temas relacionados a esta teoría. Sin embargo, se puede considerar el modelo de tendencia de la “densidad” entre el número de publicaciones de conferencias ( $D_c$ ) y número de temas especiales ( $D_s$ ), está dado por:

$$D_c = e^{(0.0986t - 197.2)} \text{ y } D_s = e^{(0.1498t - 299.82)}$$

con índices de correlación  $R_1 = 0.89$  y  $R_2 = 1.00$

De esta manera se evidencia la tendencia creciente de eventos del Cálculo Fraccionario que apoyan el optimismo para un futuro próximo, tal como muestra Tenreiro y Trujillo, (2013). en su publicación intitulada “On Development of Fractional Calculus During the Last Fifty Years-List of Books”.

### 3.3 Transposición Didáctica: conocimiento científico a conocimiento enseñado

Tomaremos en cuenta el segundo objetivo específico de la presente investigación.  $O_2$ : *Describir las interpretaciones, adaptaciones y/o transformaciones didácticas que se deben formular al objeto matemático Derivada Fraccionaria, para ser objeto de enseñanza-aprendizaje en el Programa de Estudios de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional de Trujillo.*

Según Chevallard (2009), comprender con profundidad una problemática de la didáctica de la matemática, implica en primer lugar, estudiar el contenido matemático involucrado, lo cual expresa que el conocimiento matemático visto desde un punto didáctico específico es un camino de acceso para el estudio de los fenómenos didácticos subyacentes. Se deduce de esto, que el conocimiento matemático es problemático en si mismo para la didáctica, punto de vista totalmente contrario al tradicionalmente adoptado, pues desde siempre se consideró a la matemática, ser lo suficientemente coherente, rigurosa y formal como para cuestionar su fundamento y su simbología.

Al postulado de Chevallard (1997) “El conocimiento matemático sufre sucesivas adaptaciones desde su funcionamiento dado por la comunidad matemática, hasta el que se creará para ser enseñado en las instituciones”, el autor le ha llamado *Transposición Didáctica* de un “saber sabio” para devenir en un “saber que se tiene que enseñar” y posteriormente, un “saber enseñado”, estableciendo de esta manera la necesidad fundamental para la didáctica de problematizar el conocimiento matemático que se enseña.

Por otro lado, de acuerdo a Duval (1999), la conceptualización de un conocimiento matemático, como son sus diferentes representaciones y sus diferentes registros, en el ámbito gráfico, algebraico o lenguaje natural, da una representación semiótica a la relación entre distintos sistemas de signos que representan al mismo objeto. La distinción entre un objeto y su representación es un punto estratégico para el aprendizaje de la matemática, por ello deducimos que las representaciones no solo son necesarias para la comunicación, son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento y del aprendizaje.

Desde contexto, el Cálculo Fraccionario es el conocimiento matemático científico, donde el manejo teórico y aplicativo de los operadores fraccionarios son de competencia de los matemáticos e ingenieros que se dedican a la investigación, pero también son estos profesionales los que ejercen docencia universitaria y los más llamados a procurar incorporar estos conocimientos en los planes de estudio de los programas académicos con el fin de ser desarrollados en aulas universitaria, custodiando no sólo la consistencia del conocimiento matemático, sino también sus representaciones y diferentes representaciones y registros.



Figura 1. Transposición de Cálculo Fraccionario

Por otro lado, proponer la enseñanza de la teoría del Cálculo Fraccionario, en la Escuela Profesional de Matemáticas para el pregrado, exige ciertos cambios en el proceso de enseñanza de los conocimientos matemáticos, esto se constituye en todo un desafío para el docente, lo que implica incorporar en sus prácticas de enseñanza no solamente el dominio del contenido disciplinario puro, sino que exige competencias asociadas al conocimiento didáctico para conducir el conocimiento disciplinario hacia el saber didactizado con la finalidad de cumplir con el acto educativo, en base a una formación crítica, reflexiva y propositiva, formando cuadros académicos, técnicos y de dirección para los diferentes sectores de producción de la sociedad, Zabalza (2000), Zabalza (2009).

Sabemos que el Cálculo Fraccionario como saber científico es desarrollado por investigadores caracterizados por utilizar la notación matemática de los operadores fraccionarios de acuerdo a sus propósitos y que se evidencian en las publicaciones analizadas, no existe una convención definida de las representaciones simbólica de los operadores fraccionarios, sin embargo, esta accionar no afecta las definiciones de los mismos, por ser caracterización propia del lenguaje matemático, ya que permiten establecer las tres actividades cognitivas elementales ligadas a la *semiosis*: **a.** La representación identificable del objeto matemático. **b.** Accesible a realizar transformaciones de esta representación en el mismo registro donde ha sido formado. **c.** La conversión de una representación.

Partiendo de este contexto didáctico, establecemos la relación con el término introducido por Chevallard: *Transposición Didáctica*, y su relación con el *Triángulo Didáctico*, empleado para establecer la relación del acto educativo entre el docente, conocimiento y estudiante. Chevallard (2013) donde un contenido del saber para nosotros el Cálculo Fraccionario, que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas, que lo van hacer apto para considerarlo un objeto de enseñanza (Selección del contenido del Cálculo Fraccionario adecuados para la enseñanza) y se evidencia, cuando el objeto de saber se incorpora al plan de estudio del programa respectivo (Sumilla-Sílabo-Sesiones de clase).

La fluidez entre los vértices del *Triángulo Didáctico* da lugar a una variante del mismo, si del vértice del *saber científico* o saber sabio (Cálculo Fraccionario), proyectamos otra arista, transformamos esta figura plana en un poliedro regular que denominamos Pirámide Didáctica, en cuyo vértice originado se encuentra el saber a enseñar o saber didactizado que corresponde al esquema central del modelo de *Transposición Didáctica*, adaptado del modelo de Fernando da Rosa (1996) y de Buchelli (2009). Figura 2.

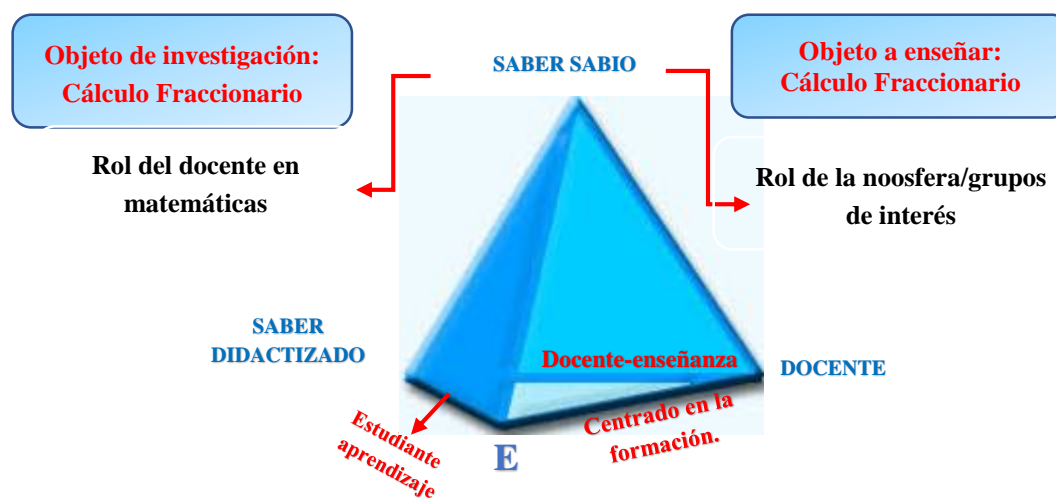
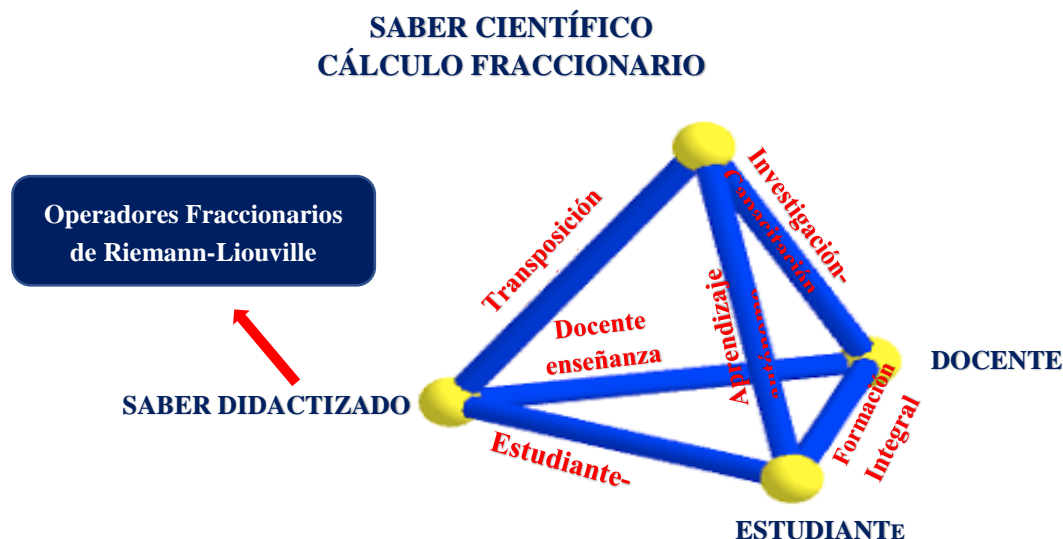


Figura 2. Pirámide Didáctica del Cálculo Fraccionario

En el vértice del *saber didactizado* se encuentran los conocimientos seleccionados que son transformados a lenguajes propios de proyectos educativos (programas curriculares) para su ubicación en libros, difusión y enseñanza en aula, espacio donde se da el *saber enseñado* con la participación del docente, quien tiene que desplegar una serie de estrategias para que el estudiante descubra y construya los saberes esperados, como resultado de la articulación del *saber conocer*, *saber hacer* y *saber ser*; es el vértice desde donde se formula la teoría del Cálculo Fraccionario con los operadores fraccionarios: derivada e integral fraccionaria de Riemann-Liouville, como resultado de establecer su pertinencia a través de la participación de docentes de matemáticas, especialistas en didáctica u otros profesionales, que diseñan y organizan los saberes científicos para formar parte del saber didactizado.

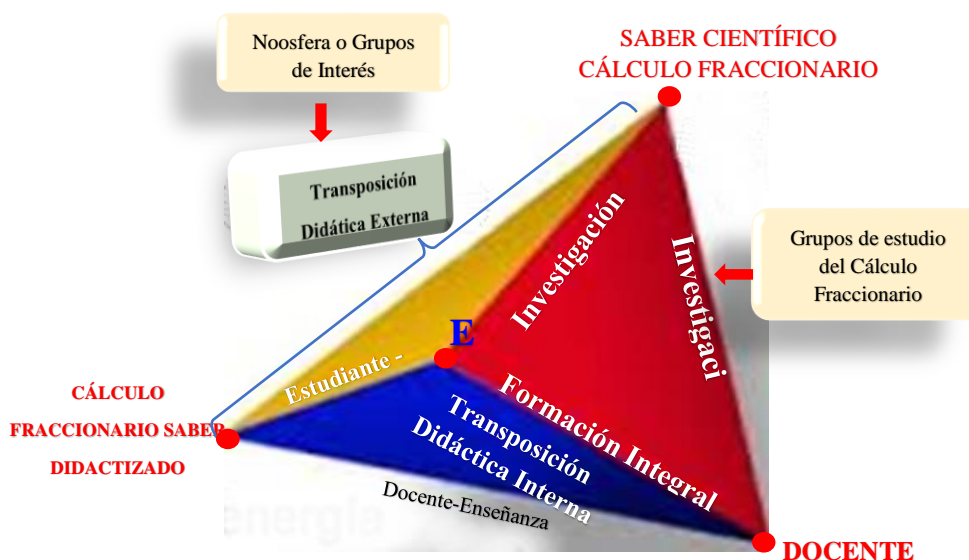


Esta es la variante con respecto al modelo de Buchelli (2009), quien establece la equiparidad entre el *saber a enseñar* y el *saber didactizado*. El *Saber a Enseñar* es el conjunto de saberes científicos seleccionados por especialistas en matemáticas, para formar parte de la literatura propia de la especialidad o afines. El *saber didactizado*, es el conjunto de saberes científicos seleccionados por expertos en didáctica en matemáticas y otros especialistas de las diferentes áreas del conocimiento, cuyo propósito es presentar los saberes científicos en un plano didáctico a través de un lenguaje geométrico, algebraico y analítico claro y entendible que permita aplicar y adaptarlos a la solución de problemas del ámbito científico y tecnológico. Así mismo, al considerar el vértice del saber didactizado, se determinan relaciones entre los 4 vértices y 6 aristas del poliedro tal como se indica en la fig. 3



**Figura 3.** Relaciones establecidas en la Pirámide Didáctica del Cálculo Fraccionario

De acuerdo a la fig. 2 o 3, las adaptaciones didácticas que sufriría la teoría del Cálculo Fraccionario: Operadores fraccionarios, para pasar a ser objetos de conocimiento a enseñar, como aquel contenido que debe figurar en el Currículo de la Escuela Profesional de Matemáticas, es la *Transposición Didáctica Externa*, que responde a la pregunta ¿Quién o quiénes deben formar parte de los procesos de selección y adaptación de los saberes científicos? En la *Transposición Didáctica Externa*, únicamente se trabajan objetos matemáticos seleccionados, despersonalizados, secuenciados y programados para hacerlos corresponder con las competencias de egreso exigidas por la sociedad, desarrollo tecnológico, el modelo educativo y políticas institucionales. Esta actividad conlleva a la preparación o capacitación de los especialistas en matemáticas en lo que respecta al enfoque por competencias, para que actúen acorde al pensamiento epistemológico que ellos tienen frente a la teoría disciplinar: Cálculo Fraccionario; a este proceso se le conoce como proceso de *didactización de los contenidos*. Por lo tanto, de acuerdo con Chevallard (1993) los responsables para esta selección y adaptación de los contenidos son los que conforman la “*noosfera*”, lo que en el enfoque por competencias se denomina “grupos de interés” constituidos por investigadores en matemáticas, pedagogos, docentes encargados de la enseñanza y didáctica de las matemáticas, egresados en matemáticas, administrativos en educación, editores entre otros, los que a su vez formularán y tomarán en cuenta programas, modelos o proyectos curriculares y políticas educativas de las instituciones que harán uso de los conocimientos didactizados y organizados en textos especializados.



**Figura 4.** Transposición Didáctica del Cálculo Fraccionario

La investigación del Cálculo Fraccionario como conocimiento científico, es actualmente de bastante interés en nuestra universidad como tema de investigación de tesis de pregrado para la obtención del título como Licenciado en Matemáticas, que ha permitido al egresado incursionar en esta línea de investigación del análisis matemático para la adquisición de una maestría o doctorado. La propuesta a incorporar en el pregrado la teoría del Cálculo Fraccionario: Operadores Fraccionarios, en la Escuela Profesional de Matemáticas, debe considerarse desde el punto de vista de la Integral y Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville, por ser la versión de operadores, cuya construcción requiere de teoría propia del cálculo clásico (ley de semigrupo, conmutatividad, linealidad de los operadores, entre otras propiedades), como conocimiento básico abordado por diversas experiencias del plan de estudios de matemáticas actual, por otro lado, estos operadores fraccionario son de gran aplicación en otras áreas del conocimiento, donde la Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville como operador inverso de la integral Fraccionaria da lugar a teorías que son estudiadas por Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias, Diethelm, K. (2010), Rahimy, M. (2010), fundamento teórico para la modelación de fenómenos físicos, mecánicos, económicos, tecnológicos, entre otros.

Aceptado este conocimiento como *saber a enseñar*, pasamos a la etapa del *saber enseñado*, y de esta manera completar la *Transposición Didáctica*. Esta etapa se caracteriza por la participación directa del docente de matemáticas como estratega y acompañante en la búsqueda del *saber del estudiante*, se dimensiona el aprendizaje del Cálculo Fraccionario, al permitir que el estudiante tenga acceso a dos miradas diferentes del cálculo, evidenciando sus niveles de comprensión y aprendizaje del Cálculo Clásico, de manera que construya aprendizajes significativos cuando incorpore los nuevos conocimientos del Cálculo Fraccionario.

#### 4. CONCLUSIONES

Implementar la experiencia curricular del Cálculo Fraccionario en el plan de estudios de la Escuela Profesional de Matemáticas, significa reflexionar sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de los conceptos propios de esta teoría, desde la *Transposición Didáctica Externa*, metodología que permite analizar y fundamentar la pertinencia, coherencia y funcionalidad de los saberes disciplinares, así como su secuencia y organización de los mismos con un lenguaje claro, preciso y entendible para el logro de las competencias de egreso del Licenciado en Matemáticas.

Se determinó que la *Transposición Didáctica Externa* es una metodología pertinente para la elaboración de un diseño curricular, acorde a las políticas actuales de gestión académica institucional, su implementación responde a un proceso sistemático con fundamento en la investigación descriptiva.

Se identificó después de haber analizado la dimensión epistemológica y didáctica del Cálculo Fraccionario, en diversos libros y paper, que existe una secuenciación y organización de los saberes formulados de manera diversa, la mayor parte de la bibliografía especializada son documentos que están estructurados de acuerdo a los propósitos de cada investigador.

Se determinó que las representaciones semióticas que utiliza el Cálculo Fraccionario, en las producciones bibliográficas están muy cargadas de símbolos, esto representa un limitante para el proceso didáctico del mismo.

Se identificó que a diferencia del cálculo tradicional la definición del objeto matemático Derivada Fraccionaria está en función de la Integral Fraccionaria, luego permite tener un fundamento epistemológico más completo del concepto de derivada e integral de orden entero, al considerar a estos objetos matemáticos como objetos de enseñanza que en un primer "momento" parecen lo suficientemente nuevos en consecuencia resulta ser de importancia su enseñanza y aprendizaje, sin embargo, son objetos antiguos de tal forma que se constituyen para los estudiantes en retos formadores a fin de relacionarlos o identificarlos como conocimiento generalizado de cálculo entero.

Se determinó que el Cálculo Fraccionario es una teoría sostenible para ser considerada como experiencia curricular en el plan de estudios del programa de estudios de Matemáticas pues permitiría despertar en el estudiante la inquietud de establecer analogías entre el cálculo clásico y el cálculo fraccionario, potenciando las competencias de comprensión, aplicación, análisis, síntesis, valoración e investigación de los nuevos aprendizajes.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez De Zayas, RM. 1997. Hacia un currículum integral y contextualizado. Editorial Académica. Honduras: Universidad Nacional Autónoma. 100 pp.
- Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P. 1995. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Ingeniería didáctica en Educación Matemática. México: Una Empresa Docente y Grupo Editorial Iberoamérica. 97-140
- Barros, F. 2008. Enseñanza de las ciencias desde una mirada de la didáctica de la Escuela Francesa. Revista EIA.10: 55-71.
- Buchelli, G. 2009. Transposición didáctica bases para repensar la enseñanza de una disciplina científica-I parte. Revista Académica e Institucional, Páginas de la UCPR, 85: 17-38.
- Cammilloni, A. 2017. Ensayos: Tendencias y formatos en el currículo universitario. Revista Itinerarios Educativos 9: 2-20.
- Clauso, A. 1993. Análisis documental: el análisis formal. Revista general de información y documentación Ed. Complutense. 3 (1): 11-19.
- Coll, C. 1986. Los niveles de concreción del diseño del currículum. Cuadernos de Pedagogía 139: 24-30.
- Chevallard, Y. 1997. La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. 3ra Edición. Editorial Aiqué. Buenos Aires. Argentina. 189 pp.
- Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J. 1997. Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. 1era Edición. Editorial Horsori. Barcelona, España. 335 pp.
- Chevallard, Y. 1999. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de los didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques. 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. 2013. Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, Barcelona, Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a16>.
- Díaz, Á. 2003. La investigación curricular en México. La década de los noventa. 1era Edición. Consejo Mexicano de Investigación Educativa, A.C. México. 335 pp.
- Diethelm, K. 2010. The Analysis of Fractional Differential Equations. Dordrecht Heidelberg London New York: Springer. 248 pp
- Duval, R.1999. Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. 1era Edición. Editorial Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Cali Colombia. 332 pp
- Font, V. 2011. Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Unión, San Cristóbal de La Laguna 26: 9-25.
- Guía, M.; Rosales, J.; Guzmán, R.; González, A.; Álvarez, J. 2015. El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones. Acta Universitaria, 25(2): 20-27. doi: 10.15174/au.2015.688

- Icarte, G. y Lávate, H. 2016. Metodología para la Revisión y Actualización de un Diseño Curricular de una Carrera Universitaria Incorporando Conceptos de Aprendizaje Basado en Competencias. Formación universitaria, 9(2):03-16. Disponible en: [http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S071850062016000200002&lng=es&tlng=es.10.4067/S0718-50062016000200002](http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S071850062016000200002&lng=es&tlng=es.10.4067/S0718-50062016000200002).
- Kilbas, A.; Srivastava, H.; Trujillo, J. 2006. Theory and Applications and Fractional Differential Equations. First Edition. Editor Elsevier. Amsterdam. 521 pp.
- Miller, K.; Bertram, R. 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., New York. pp. 1–16,
- Oficina de Evaluación y Desarrollo Académico. 2015. Modelo Educativo de la Universidad Nacional de Trujillo. Editorial Universitaria de la Universidad Nacional de Trujillo. Trujillo. Perú. 75 pp.
- Oldham, K; Spanier, J. 1970. The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. 1era Edition. Editor Academic Press. New York and London. 322 pp.
- Peña, T.; Pirella, J. 2007. La complejidad del análisis documental. Información Cultura y Sociedad, (16), 55-81
- Pinto, M. 1999. Introducción al análisis documental y sus niveles: el análisis de contenidos. Boletín de la ANABAD. 39: 323-342.
- Pozo, J.; Postigo, Y. 1993. Las estrategias de aprendizaje como contenido del currículo. En C. Monereo (Compil.), Las estrategias de aprendizaje: Procesos, contenidos e interacción. Barcelona: Domènech. artígue 2453 – 2461.
- Ross, B. 1975. A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus, in: Lect. Notes Math., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 1–36.
- Tenreiro, J.; Galhano, A.; Trujillo, J. 2013. Science metrics on fractional calculus development since 1966. Elsevier Fractional Calculus & Applied Analysis. 12: 480-497.
- Tenreiro, J.; Kiryakovab, V.; Mainardini, F. 2011. Recent history of fractional calculus. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 16:1140-1143.
- Tenreiro, J.; Trujillo, J. 2013. On Development of Fractional Calculus During the Last Fifty Years. Article in Scientometrics. Manuscript Draft. pp.2-14.
- Tobón, S. 2017. Ejes esenciales de la sociedad del conocimiento y la socioformación. Mount Dora (USA): Kresearch. doi: dx.doi.org/10.24944/isbn.978-1-945721-18-2. Disponible en: [https://issuu.com/cife/docs/diccionario\\_conceptos\\_basicos](https://issuu.com/cife/docs/diccionario_conceptos_basicos).
- Vargas, C.; Isabel M. 2000. Didáctica I de la Matemática. Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Chile. Disponible en: [http://mat.uv.cl/profesores/apuntes/archivos\\_p%C3%BAblicos/7543144551\\_art\\_Didactica%20de%20la%20matematica.doc](http://mat.uv.cl/profesores/apuntes/archivos_p%C3%BAblicos/7543144551_art_Didactica%20de%20la%20matematica.doc).
- Zabalza, A. 2000. El papel de los departamentos universitarios en la mejora de la calidad de la docencia, en Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 38: 47-66
- Zabalza, A. 2009. Ser profesor universitario hoy. Revista Cuestión Universitaria. 5: 68-80.
- Zabalza, A. 2012. Articulación y rediseño curricular: el eterno desafío institucional. Revista de Docencia Universitaria 10: 17-48.