Solución Numérica para la Ecuación de Schrödinger

Wilson Maco Vasquez[*] Lucy Salazar Rojas[**]
Esteban castillo Peredas[***] Edgar Rodriguez Horna [****]

16 de abril de 2019

Resumen

En este trabajo se analiza la existencia de la solución de la ecuación no lineal de Schrödinger,

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u - \lambda |u|^{\alpha-1} u \text{ en } \Omega \times [0,T], \\ \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega \times [0,T], \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

donde $u = u(x,t),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,\ t \in [0,T]$ con $T > 0,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \alpha = 3$ y

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Para ello se debilita el problema (1) en su forma variacional (P), utilizando el método de Faedo-Galerkin se obtiene el problema débil (P_m) de (P) y usando los teoremas de compacidad,para $m \to \infty$ se prueba la existencia de la solución débil del problema considerado.

[*]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo.
[**]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo.
[***]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo.
[****]Maestrista en Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo.

Palabras clave: Ecuación no lineal de Schrödinger, método de Faedo-Galerkin.

Abstract

In this paper we analyze the existence of the solution of Schrodinger's nonlinear equation,

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u - \lambda |u|^{\alpha-1} u \text{ en } \Omega \times [0,T], \\ \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega \times [0,T], \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

donde $u = u(x,t),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,\ t \in [0,T]$ con $T > 0,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \alpha = 3$ y

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

To do this, the problem (1) is weakened in its variational form (P), using the Faedo-Galerkin method the approximate problem is obtained (P_m) of (P) and using compactness results, when $m \to \infty$ the existence of the weak solution of the problem considered is proved.

Key words: Non-linear Schrodinger equation, Faedo-Galerkin method.

I. Introducción

La ecuación no lineal de Schrödinger en dos dimensiones

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u - \lambda |u|^{\alpha-1} u \text{ en } \Omega \times [0,T], \\ \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega \times [0,T], \\ \quad u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}) \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde $u = u(\mathbf{x},t),\ \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,\ t \in [0,T]$ con $T > 0,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \alpha = 3$ y

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Aparece en varias áreas de la física, describiendo ondas no lineales como la propagación de un haz de láser en un medio Kerr también para las ondas acuáticas en la superficie de un fluido ideal de profundidad infinita, en la física de plasma o en la propagación óptica intensa, los amplificadores y osciladores paramétricos ópticos, la dispersión Raman, la biestabilidad óptica y los solitones son sólo algunos de los fenómenos físicos con una amplia aplicación práctica, que son modelados a través de la ecuación (1). La búsqueda de soluciones analíticas para la ecuación (1) no es sencilla salvo en ciertos casos particulares, por esta razón, es preciso disponer de métodos para hallar soluciones númericas aproximadas para la ecuación no lineal de Schrödinger.

En esta investigación se aplica el método de elementos finitos para obtener la solución numérica de (1), para ello se realizan los siguientes pasos:

1. Construir una "formulación débil " de la ecuación diferencial, esto implica que, la ecuación debe ser planteada en un espacio de funciones adecuado, que frecuentemente es un espacio de Hilbert, y luego verificar la existencia de la solución de la formulación débil para este problema.

2. Introducir espacios de elementos finitos, es decir, se aproxima el problema obtenido en el primer paso a un espacio de dimension finita, de aquí, surge un sistema linear, ya que introducimos unas bases para hallar una aproximación de elementos finitos.

3. Resolver el sistema lineal obtenido en el paso 2, el cual se soluciona por un método directo o iterativo.

1. Preliminares

A continuación, se menciona algunas definiciones y resultados que seran empleados en el desarrollo del presente trabajo.

1.1. Convergencias

Definición 1.1.1 (Convergencia débil) *Sea E un espacio de Banach y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E. Se dice que u_n convergen débilmente a u si se cumple:*

$$\langle \varphi, u_n \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall \varphi \in E',$$

y se denota: $u_n \rightharpoonup u$.

Definición 1.1.2 (Convergencia débil estrella) *Sea E un espacio de Banach, $\varphi \in E'$ y $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E'. Se dice que φ_n converge débilmente * a φ si cumple,*

$$\langle \varphi_n, u \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \ \forall u \in E,$$

y se denota: $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$.

1.2. Espacios de distribuciones

Se representa por $C_0^\infty(\Omega)$ al espacio de las funciones contínuas e infinitamente diferenciables en Ω, con soporte compacto en Ω.

Definición 1.2.1 (Convergencia en $\mathbf{C_0^\infty(\Omega)}$) *Dado Ω, como en la definición anterior, considerando el espacio vectorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$, una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $C_0^\infty(\Omega)$ converge a φ en $C_0^\infty(\Omega)$ cuando satisface las siguientes condiciones:*

i) Existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$sop(\varphi) \subset K \quad y \quad sop(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ii) $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ *uniformemente en* K *para todo multi-índice* α.

El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ con el tipo de convergencia definina anteriormente, será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ y se denomina *espacio de las funciones test*. El valor de la distribución T en la función de test φ se denota por $\langle T, \varphi \rangle$.

Definición 1.2.2 *Sea* $p \in [1, \infty]$. *Se denota po* $L^p(\Omega)$ *el conjunto de las (clases de equivalencia de) funciones medibles* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tales que* $|u|^p$ *es integrable en el sentido de Lebesgue en* Ω. *Para* $u \in L^p(\Omega)$, *definimos*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p dt \right)^{1/p} & si\ p \in [1, \infty) \\ \sup\limits_{x \in \Omega} es|u(x)| & si\ p = \infty \end{cases} ;$$

donde:

$$\sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} \|u(x)\| = \inf\{M > 0 : \|u(t)\| \leq M \ \ p.c.t. \ \ x \in \Omega\}$$

El espacio $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, con sus respectivas normas, es un espacio de Banach. En particular, cuando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert cuya norma y producto interno son definidos y denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^2 dt \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad (u, v)_{L^2(\Omega)} \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Definición 1.2.3 *Una sucesión de distribuciones escalares* $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge a una distribución escalar* T *en* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *cuando*

$$\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \ \text{en } \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Con la noción de convergencia, $\mathcal{D}'(\Omega)$ es un espacio vectorial topológico y tiene las siguientes cadenas de inmersiones y densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{Loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty.$$

Definición 1.2.4 *Dada una distribución T en $\mathcal{D}'(\Omega)$ y dado un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se define la derivada distribucional de orden α de T como la forma lineal y contínua $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

1.3. Convegencia en L^p y el dual de L^p

Una sucesión (φ_n) convergen a φ en $L^p(\Omega)$ si

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0, \quad \text{para} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Si p y q son índices conjugados, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ con $1 \leq p < \infty$, entonces el dual topológico de $L^p(\Omega)$, que será denotado por $[L^p(\Omega)]'$, es el espacio $L^q(\Omega)$. En el caso de $1 \leq p < \infty$ el espacio vectorial $L^p(\Omega)$ es separable y para $1 < p < \infty$ es reflexivo (ver [1, pág. 95]).

Teorema 1.3.1 *Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$, tales que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Entonces, existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge casi siempre a f en Ω, y existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ casi siempre en Ω.

Demostración:
Ver [1, pág. 94].

Definición 1.3.1 *Sea H un espacio de Hilbert. Se llama **base Hilbertiana** de H una sucesión de elementos (ω_n) de H tales que*

i) $\|\omega_n\| = 1 \;\; \forall n. \quad (\omega_n, \omega_m) = 0 \;\; \forall n, m, \;\; m \neq n;$

ii) El espacio generado por (ω_n) es denso en H.

Definición 1.3.2 *Sea $m > 0$, un número entero positivo y $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev de orden m, modelado sobre $L^p(\Omega)$, denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, es por definición el espacio vectorial de las (clases de) funciones de $L^p(\Omega)$ para las cuales sus derivadas hasta el orden α, en sentido de distribuciones, pertenecen a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, con $|\alpha| \leq m$.*
El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ posee la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} & si \ p \in [1, \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} & si \ p = \infty \end{cases} ; \tag{1.1}$$

Proposición 1 *Los espacios lineales $W^{m,p}(\Omega)$ equipados con sus respectivas normas de (1.1) son espacio de Banach.*

Demostración:
Ver [5, pág. 24].
El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo si $1 < p < \infty$ y es separable si $1 \leq p < \infty$. En el caso particular en que $p = 2$, el espacio $W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, que es denotado por $H^m(\Omega)$ (ver [5, pág. 33]). Simbólicamente

$$H^m(\omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \ \forall \alpha, \ |\alpha| \leq m\}$$

cuya norma y producto interno son dados respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad ((u, v)) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

El espacio $H^m(\Omega)$ con la estructura topológica anterior, es un espacio de Hilbert, inmerso en $L^2(\Omega)$.
El dual topológico del espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ es representado por $W^{-m,p}(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$ con p y q índices conjugados. Si $\varphi \in W^{-m,p}(\Omega)$ entonces $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertenece a $\mathcal{D}(\Omega)$. Cuando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ es denotado como $H_0^m(\Omega)$, cuyo dual es el espacio denotado por $H^{-m}(\Omega)$. La caracterización de $W^{-m,p}(\Omega)$ es dada por:

Teorema 1.3.2 *Sea* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$*. Entonces* $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ *si y solo si, existe* $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ *tal que* $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.

Demostración:

Ver [5, pág. 31].

Lema 1.3.1 (Desigualdad de Poincaré) *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado. Si* $u \in H_0^1(\Omega)$*, entonces existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración:

Ver [1, pág. 218].

1.4. Espacios $L^p(I; X)$ y distribuciones vectoriales

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y X un espcio de Banach con norma $\|\cdot\|$.
$C^0(I; X)$ es el espacio vectorial de las funciones

$$\begin{aligned} u : I \subset \mathbb{R} &\to X \\ t &\longmapsto u(t) \end{aligned}$$

son continuas en I. Si $k \geq 1$,

$$C^k(I; X) = \{\varphi \in C^0(I; X) : \exists\ d^n\varphi/dt^n \in C^0(I; X),\ \forall n \leq k\}.$$

y

$$C^\infty(I, X) = \bigcap_{k \geq 1} C^k(I; X).$$

Los espacios anteriores son espacios vectoriales para la suma de funciones y producto por escalares.

Definición 1.4.1 *Dada una función continua* $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to X$*, donde* Ω *es un abierto. El conjunto*

$$sop\varphi = \overline{\{x \in I\ :\ \varphi(x) \neq 0\ en\ X\}}$$

es llamado conjunto soporte de φ.

Definición 1.4.2 *Al espacio de las funciones infinitamente derivables en I y de soporte compacto contenido en I, se le denomina espacio de funciones tests vectoriales y se denota por*

$$\mathcal{D}(I;X) := C_0^\infty(I;X)$$

Definición 1.4.3 *Sea $p \in [1,\infty]$. Denotamos mediante $L^p(I;X)$ el conjunto de las (clases de equivalencia de) funciones medibles $u : I \to X$ tales que la función $t \in I \to \|u(t)\| \in \mathbb{R}$ pertenece a $L^p(I)$. Para $u \in L^p(I;X)$, definimos*

$$\|u\|_{L^p(I;X)} = \begin{cases} \left(\int\limits_I \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} & si\ p \in [1,\infty) \\ \sup\limits_{t\in I} es\|u(t)\|_X & si\ p = \infty \end{cases} ;$$

donde

$$\sup_{t\in I} es\|u(t)\| = \text{ínf}\{M > 0 : \|u(t)\| \leq M \ \ p.c.t. \ \ t \in I\}$$

Cuando $p = 2$ y $X = H$ es un espacio de Hilbert, el espacio $L^2(I,H)$ es también un espacio de Hilbert cuyo producto interno es dado por

$$(u,v)_{L^2(I,H)} = \int\limits_I (u(s),v(s))_H ds.$$

Cuando X es reflexivo y separable y $1 < p < \infty$, entonces $L^p(I,X)$ es un espacio reflexivo (ver [3, pág. 19]) y separable, cuyo dual topológico se identifica al espacio de Banach $L^{p'}(I;X')$, donde p y p' son índices conjugados, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Más precisamente, se muestra que para cada $u \in [L^p(I;X)]'$, existe $\widetilde{u} \in L^{p'}(I;X')$ tal que

$$\langle u,\varphi\rangle_{[L^p(I;X)]'\times L^p(I;X)} = \int\limits_I \langle \widetilde{u}(t),\varphi(t)\rangle_{X'\times X} dt.$$

En el caso, $p = 1$, el dual topológico del espacio $L^1(I;X)$ se identifica al espacio $L^\infty(I;X)$.

El espacio de las aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{D}(I)$ en X es denominado espacio de distribuciones vectoriales sobre I con valores en X, el cual será denotado por $\mathcal{D}'(I;X)$.

Definición 1.4.4 *Sea $T \in \mathcal{D}'(I;X)$. La derivada de orden n es definida como la distribución vectorial sobre I con valores en X dado por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle \varphi, \frac{d^n T}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(I).$$

Definición 1.4.5 *Por $C^0(I;X)$, $\;0 < T < \infty$, se representa el espacio de Banach de las funciones contínuas $u : I \to X$ con la norma de convergencia uniforme*

$$\|u\|_{C^0(I;X)} = \max_{t \in I} \|u(t)\|_X.$$

Definición 1.4.6 *Por $C^0_w(I;X)$, $\;0 < T < \infty$, se denota al espacio de las funciones $u : I \to X$ débilmente continuas; es decir, la aplicación $t \to (v, u(t))_{X',X}$ es contínua en I, $\forall v \in X'$.*

Cuando $X = H$ es un espacio de Hilbert, la continuidad débil de u es equivalente a la continuidad de la aplicación $t \to (u(t), v)_H \;\; \forall v \in H$.

Teorema 1.4.1 (Aubin-Lions) *Sean los espacios de Banach B_0, B y B_1 con inmersión compacta entre B_0 y B e inmersión continua entre B y B_1. Dada una sucesión que satisface las condiciones:*

$$u_m \in L^p(0,T;B_0) \quad y \quad \frac{du_m}{dt} \in L^p(0,T;B_1).$$

Entonces existe una subsucesión u_{m_k} de u_m que converge fuertemente en $L^p(0,T;B)$.

Demostración:
Ver [4, pág. 58].

Lema 1.4.1 *Sean V, H, V' tres espacios de Hilbert tales que $V \subset H \subset V'$, donde V' es el dual de V. Suponga que $u \in L^2(0,T,V)$ y $u' \in L^2(0,T,V')$, entonces $u \in C([0,T],H)$ es integrable en t y satisface*

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\langle u', u \rangle.$$

Donde $u(t) \in V$, $u'(t) \in V'$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la aplicación de dualidad entre V' y V.

Demostración:

Ver [8, pág. 261].

Definición 1.4.7 *Sea* $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Se denota por* $W(a, b, V, V')$ *al espacio:*

$$W(a, b, V, V') = \{u : \ u \in L^2(a, b; V), \ u' \in L^2(a, b; V')\}$$

Teorema 1.4.2 (Integración por partes) *Sea* $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$. *Sean,* $u, v \in W(a, b; V, V')$, $u \in V$, *entonces*

$$\int_a^t \langle u'(t), v(t)\rangle dt + \int_a^t \langle u(t), v'(t)\rangle dt = (u(b, v(b))) - (u(a), v(a)$$

Demostración:

Ver [2, pág. 477].

1.5. Desigualdades importantes

Lema 1.5.1 (Desigualdad de Gronwall-Forma integral) *Sean* u, ϕ, w *funciones reales no negativas en* $[0, T]$ *satisfaciendo*

$$u(t) \leq \phi(t) + \int_0^t w(\sigma)u(\sigma)d\sigma \tag{1.2}$$

para todo $t \in [0, T]$. *Entonces, para todo* $t \in [0, T]$ *se tiene*

$$u(t) \leq \phi(t) + \int_0^t w(s)\phi(s) \exp\left(\int_s^t w(r)dr\right) ds$$

Corolario 1.5.1 (Desigualdad de Gronwall) *Si* $\phi(t) = C$, *con* $C \in \mathbb{R}_+$, *la desigualdad anterior se reduce a:*

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_0^t w(r)dr\right).$$

Definición 1.5.1 (Desigualdad de Cauchy con ε**)** *Sea* $a, b, \varepsilon > 0$, *entonces*

$$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2} \tag{1.3}$$

2. Ecuación de Schödinger no lineal

$$u' - i\Delta u + |u|^\rho u = f \text{ en } Q \tag{2.4}$$

$$u = 0 \text{ sobre } \Sigma, \tag{2.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{2.6}$$

donde $\rho > 0$, $i = \sqrt{-1}$, $Q = \Omega \times (0,T)$ y $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$.

Notación:

$$u(x,t) = u(t); \quad f(x,t) = f(t); \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u'(t)$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|; \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} = |u|_p$$

2.1. Formulación variacional

Multiplicando a la ecuación (2.4) por $v \in H_0^1(\Omega)$

$$u'(t)v - i\Delta u(t)v + |u(t)|^\rho u(t)v = f(t)v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ p.c.t. } t \in (0,T)$$

integrando sobre Ω

$$\int\limits_\Omega (u'(t)v - i\Delta u(t)v + |u(t)|^\rho u(t)v) = \int\limits_\Omega f(t)vdx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ p.c.t. } t \in (0,T)$$

$$\Rightarrow \int\limits_\Omega u'(t)v - i\int\limits_\Omega \Delta u(t)v + \int\limits_\Omega |u(t)|^\rho u(t)v = \int\limits_\Omega f(t)vdx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ p.c.t. } t \in (0,T)$$

aplicando la formula de Green, se tiene

$$\int\limits_\Omega u'(t)v - i\left(\cancelto{0}{\int\limits_{\partial\Omega} \partial_\nu u(t)vd\sigma} - \int\limits_\Omega \nabla u(t)\nabla vdx\right) + \int\limits_\Omega |u(t)|^\rho u(t)v =$$

$$= \int\limits_\Omega f(t)vdx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ p.c.t. } t \in (0,T)$$

$$
\begin{cases}
(u'(t), v) - ia(u(t), v) + (|u(t)|^\rho u(t), v) = (f(t), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ p.c.t. } t \in (0, T) \\
\text{donde} \\
\qquad a(u(t), v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx \quad , \quad (f, g) = \int_\Omega f \bar{g} dx
\end{cases}
\tag{2.7}
$$

Teorema 2.1.1 (de existencia y unicidad) *Supongamos que*

$$
f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad f' \in L^2(Q), \tag{2.8}
$$

$$
u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{2.9}
$$

Entonces existe una única función u que verifica (2.4)-(2.6).

$$
u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^P(Q), \quad p = \rho + 2 \tag{2.10}
$$

$$
u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2.11}
$$

Demostración:

Para ello se realizaran los siguientes pasos:

2.2. Etapa 1: Problema aproximado

Sabemoss que $H_0^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ son espacios de Hilbert separables. Entonces existe una base $\{w_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que el espacio generado por esta base es denso en $H_0^1(\Omega)$ (y, así, en $L^2(\Omega)$, pues $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ con inyección densa).

Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo,

$$
V_m = gen\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}
$$

subespacio vectorial de dimensión finita.

Dado $v \in H_0^1(\Omega)$ ($v \in L^2(\Omega)$), $\exists \{v_m\}_{m \geq 1}$ tal que $v_m \in V_m$ y $v_m \to v$ en $H_0^1(\Omega)$ ($v_m \to v$ en $L^2(\Omega)$).

Dado $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\exists \{u_{0m}\}_{m \geq 1}$ tal que $u_{0m} \in V_m$ y $u_{0m} \to u_0$ en $L^2(\Omega)$.

Escojiendo una "*base especial*" en el método de Faedo-Galerkin:

las funciones propias de

$$-\Delta w_j = \lambda_j w_j \ , \quad j = 1, \ldots, \ w_j \in H_0^1(\Omega). \tag{2.12}$$

El problema aproximado asociado a (2.7) consiste en encontrar $u_m \in V_m$ definido por

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i(x) \quad \text{con} \quad g_{im} \in C^1(0,T) \tag{2.13}$$

es solución del problema

$$\begin{cases} (u_m'(t), w_j) - ia(u_m(t), w_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j) = (f(t), w_j), \quad \forall j = 1, \ldots, \ t \in (0,T) \\ u_m(0) = u_{0m} \end{cases} \tag{2.14}$$

2.3. Etapa 2: Aproximación apriori

Estimativa I

Multiplicando (2.14) por $\overline{g_{jm}(t)}$ para cada j,

$$(u_m'(t), \overline{g_{jm}(t)} w_j) - ia(u_m(t), \overline{g_{jm}(t)} w_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), \overline{g_{jm}(t)} w_j) = (f(t), \overline{g_{jm}(t)} w_j)$$

sumando desde $j = 1$ hasta m

$$\left(u_m'(t), \sum_{j=1}^{m} \overline{g_{jm}(t)} w_j\right) - ia\left(u_m(t), \sum_{j=1}^{m} \overline{g_{jm}(t)} w_j\right) + \left(|u_m(t)|^\rho u_m(t), \sum_{j=1}^{m} \overline{g_{jm}(t)} w_j\right) =$$

$$= \left(f(t), \sum_{j=1}^{m} \overline{g_{jm}(t)} w_j\right)$$

y por (2.13)

$$(u_m'(t), u_m(t)) - ia(u_m(t), u_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t))$$

$$\Rightarrow (u_m'(t), u_m(t)) - ia(u_m(t), u_m(t)) + |u_m(t)|^\rho (u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)) \tag{2.15}$$

entonces por el Lema 1.4.1, (2.15) se escribe como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 + i\|u_m(t)\|^2 + |u_m(t)|^\rho \int_\Omega |u_m(t)|^2 dx = (f(t), u_m(t))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 + i\|u_m(t)\|^2 + \int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2}dx = (f(t), u_m(t))$$

haciendo $p = \rho + 2$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 + i\|u_m(t)\|^2 + \int_\Omega |u_m(t)|^{p}dx = (f(t), u_m(t))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 + i\|u_m(t)\|^2 + |u_m(t)|_p^p = (f(t), u_m(t)) \quad \text{p.c.t. } t \in (0, T). \tag{2.16}$$

Tomando la parte real de (2.16) y multiplicando por 2, se obtiene

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|_2^2 + 2|u_m(t)|_p^p = 2Re[(f(t), u_m(t))] \quad \text{p.c.t. } t \in (0, T)$$

integrando la expresión anterior en el intervalo $(0, t)$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}|u_m(s)|_2^2 ds + 2\int_0^t |u_m(s)|_p^p ds = 2Re\int_0^t (f(s), u_m(s))ds$$

ahora por el Teorema 1.4.2 se tiene

$$|u_m(s)|_2^2 - |u_m(0)|_2^2 + 2\int_0^t |u_m(s)|_p^p ds = 2Re\int_0^t (f(s), u_m(s))ds$$

$$\Rightarrow |u_m(s)|_2^2 + 2\int_0^t |u_m(s)|_p^p ds = 2Re\int_0^t (f(s), u_m(s))ds + |u_m(0)|_2^2, \tag{2.17}$$

los sumandos que están a la derecha de la identidad (2.17) son acotados de la siguiente forma

$$2Re\int_0^t (f(s), u_m(s))ds \leq 2\int_0^t |f(s)|_{2'}|u_m(s)|_2 ds$$

usando la desigualdad 1.3 con $\varepsilon = \alpha$,

$$\begin{aligned} &\leq 2\left[\int_0^t \frac{|f(s)|_{2'}^2}{2\alpha}ds + \int_0^t \frac{\alpha|u_m|_2^2}{2}ds\right] \\ &= \int_0^t \frac{|f(s)|_{2'}^2}{\alpha}ds + \int_0^t \alpha|u_m|_2^2 ds \end{aligned} \tag{2.18}$$

y como $|u_m(0)| \leq C|u_0|$ (pues $\{u_m(0)\}$ es una sucesión convergente), reemplazando (2.18) en (2.17)

$$|u_m(s)|_2^2 + 2\int_0^t |u_m(s)|_p^p ds \leq C|u_0| + \int_0^t \frac{|f(s)|_{2'}^2}{\alpha} ds + \int_0^t \alpha |u_m|_2^2 ds$$

$$\Rightarrow |u_m(s)|_2^2 \leq \underbrace{C|u_0| + \int_0^t \frac{|f(s)|_{2'}^2}{\alpha} ds}_{cte} + \int_0^t \alpha |u_m|_2^2 ds \qquad \forall t \in (0,T)$$

por el lemma de Cronwall

$$|u_m(s)|_2^2 \leq \underbrace{\left[C|u_0| + \int_0^t \frac{|f(s)|_{2'}^2}{\alpha} ds \right] e^{\alpha T}}_{cte} \quad , \quad \forall t \in (0,T), \forall m \in \mathbb{N}$$

luego

$$\sup_{t\in(0,T)} \operatorname{ess} |u_m(t)|_2 \leq K$$

$$\Rightarrow |u_m(t)|_\infty \leq K$$

$$\therefore \ \{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Estimativa II

Usando (2.12), se reemplaza en (2.14) w_j por $-\Delta w_j$,

$$(u_m'(t), -\Delta w_j) - ia(u_m(t), -\Delta w_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta w_j) = (f(t), -\Delta w_j) \quad (2.19)$$

entonces

$$(u_m'(t), -\Delta w_j) = -\int_\Omega u_m'(t)\Delta w_j dx$$

$$= \int_\Omega \nabla u_m'(t) \nabla w_j dx - \cancelto{0}{\int_{\partial\Omega} \partial_\nu w_j \cdot u_m'(t) d\sigma}$$

$$= a(u_m'(t), w_j)$$

y

$$
\begin{aligned}
(f(t), -\Delta w_j) &= -\int\limits_{\Omega} f(t)\Delta w_j dx \\
&= \int\limits_{\Omega} \nabla f(t)\nabla w_j dx - \cancelto{0}{\int\limits_{\partial\Omega} \partial_\nu w_j \cdot f(t) d\sigma} \\
&= a(u_m'(t), w_j)
\end{aligned}
$$

luego reemplazando en (2.19) las igualdades anteriores,

$$
a(u_m'(t), w_j) + i(\Delta u_m(t), \Delta w_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta w_j) = a(f(t), w_j), \tag{2.20}
$$

de (2.20) se deduce

$$
a(u_m'(t), u_m(t)) + i(\Delta u_m(t), \Delta u_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u_m(t)) = a(f(t), u_m(t))
$$

entonces

$$
a(u_m'(t), u_m(t)) + i|\Delta u_m(t)|^2 + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u_m(t)) = a(f(t), u_m(t)). \tag{2.21}
$$

Calculando

$$
\begin{aligned}
2Re(|v|^\rho v, -\Delta v) &= -2Re\int\limits_\Omega |v|^\rho v \Delta v dx \\
&= 2Re\left(\int\limits_\Omega \nabla(|v|^\rho v)\nabla v dx - \cancelto{0}{\int\limits_{\partial\Omega} \partial_\nu v \cdot |v|^\rho v dx}\right) \\
&= 2Re\sum_{i=1}^{n}\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(|v|^\rho v)\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}dx \\
&= 2Re\sum_{i=1}^{n}\int\limits_\Omega (1+\rho)v^2\frac{\partial v}{\partial x_i}|v|^{\rho-2}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}dx \\
&= 2Re(1+\rho)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_\Omega v^2|v|^{\rho-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}dx \\
&= 2Re(1+\rho)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_\Omega |v|^2|v|^{\rho-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx \\
&= 2Re(1+\rho)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_\Omega |v|^\rho\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx
\end{aligned}
$$

de donde se concluye $2Re(|v|^\rho v, -\Delta v) \geq 0$.

En particular

$$2Re(|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u_m(t)) \geq 0 \tag{2.22}$$

tomando la parte real de (2.21) y multiplicando por 2,

$$2a(u_m'(t), u_m(t)) + 2Re(|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u_m(t)) = 2Rea(f(t), u_m(t)),$$

por el lema 1.4.1

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}a(u_m(t), u_m(t)) + 2Re(|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u_m(t)) &= 2Rea(f(t), u_m(t)) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}a(u_m(t), u_m(t)) &\leq 2Rea(f(t), u_m(t)) \\
\Rightarrow \|u_m(t)\|^2 &\leq 2Rea(f(t), u_m(t))
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ \{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Estimativa III

Usando la hipótesis (2.9), se verifica que $|u'_m(0)| \leq$ constante.

Derivando (2.14) con respecto a t

$$\frac{d}{dt}(u'_m(t), w_j) - i\frac{d}{dt}a(u_m(t), w_j) + \frac{d}{dt}(|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j) = \frac{d}{dt}(f(t), w_j),$$

realizando el mismo tipo de cálculo que en (2.22) se obtiene

$$Re\left(\frac{d}{dt}(|u_m(t)|^\rho u_m(t)), u'_m(t)\right) \geq 0$$

de lo cual se deduce que $\{u'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotado en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

Por lo tanto se concluye:

$$\begin{cases} \{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ \{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \{u'_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{2.23}$$

2.4. Etapa 3: Paso al limite

De (2.23) se pueden extraer subsucesiones convergentes $\{u_\mu\}$, $\{u'_\mu\}$ de $\{u_m\}$, $\{u'_m\}$ respectivamente tales que:

$$u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)),$$
$$u'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

En particular, de (2.23):

$$\begin{cases} \{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \{u'_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q). \end{cases} \tag{2.24}$$

Por el teorema 1.4.1,

$$u_\mu \to u \text{ en } L^2(Q) \text{ fuertemente y casi en todas partes en } Q.$$

Como $|u_m|^\rho u_m$ es acotado en $L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega))$, entonces

$$|u_m|^\rho u_m \overset{*}{\rightharpoonup} w \text{ en } L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega)),$$

donde

$$w = |u|^{\rho} u.$$

para ello, se usa el siguiente lema

Lema 2.4.1 *Sea Q un abierto acotado de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$ y sea $\{g_\mu\}_\mu$, g funciones $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$, tales que*

$$\|g_\mu\|_{L^q(Q)} \leq C, \;\; g_\mu \to g \;\; c.t.p \;(x,t) \in Q.$$

Entonces

$$g_\mu \to g \;\; en \;\; L^q(Q) - débil.$$

Tomando

$$g_\mu = |u_\mu|^{\rho} u_\mu \;,\;\; q = \frac{\rho+1}{\rho+2} = p'.$$

La unicidad es inmediata, es suficiente notar que

$$Re(|u|^{\rho}u - |v|^{\rho}v, u - v) \geq 0 \quad \forall u, v \in L^p(\Omega). \tag{2.25}$$

■

II. Material y Métodos

1. Material

Para la realización de la presente investigación, se utilizó la ecuación no lineal de Schrödinger,

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u - \lambda |u|^{\alpha-1} u \text{ en } \Omega \times [0,T], \\ \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega \times [0,T], \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

2. Métodos y técnicas

En el presente trabajo se utilizó las técnicas de aproximación de Faedo-Galerkin y teoremas de compacidad [4].

III. Resultados y Discusión

Para la solución aproximada u_m se obtuvo:

1. En la Estimativa I, se demostro que $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotado en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

2. En la Estimativa II, se demostro que $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotado en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$.

3. En la Estimativa III, se demostro que $\{u'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotado en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)$.

IV. Conclusiones

Con las estimativas I, II y III, se demostro que la solución del Problema aproximado (2.14) son acotadas y por ello son sucesiones convergentes en sus respectivos espacios. Por el Teorema 1.4.1, se puede extraer una subsucesión de $\{u_m\}$ que convergen fuertemente a u que es la solución del problema (1).

Referencias

[1] Brezis, H. (2010) *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer Science & Business Media.

[2] Dautray, R. and Lions, J. L. (2012) *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Volume 5 Evolution Problems I.* Vol. 5. Springer Science & Business Media.

[3] Kreuter, M. (2015) *Sobolev Spaces of Vector-Valued Functions.* Ulm University Faculty of Mathematics and Economies.

[4] Lions, J.L. (1969) *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires.* Vol. 1. Dunod;Gauthier-Villars, Paris.

[5] Mederiros, L. A. and Milla, M. A. (2000) *Espaço de Sovolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos).* Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro.

[6] Newell, A. (1985) *Solitons in mathematics and physics.* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 48. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).

[7] Sulem, C. and Sulem, P. (1999) *The nonlinear Schrödinger equation.* Applied Mathematical Sciences, vol. 139. New York: Springer-Verlag. Self-focusing and wave collapse.

[8] Temam, R. (1979) *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis.* North-Holland Publishing Company. New York.